



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>

56

Soc 1991 d. 89

1784

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE
ROYALE
DES SCIENCES.

ANNÉE M. DCCLXXXIV.

Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique,
pour la même Année,
Tirés des Registres de cette Académie.

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCCLXXXVII.





TABLE

POUR L'HISTOIRE.

<i>DISCOURS</i> prononcé à l'Académie, devant Son Altesse Royale le prince Henri de Prusse.....	Page 1
<i>Exposé des Expériences</i> qui ont été faites pour l'examen du <i>Magnétisme animal.</i> Par M. ^{rs} FRANKLIN, LE ROY, DE BORY, LAVOISIER & BAILLY.....	6

<i>Ouvrages présentés à l'Académie</i>	16
<i>Machine approuvée par l'Académie</i>	19
<i>Éloge de M. Macquer</i>	20
<i>Éloge de M. Bergman</i>	31
<i>Éloge de M. Morand</i>	48
<i>Éloge de M. Cassini de Thury</i>	54
<i>Éloge de M. le Comte de Milly</i>	64



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

T A B L E.

<i>Recherches théoriques & expérimentales sur la force de torsion, & sur l'élasticité des fils de métal, &c.</i> Par M. COULOMB.	229
<i>Observations sur les Schorls.</i> Par M. l'Abbé HAÛY..	270
<i>Mémoire sur la structure des Cristaux de feld-spath.</i> Par le même.....	273
<i>Mémoire sur l'effet de l'Air inflammable sur les corps organisés.</i> Par M. SAGE.....	287
<i>Expériences qui font connoître la nécessité d'employer une grande quantité de Plomb pour extraire l'Argent contenu dans des terres.</i> Par le même.....	289
<i>Analyse d'une Mine de plomb terreuse, jaunâtre, antimoniale & martiale, &c.</i> Par le même.....	291
<i>Observation sur une substance ramassée de jeunes Peupliers d'Italie.</i> Par M. l'Abbé TESSIER.....	293
<i>Observation sur les suites d'une Grêle tombée le 25 Mai 1783, dans un canton de la Beauce.</i> Par le même.....	296
<i>Examen de la dernière révolution de Jupiter, & des élémens actuels de son orbite.</i> Par M. DE LA LANDE....	301
<i>Mémoire contenant les observations de la première Comète de 1784, observée à Paris, &c.</i> Par M. MESSIER.	313
<i>Observation de l'éclipse de Lune, &c.</i> Par le même..	328
<i>Vérification des nouvelles découvertes faites en Angleterre, sur les Étoiles fixes.</i> Par M. CASSINI.....	331
<i>Mémoire sur un nouveau genre de plante nommé Brucea, & sur le faux Bresillet d'Amérique.</i> Par M. le Chevalier DE LA MARCK.....	342
<i>Recherches sur le Calcul intégral.</i> Par M. CHARLES..	348
<i>Mémoire sur la disparition de l'Étoile de la constellation du Faureau, &c.</i> Par M. LE MONNIER.....	353

T A B L E.

<i>Observation sur une illusion d'Optique.</i> Par M. DE FOURCROY.	355
<i>Mémoire contenant les observations & la théorie de la première Comète de 1784.</i> Par M. MÉCHAIN.....	358
<i>Observation de l'éclipse de Lune, du 6 Mars 1784.</i> Par le même.....	367
<i>Recherches sur la figure des Planètes.</i> Par M. LE GENDRE.	370
<i>Mémoire sur les moyens d'opérer une entière combustion de l'Huile, &c.</i> Par M. MEUSNIER.....	390
<i>Observation anatomique.</i> Par M. DE FOUCHY.....	399
<i>Renseignemens généraux pour tenir lieu de réponse à une Question adressée à l'Académie, par M. Gasté de Bonay, &c.</i> Par M. MORAND.....	402
<i>Mémoire sur l'intégration des Equations aux différences partielles.</i> Par M. COUSIN.....	407,
<i>Mémoire sur l'île de Frislande.</i> Par M. BUACHE... ..	430
<i>Suite du Mémoire sur le calcul des Probabilités.</i> Par M. le Marquis DE CONDORCET.....	454
<i>Mémoire sur la grandeur apparente des Corps opaques, vus sur un fond lumineux ou autrement.</i> Par M. LE GENTIL.	469.
<i>Mémoire sur le Froid observé à l'Observatoire royal & aux Chartreux, à la fin de 1783.</i> Par le même.....	478
<i>Remarque sur les Vents qui règnent à Paris & dans les environs.</i> Par le même.....	480
<i>Remarques & observations sur l'Astronomie des Indiens, & sur l'ancienneté de cette Astronomie.</i> Par le même..	482
<i>Supplément où l'on fait voir que les Equations aux différences ordinaires, pour lesquelles les conditions d'intégrabilité ne sont pas satisfaites, sont susceptibles d'une véritable intégration, &c.</i> Par M. MONGE.....	502

T A B L E.

<i>Suite de l'Essai pour connoître la Population du Royaume, &c.</i> Par M. ^{re} DU SÉJOUR, le Marquis DE CONDORCET & DE LA PLACE.....	577
<i>Mémoire sur la combinaison du Principe oxygène avec l'Esprit-de-vin, &c.</i> Par M. LAVOISIER.....	593
<i>Essai de comparaison entre les mouvemens des Animaux & ceux des Plantes, &c.</i> Par M. BROUSSONET....	609
<i>Observations sur la cristallisation de l'Huile de Vitriol.</i> Par M. CHAPTAL, de la Société Royale de Montpellier.	622
<i>Extrait des Observations astronomiques & physiques, faites à l'Observatoire royal, en l'année 1785.</i> Par M. le Comte DE CASSINI.....	631

HISTOIRE

HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

Année M. DCCLXXXIV.

SON ALTESSE ROYALE LE PRINCE HENRI
DE PRUSSE, qui voyageoit en France, sous le nom
du *comte d'Oëls*, ayant fait à l'Académie l'honneur d'assister
à sa séance du 4 septembre 1784, le Secrétaire a lu le
discours suivant :

MESSIEURS,

Ce jour glorieux pour nous, semble retracer à nos yeux
les temps à jamais célèbres où les héros d'Athènes ne
dédaignoient pas de venir au retour de leurs victoires,

Hist. 1784.

A

2 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

entendre dans les écoles la voix d'Anaxagore & de Socrate, où ces Césars, si grands dans le sénat, si terribles à la tête des légions, déposant des lauriers cueillis sur les bords de l'Euphrate & du Rhin, se plaisoient à discuter les principes de la philosophie avec Apollonius, avec Pline, avec Maxime, ou à rechercher le peu qu'il étoit alors donné aux hommes de connoître sur les loix de la nature & sur les phénomènes de l'Univers.

Mais ces temps, qui furent ceux de la gloire & du bonheur des nations gouvernées par ces grands hommes, ne forment dans l'histoire qu'un petit nombre de jours fereins, qui ont brillé de loin en loin au milieu d'une longue suite de siècles condamnés à l'erreur & à la misère. Périclès vivoit encore quand les Athéniens chassèrent de leur ville Anaxagore, convaincu d'avoir osé dire, le premier, que le soleil étoit un globe de feu, & qu'une Intelligence avoit présidé à la formation du monde. Bientôt après, dociles à la voix d'un vil farceur, ils condamnèrent Socrate à la mort. Chez les Romains à peine un empereur vertueux a-t-il fermé les yeux, qu'un indigne successeur s'empressant d'étouffer les dernières lueurs de la raison, livre l'empire à la tyrannie de l'ignorance & de la superstition.

C'est qu'alors les lumières étoient le partage de quelques hommes privilégiés, choisis dans un seul peuple. Aujourd'hui, elles ont pénétré dans toutes les classes de la société, elles se sont répandues chez toutes les nations. Chaque peuple exposé à la censure de tous les autres, & contenu par l'opinion commune de l'Europe, ne peut plus ni se livrer à ces excès honteux, ni éteindre un flambeau que ses voisins auroient bientôt ralumé. Nous ne reverrons plus ces jours où Gerbert & Roger Bacon étoient regardés comme des magiciens, parce qu'ils avoient entrevu quelques demi-vérités; où Galilée couvert de gloire & d'années, condamné par des moines à une prison perpétuelle, étoit contraint d'abjurer les vérités qu'il avoit

découvertes ; où l'indigence obligeoit Képler à faire des horoscopes ; où Descartes achetant par un exil volontaire le droit d'instruire les hommes , trouvoit encore des Voëtius , même dans le pays de la liberté ; où le spectacle des maux causés par l'intolérance , forçoit Huyghens & Roëmer à fuir de la patrie qu'ils avoient adoptée.

Aujourd'hui les lettres , les sciences & la philosophie , long-temps séparées , quelquefois ennemies , ont acquis en se réunissant un empire sur l'opinion des hommes , que rien ne peut plus leur enlever. Loin de croire , comme autrefois , que les préjugés peuvent être utiles , sinon aux peuples , du moins à ceux qui les gouvernent , on fait maintenant qu'il n'est aucun préjugé qui ne puisse devenir une source de malheurs pour les citoyens , une cause de révolutions ou d'affoiblissement pour les états ; on fait que si les hommes éclairés sont les seuls qui soient dignes de donner des loix à leurs semblables , les hommes instruits sont aussi les seuls qui sachent obéir aux loix.

On commence à savoir que le plus dangereux & peut-être le seul ennemi du genre humain , c'est l'erreur ; qu'elle produit également & ces passions qui troublent l'ordre du monde , & la foiblesse qui rend ces passions dangereuses ; que c'est elle qui inspire à ceux qui commandent des loix contraires à leurs intérêts comme à l'intérêt général , tandis qu'en séduisant les esprits de la multitude , elle oppose à tout changement utile une barrière trop souvent insurmontable.

Les sciences ont acquis une si grande étendue , leurs applications se sont tellement multipliées , la philosophie a su connoître si bien la véritable méthode de chercher la vérité , que tous ceux qui s'occupent du bonheur des hommes , de la grandeur & de la prospérité des empires , ou trouvent à chaque pas l'occasion de faire un usage utile des vérités qu'on doit à la philosophie & aux sciences ; ou sont arrêtés au milieu de leurs travaux par des questions qu'elles seules peuvent résoudre. L'art de la guerre , cet art

¶ HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

où le succès paroît dépendre de l'activité & du coup-d'œil plutôt que des connoissances acquises, où les héros semblent devoir tout à eux seuls & rien à ce qu'on a pu leur enseigner; cet art éprouve lui-même, dans presque toutes ses parties, le besoin de ces sciences paisibles, fondées sur l'expérience ou sur le calcul, & ses progrès qui ont suivi ceux des connoissances humaines en ont fait enfin de nos jours une véritable science. Aussi les plus grands maîtres de cet art, se sont-ils montrés dans ce siècle les plus dignes protecteurs de la philosophie & des lettres, & si cette protection n'avoit pas été une suite nécessaire de l'étendue de leur esprit & de l'élévation de leur caractère, l'intérêt de leur gloire leur eût inspiré la même conduite; car les siècles éclairés peuvent seuls assigner la place qu'ils méritent, & sentir la différence du conquérant qui ne doit ses victoires qu'à la terreur qu'inspire sa férocité, & du héros dont le génie maîtrise les événemens & sait encore diminuer les maux de la guerre.

Mais si ceux qui ont intérêt de craindre le progrès des lumières, n'osent plus supposer qu'elles sont dangereuses, ils ont essayé de rendre du moins odieux les hommes qui cherchent à les répandre. Désespérant d'être désormais assez forts avec le secours de l'ignorance, ils ont voulu soulever les passions en leur faveur; & pour y réussir, ils ont imaginé d'accuser les philosophes, les savans, les gens de lettres, de méconnoître les distinctions établies dans la société & de réserver uniquement leurs hommages aux talens & aux vertus. Ils espéroient avoir trouvé dans cette accusation un secret sûr de susciter aux lumières utiles, des ennemis puissans, implacables & surtout très-nombreux; car la vanité persuade aisément à des particuliers très-obscurs, qu'ils sont aussi dans une de ces classes qui auroient trop à perdre si on vouloit n'estimer dans chaque individu que son mérite réel. Mais en supposant même cette inculpation aussi fondée qu'elle l'est peu, du moins elle ne rendroit pas ceux contre qui elle est dirigée bien coupables, aux yeux des hommes dont

ils doivent ambitionner le plus les bontés & l'estime. Supposons, en effet, qu'ils oublient qu'un héros est sorti du sang de Charlemagne ou de Witikind, & que le rang auguste qu'il occupe ne leur en impose point ; la justice qu'ils rendront à ses qualités personnelles n'en devient-elle pas plus digne de lui ? En sauront-ils moins admirer la réunion si rare d'une activité qui ne laisse, ni perdre un instant, ni échapper une occasion, & d'une sagesse consommée, qui dans la conduite d'une guerre entière n'offre pas même l'apparence de la plus légère faute, aux yeux des juges les plus éclairés & les plus sévères ? Verront-ils avec moins d'étonnement le même génie qui combine avec force pendant la guerre les plans les plus vastes, veiller pendant la paix sur les plus petits détails qui servent à former les instrumens de ses victoires ? Seront-ils moins touchés de cette humanité toujours agissante, toujours occupée d'adoucir ces malheurs, suite trop inévitable de la guerre, & qui dans toute une campagne au milieu des mouvemens les plus importans & dans les positions les plus critiques, n'oublie pas un seul instant qu'il existe dans une ville conquise, un citoyen que l'amitié a confié à ses soins. N'applaudiront-ils pas à un prince ami de la vérité, prompt à se rendre l'appui de ceux qui souffrent pour elle ; regardant les hommes célèbres dans les lettres & dans les sciences comme les objets les plus dignes de sa curiosité ; chérissant la mémoire de ceux qui ne sont plus, & cherchant avec empressement ce qui reste d'eux dans les lieux honorés par leur génie ? Cette simplicité de mœurs, si estimable, même dans un citoyen obscur, ne devient-elle pas la preuve la plus certaine d'un grand caractère, lorsqu'elle se joint à tant de titres & sur-tout à tant de gloire ? Enfin le stoïcisme le plus exagéré, à quelque degré qu'il puisse porter l'oubli des distinctions sociales, pourra-t-il s'empêcher de respecter, dans un héros, le frère & l'ami d'un grand homme ?

Mais je sens, Messieurs, combien mon foible organe est

6 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

au-deffous de vos sentimens , & combien je dois vous faire regretter la perte d'un favant illustre , en qui l'Académie auroit trouvé aujourd'hui un digne interprète. Comblé des bontés du Prince qui nous fait l'honneur d'assister à cette séance , honoré de sa familiarité , il lui eût fait entendre les accens d'une voix qui lui étoit connue : sans doute il a manqué au bonheur de M. d'Alembert de n'avoir pas assez vécu pour recevoir , dans cette Académie , le frère de son premier bienfaiteur , & nous osons croire qu'il manque aussi quelque chose à la satisfaction du Prince , lorsque ses yeux cherchent en vain le philosophe qu'il avoit jugé digne de son amitié , & dont il ne reste plus parmi nous que le souvenir de ses vertus & les monumens de son génie.

M. LAVOISIER a lû ensuite un Mémoire sur la combustion de l'esprit-de-vin , dans lequel il prouve qu'une livre de cette liqueur produit , en brûlant , dix-neuf onces d'eau.

M. TENON , un Mémoire sur l'œuf humain.

M. L'ABBÉ ROCHON , un Mémoire sur la manière de mesurer les hauteurs solsticiales , en employant une lunette de cristal d'Islande.

M. COULOMB , un Mémoire sur la manière d'employer la torsion des fils , à la mesure des forces très-petites.

M. BAILLY a terminé la séance par la lecture du Mémoire suivant.

EXPOSÉ des Expériences qui ont été faites pour l'examen du Magnétisme animal.

Lû par M. BAILLY , en son nom & au nom de M.^{rs} FRANKLIN , LE ROY , DE BORY & LAVOISIER.

MESSIEURS,

Vous savez que des commissaires ont été choisis par le Roi dans la Faculté de Médecine & dans cette Académie

pour examiner le Magnétisme animal, & pour donner leur avis sur son existence & sur son utilité. Nous en avons rendu compte au Roi & devant le public. Sa Majesté a été satisfaite de notre travail, le public & l'Europe vont le juger.

Mais les Académiciens doivent à l'Académie & à leurs confrères un récit détaillé de leur conduite. Cet écrit est destiné à mettre sous vos yeux les vues qui ont dirigé nos recherches, & les résultats que nos travaux ont produits.

Quand je dis nous, Messieurs, j'entends la commission entière; rien n'a été distingué, le travail appartient à tous: également guidés par les intérêts de la vérité, nous avons été toujours unis, toujours unanimes. Le compte qui va vous être rendu ici est un hommage particulier de vos confrères, mais il ne renferme rien qui ne soit le résultat du travail commun des membres des deux compagnies.

Il y a déjà plus de six ans que le Magnétisme animal a été annoncé à l'Europe, sur-tout en France & dans cette capitale; mais ce n'est que depuis deux ans environ qu'il a intéressé particulièrement un assez grand nombre de citoyens, & qu'il est devenu l'objet de l'entretien public. Jamais une question plus extraordinaire n'avoit partagé les esprits dans une nation éclairée. On proposoit un moyen sûr & puissant d'agir sur les corps animés, un remède nouveau, un agent universel pour guérir & prévenir les maladies. Cet art étoit un mystère; les physiciens en ignoroient les procédés, & ils n'entendoient parler que de ses prodiges. On citoit peu de cures réelles, mais beaucoup de personnes se disoient soulagées, & le remède plaisoit assez pour soutenir l'espérance des malades. Depuis quelque temps le secret a été communiqué. Alors on a vu des personnes instruites, éclairées, distinguées même par leurs talents, adopter la théorie & la pratique nouvelle qu'on leur enseignoit; on a vu un nombre de médecins & de chirurgiens admis à l'école du Magnétisme, en devenir les partisans, en défendre la théorie, en suivre la pratique. Ces témoignages rendus au Magné-

tisme devoient donner à penser aux meilleurs esprits, & faire suspendre le jugement des savans. C'est dans ces circonstances que les commissaires ont été nommés par le Roi; l'examen qu'il a ordonné est un fruit de la sagesse de son administration. C'étoit un scandale pour l'Europe de voir un peuple éclairé par toutes les sciences & par tous les arts, un peuple chez qui la philosophie a fait les plus grands progrès, oublier la leçon de Descartes qui en est le restaurateur, & renfermer dans son sein deux partis opposés, qui unissoient leurs vues & leurs pensées sur le même objet, mais qui se divisoient & se combattoient; l'un en annonçant le Magnétisme comme une découverte utile & sublime, l'autre en le regardant comme une illusion à la fois dangereuse & ridicule. La décision étoit importante & indispensable; il falloit éclairer ceux qui doutoient, il falloit établir une base sur laquelle pussent venir se reposer ou l'incrédulité ou la confiance. On ne doit pas être indifférent sur le règne mal fondé des fausses opinions: les sciences qui s'accroissent par les vérités, gagnent encore à la suppression d'une erreur; une erreur est toujours un mauvais levain qui fermente & qui corrompt à la longue la masse où elle est introduite. Mais lorsque cette erreur sort de l'empire des sciences pour se répandre dans la multitude, pour partager & agiter les esprits, lorsqu'elle présente un moyen trompeur de guérir à des malades qu'elle empêche de chercher d'autres secours, lorsque sur-tout elle influe à la fois sur le moral & le physique, un bon gouvernement est intéressé à la détruire. C'est un bel emploi de l'autorité que celui de distribuer la lumière! Les commissaires se sont empressés d'entrer dans les vues de l'Administration & de répondre à l'honneur de son choix.

Transportés au traitement public du Magnétisme, ils ont d'abord été frappés d'une opposition très-remarquable entre la nature des effets produits & l'insuffisance apparente des moyens employés. D'une part, ce sont des convulsions violentes, longues & multipliées; de l'autre, de simples
attouchemens,

attouchemens , des gestes & des signes : & cependant le traitement public fait reconnoître une grande puissance mise en action par ces moyens , tout foibles qu'ils sont. Un pareil spectacle semble nous transporter au temps & au règne de la féerie : cet empire exercé sur un nombre d'individus , l'homme qui en dispose , la baguette qui lui sert d'instrument , tout ressemble en effet aux enchantemens de nos fables ; ce sont leurs récits mis en action. Mais si ce spectacle étonne , il ne doit pas subjuguier. S'il a pu surprendre la foi d'un nombre de spectateurs conduits par une curiosité plus ou moins attentive , s'il a séduit sur-tout les malades toujours prêts à se tromper eux-mêmes , il n'a pu produire cet effet sur des hommes choisis pour un examen sérieux. Leur premier devoir étoit d'être en garde contre l'illusion ; ils se sont mutuellement surveillés , ils ont observé en silence ; & restés de sang-froid au milieu de l'enthousiasme , ils ont pu écouter leur raison & chercher la lumière.

Nous avons d'abord demandé par quels ressorts étoient produits tant d'effets surprenans , & quelles étoient les raisons qui les faisoient attribuer à un fluide inconnu & nouveau , à un fluide qui appartient à l'homme & qui agit sur l'homme. Plus cette découverte étoit grande & extraordinaire , plus on devoit être difficile sur le choix des preuves. Ensuite , procédant en physiciens , nous avons cherché à reconnoître la présence du fluide ; mais ce fluide échappe à tous les sens. On nous a déclaré que son action sur les corps animés étoit la seule preuve que l'on pût administrer de son existence. Vous avez vu , Messieurs , dans notre rapport , les raisons solides , qui parmi les effets prétendus de cette action , nous ont fait rejeter absolument la cure des maladies. La nature agit en même-temps que le remède ; on ne sait si le soulagement appartient au remède ou à la nature : la nature guérit quelquefois sans remède ; comment se convaincre de l'existence d'un remède invisible , par des guérisons que la nature peut opérer sans lui ? Nous avons donc été forcés de nous borner à observer l'action physique

du fluide opérant sur l'économie animale, des changements momentanés; mais alors, Messieurs, nous sommes entrés dans un dédale de difficultés. Si les premières causes de la nature sont simples, les derniers résultats sont le produit d'une vaste complication. L'homme ne fait pas un mouvement qui ne puisse être dû à une infinité de causes; être moral & physique, ses affections, les maux, les mouvements dépendent autant de la pensée que de l'irritabilité de ses organes. Les expériences que nous avons faites sur nous-mêmes, nous ont fait reconnoître que lorsqu'on détourne son attention, il n'y a plus aucun effet. Les épreuves faites sur les malades nous ont appris que l'enfance, qui n'est pas susceptible de prévention, n'éprouve rien, que l'aliénation d'esprit s'oppose à l'action du Magnétisme, même dans un état habituel de convulsions & de mobilité de nerfs où cette action devoit être le plus sensible. Dans un nombre de malades, si les uns ressentent des effets légers & équivoques, les autres ne sentent rien, & nous avons dû en être surpris. Le Magnétisme n'est-il pas annoncé comme un fluide universel, comme le principe de la vie, & le grand ressort de la nature? Qu'est-ce qu'un agent qui n'agit pas toujours dans des circonstances semblables? L'absence de son action dans certains cas, n'indique-t-elle pas que dans les autres l'action qu'on lui attribue appartient à d'autres causes? Il a manqué son effet quand nous l'avons employé pour porter de la chaleur aux pieds; il a manqué son effet quand nous l'avons interrogé comme capable d'indiquer les maux. On a essayé différentes méthodes de magnétiser, en observant, en négligeant la distinction des pôles; elles ont eu les mêmes effets. Les pôles sont donc une chimère qui n'a d'autre objet que d'assimiler le nouveau Magnétisme au véritable Magnétisme qui est un des phénomènes de la nature. C'est ainsi, qu'en avançant dans notre examen, nous voyions disparaître l'une après l'autre les propriétés attribuées à ce prétendu fluide, & que l'édifice entier posé sur une base idéale s'écrouloit devant nous.

Forcés de renoncer aux preuves physiques, nous avons été obligés de chercher les causes des effets réels dans les circonstances morales. Nous avons, dans la suite de nos opérations, cessé d'être physiciens pour n'être plus que philosophes; & nous avons soumis à l'examen les affections de l'esprit & les idées des individus exposés à l'action du Magnétisme. Alors, en opérant sur des sujets qui avoient les yeux bandés, nous avons vu d'une manière évidente, cette action naître des idées que nous excitions, & les effets suivre la même marche que nos questions. En ne magnétisant pas, les effets étoient les mêmes, & répondoient de même à nos questions.

A ces effets variés & indépendans du Magnétisme, nous avons dû reconnoître l'influence de l'imagination; mais dans l'examen moral où nous conduisoit la nature de la question, nous avons suivi, autant qu'il a été possible, la marche certaine & méthodique des sciences: observant en philosophes, nous avons encore emprunté les procédés de la physique. Nous avons opéré, comme on fait en chimie, où, après avoir décomposé les substances, découvert leurs principes, on s'assure de l'exactitude de l'analyse, en recomposant les mêmes substances à l'aide de ces principes réunis. Nous avons dit: les effets qu'on attribue au Magnétisme, & à un fluide que rien ne manifeste, n'ont lieu que lorsque l'imagination est avertie & peut être frappée; l'imagination semble donc en être le principe. Il faut voir si on reproduira ces effets par le pouvoir de l'imagination seule; nous l'avons tenté, & nous avons pleinement réussi. Sans toucher & sans employer aucun signe, les sujets qui ont cru être magnétisés ont senti de la douleur, de la chaleur & une chaleur très-grande. Sur des sujets doués de nerfs plus mobiles, nous avons produit des convulsions & ce qu'on appelle des *crises*. Nous avons vu l'imagination assez exaltée, devenue assez puissante pour faire perdre en un instant la parole. Nous avons en même-temps prouvé la nullité du Magnétisme, en le mettant en

opposition avec l'imagination. Le Magnétisme seul, employé pendant trente minutes, n'a rien produit; & aussi-tôt l'imagination mise en action a produit sur la même personne, avec les mêmes moyens, dans des circonstances absolument semblables, une convulsion très-forte & très-bien caractérisée. Enfin, pour compléter la démonstration, pour achever le tableau des effets de l'imagination, également capable d'agiter & de calmer, nous avons fait cesser la convulsion par le même charme qui l'avoit produite, par le pouvoir de l'imagination.

Si nous n'avons pas fait d'expériences sur les animaux que l'on regarde comme privés de l'imagination, c'est que les expériences auroient été plus difficiles & plus délicates, sans être plus concluantes. D'abord, la cure des maladies des animaux ne prouve pas davantage que la cure des maladies des hommes; & quand nous nous bornerons à agir sur les animaux momentanément, comment connoîtrons-nous ce qu'ils éprouvent? Ne pouvant les interroger, leurs mouvemens ne peuvent être qu'équivoques. D'ailleurs, une grande raison pour rejeter cette espèce de preuves, est qu'on annonce un fluide universel, un fluide agissant sur l'homme, & propre à guérir ses maux. Il seroit singulier qu'on en vantât les bons effets sur l'espèce humaine, & qu'on ne pût les rendre sensibles que sur l'espèce animale: c'est donc sur l'homme que nous avons dû éprouver le Magnétisme, & nos expériences ne nous ont fait découvrir que le pouvoir de l'imagination. Nous avons procédé par des preuves négatives, & cette marche étoit déterminée par la nature des choses. Une opinion est attaquée & défendue par des moyens contraires: un agent réel doit être démontré par des preuves positives, tandis qu'un agent chimérique ne peut être exclu que par le manque d'effets & par la démonstration de sa nullité.

La suite d'expériences que nous avons faites nous a donc permis de conclure & d'établir que rien ne prouve l'existence du fluide magnétique animal. La saine physique ne

permet pas de recourir à un fluide inconnu & insensible , pour expliquer des effets qui peuvent tous être produits par l'imagination , ou seule , ou combinée avec l'attouchement & l'imitation.

Telles sont les causes des effets attribués au Magnétisme , tel est le résultat de notre travail ; mais les phénomènes observés permettent encore quelques résultats que nous allons proposer. Ces résultats concernent l'imitation & l'imagination , deux de nos plus étonnantes facultés : ce sont des faits pour une science encore neuve , celle de l'influence du moral sur le physique ; & nous demandons qu'il nous soit permis d'entrer à cet égard dans quelques détails préliminaires & purement philosophiques.

L'homme moral , comme l'homme physique , n'existe & ne devient tel qu'il est que par ces deux facultés : il se forme , il se perfectionne par l'imitation ; il agit , il devient puissant par l'imagination. L'imitation est donc le premier moyen de sa perfectibilité ; elle le modifie depuis la naissance jusqu'à la mort. Sans l'imitation , les progrès d'un individu seroient perdus pour tous les autres : c'est par elle que dans la société polie & habituelle les caractères s'effacent , & que tous les individus ont la même physionomie ; c'est par elle que les enfans apprennent nos usages , nos conventions , se plient à nos habitudes , s'instruisent de la langue. La prononciation adoucie par un long usage , est un effet de la même cause. Cette imitation agit également sur les esprits ; elle n'introduit pas les vérités nouvelles , mais elle conserve les idées reçues ; elle forme & constitue l'esprit national ; & comme le plus souvent elle fait croire sans examen , c'est sur son pouvoir irrésistible que sont fondés les préjugés qui ont une durée si longue & une résistance si puissante.

Avec cette faculté , tout resteroit au même terme , tout seroit communiqué ; mais le niveau des connoissances & des institutions ne s'élèveroit jamais. L'imagination est la faculté progressive ; c'est par elle que les hommes ont par-

couru les différens états de la société perfectionnée : faculté éminemment active, auteur des biens & des maux, tout est devant elle, l'avenir comme le présent, les mondes de l'univers comme le point où nous sommes. Elle agrandit tout ce qu'elle touche, elle va sans cesse exagérant, & cette exagération fait sa force. C'est par cette force qu'elle déploie les ressources morales & qu'elle multiplie les forces physiques : à sa voix la nature obéit & se développe toute entière. Aussi quand l'imagination parle à la multitude, la multitude ne connoît plus de dangers ni d'obstacles ; un seul homme commande, & les autres ne sont que des instrumens. Les nations sont ce que veulent les souverains, les armées ce que sont leurs généraux ; & c'est une vérité connue depuis Alexandre jusqu'à FRÉDÉRIC & SON ILLUSTRE FRÈRE.

L'imitation, telle que nous venons de la peindre, Messieurs, semble avoir une marche lente & graduée, elle ne s'établit que par des leçons répétées ; mais si dans la société elle a des progrès insensibles, dans le traitement du Magnétisme elle se manifeste par des phénomènes frappans. Les crises y sont d'autant plus multipliées qu'elles sont plus violentes ; elles commencent toutes à-peu-près dans le même-temps, il semble que ce soit une étincelle qui allume un incendie. Cette facilité de communication est très-remarquable. Nous savions que l'homme, machinal dans un grand nombre de ses mouvemens, se plie à la longue à répéter ce qu'il voit & ce qu'il entend ; mais les convulsions du Magnétisme nous montrent que le même effet a lieu instantanément, en grand, & de manière qu'un nombre d'individus convenablement disposés, sont des instrumens montés à l'unisson, & dont un seul fait mouvoir tous les autres.

Quant à l'imagination, on connoît les dérangemens qu'une impression vive & subite a souvent occasionnés dans la machine de l'homme. L'imagination renouvelle ou suspend les fonctions animales ; elle ranime par l'espérance,

ou elle glace par la terreur. Dans une nuit elle fait blanchir les cheveux, dans un instant elle rend ou l'usage des jambes ou la parole; elle détruit ou elle développe le germe des maux, elle donne même la mort. Mais ces effets surprenans appartiennent à des révolutions inopinées; c'est le concours des circonstances qui les amène, & le hasard qui semble les produire; ils ne paroissent point dépendre de la puissance & de la volonté de l'homme. Ce que nous avons appris, ou du moins ce qui nous a été confirmé d'une manière démonstrative & évidente, par l'examen des procédés du Magnétisme, c'est que l'homme peut agir sur l'homme, à tous momens & presque à sa volonté, en frappant son imagination; c'est que les gestes & les signes les plus simples peuvent avoir les plus puissans effets; c'est que l'action que l'homme a sur l'imagination peut être réduite en art, & conduite par une méthode, sur des sujets qui ont la foi. On parle du Magnétisme d'intention, sans doute l'intention peut suffire, pourvu qu'elle soit réciproque; elle établit entre deux individus une relation & une dépendance nécessaires. L'intention que je dirige, c'est mon imagination qui commande; l'intention qui me répond, c'est l'imagination qui s'exalte & qui obéit. La recherche d'un agent qui n'existe pas, sert donc à faire connoître une puissance réelle de l'homme. L'homme a le pouvoir d'agir sur son semblable, d'ébranler le système de ses nerfs, & de lui imprimer des convulsions; mais cette action ne peut être regardée comme physique: nous ne voyons pas qu'elle dépende d'un fluide communiqué; elle est entièrement morale, c'est celle de l'imagination sur l'imagination. Action presque toujours dangereuse, que l'on peut observer en philosophe, & qu'il n'est bon de connoître que pour en prévenir les effets.

Le Magnétisme n'aura pas été tout-à-fait inutile à la philosophie qui le condamne; c'est un fait de plus à consigner dans l'histoire des erreurs de l'esprit humain, & une grande expérience sur le pouvoir de l'imagination.





O U V R A G E S

P R É S E N T É S À L' A C A D É M I E.

P R I X.

L'ACADÉMIE avoit proposé, pour sujet d'un Prix qui devoit être donné en 1782, la question suivante :

1.^o Déterminer par des caractères constans, faciles à saisir même par ceux qui n'ont pas fait une étude particulière de la botanique, les différences qui existent entre les divers cotonniers d'Asie, d'Afrique, & d'Amérique.

2.^o Indiquer l'état naturel du coton dans la coque après la maturité, son adhérence à la graine, la manière dont les brins enveloppent les graines, afin d'en déduire le meilleur procédé pour les en séparer dans leur plus grande longueur.

3.^o Établir, d'après des épreuves suffisantes, les rapports des degrés de finesse, de blancheur, de longueur & de ténacité qui sont propres aux brins de chaque espèce de cotonnier, ainsi que le rapport de ces qualités avec la perfection des filatures.

Ce Prix a été remis en 1784, & décerné à une pièce ayant pour devise, *Deus bone*, dont l'auteur est M. Quatremère.

LES

LES Mémoires approuvés par l'Académie, destinés pour le volume des Savans-Étrangers, sont au nombre de vingt-cinq.

Essai sur la construction des tables de logarithmes : par M. Callet.

Mémoire sur plusieurs pièces de canon, forgées en Espagne : par M. de Norbek , depuis correspondant de l'Académie.

Sur la fonte des minéraux de plomb.

Sur la fonte des scories provenant de celle des minéraux de plomb, où l'on détaille la manière de retirer l'argent & l'or des cendres des Monnoies & des Orfèvres.

Observations sur le traitement des minerais de fer à la fonte.

Ces trois Mémoires sont de M. Duhamel, depuis membre de l'Académie.

Sur les difficultés que présente la préparation des alkalis fixes caustiques secs, & sur les propriétés peu connues de ces sels bien purs.

Sur la nécessité d'employer l'alkali volatil, en état de gaz, dans les expériences délicates de la chimie; & sur quelques propriétés nouvelles du gaz alkalin.

Sur la décoloration du bleu de Prusse, par la chaux, la magnésie, &c.

Observation sur la dissolution lente du régule d'antimoine, par l'acide marin.

Observation sur un précipité rose mercuriel, produit par le lait, la lymphe, &c.

Remarques sur la différence du foie d'arsenic & du sel neutre arsenical, & sur la cause de cette différence.

Hist. 1784.

C

18. HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

Mémoire sur les propriétés du sel neutre, résultant de la combinaison de l'acide crayeux avec le fer.

Description d'un feld-spath cristallisé, que l'on trouve mêlé avec le cristal de roche & le mica dans les environs d'Alençon.

Observations sur une singulière cristallisation du sel neutre arsenical; avec quelques remarques sur la nature de ce sel.

Mémoire sur les phénomènes que présente l'alkali fixe végétal caustique, trituré à froid avec le soufre & quelques préparations antimoniales.

Recherches chimiques sur le kermès minéral.

Ces onze Mémoires sont de M. de Fourcroy, depuis membre de l'Académie.

Résultat d'une expérience faite sur la résistance d'un massif de bois de chêne imbibé d'eau, contre les progrès de l'inflammation excitée par les matières incendiaires, &c : par M. Darçon.

Observations astronomiques faites à Bagdad : par M. de Beauchamp, vicaire général de Babylone, depuis correspondant de l'Académie.

Mémoire sur la manière d'échauffer les maisons des pays-froids, &c : par M. le Maréchal-Duc de Croy.

Sur la montagne des Chalanches près d'Allemont en Dauphiné : par M. Schreiber, directeur des Mines de Monsieur.

Sur les semences des champignons : par M. de Beauvois, correspondant de l'Académie.

Sur les nombres : par M. l'Abbé Genti, depuis correspondant de l'Académie.

Observation sur les plantes de mer : par M. Vastel.

Mémoires & observations sur quelques procédés peu connus, mais utilement employés à des constructions maritimes d'exécution difficile : par M. de Fourcroy, maréchal-de-camp, depuis membre de l'Académie.

Sur le tartre contenu dans le verjus & dans le moult, &c : par M. le Marquis de Bullion.

MACHINE approuvée par l'Académie.

ISTRUMENT propre à tracer toutes sortes de lignes parallèles : par M. Milon, conseiller au Châtelet.

ÉLOGE

DE M. MACQUER.

PIERRE-JOSEPH MACQUER, docteur-régent de la Faculté de médecine de Paris, professeur de chimie au Jardin du Roi, pensionnaire de l'Académie des Sciences, membre de la Société de médecine, de l'Académie de médecine de Madrid, & des Académies de Stockholm, de Turin & de Philadelphie, naquit à Paris le 9 Octobre 1718, de Joseph Macquer & de Marie-Anne Caillet. Il tiroit son origine d'une famille noble d'Écosse, qui avoit sacrifié ses biens & sa patrie à son attachement pour la religion romaine & pour la maison de ses anciens Rois.

Les parens de M. Macquer exigeoient qu'il prît un état, & il choisit celui de médecin, qui contrarioit moins qu'aucun autre son goût naissant pour les sciences physiques. La chimie fut le principal objet de ses travaux, & il fut reçu à l'Académie en 1745, à l'âge de vingt-sept ans. Depuis cette époque, des recherches sur la chimie, des ouvrages élémentaires sur cette science, & des travaux sur les arts qui en dépendent, ont rempli toute l'étendue de sa vie.

Les phénomènes singuliers que présentait l'arsenic avoient attiré l'attention des chimistes dans le temps où presque tous avoient conservé au moins un penchant secret pour les idées chimériques des adeptes. On connoissoit la propriété qu'a cette substance de décomposer le nitre & d'en séparer l'acide, qui, dans cette opération, acquiert une belle couleur bleue; mais personne encore n'avoit songé à examiner

propres à certaines substances,
dissolution avec l'acide nitreux,
tout formés, soit qu'ils doivent
être constituantes à la décompo-
sition qu'on a employé.

de temps après, la première
dissolution. Cette matière colorante
est une combinaison du fer avec une
substance appartenant aux matières charbon-
nées, montrant que l'alkali digéré sur
cette substance, & ne laisse
subsister que ce même alkali ainsi
dissolution de fer, précipite de
la solution. Les chimistes ont regardé cette
dissolution par l'alkali fixe, comme étant
la même qui en est chargée à même
liquide. Mais les progrès de la
chimie ont un grand nombre de faits ;
bien plus pauvre en théories
qu'en tant avoir perdu des théories
qu'en avoir beaucoup gagné. La
même des expositions que
portent, sans presque qu'on
ait vu ces systèmes, & il a fallu

nouvelle langue, que peut-être dans quelques
années il faudra changer encore.

fusibilité & la ductilité de ce métal, celles de ses propriétés, dont les chimistes s'étoient jusqu'alors le moins occupés. Ils parvinrent à la fondre au miroir ardent d'une manière imparfaite. Quelques morceaux arrondis par la fusion, parurent avoir une véritable ductilité; & ce fait important consigné dans nos Mémoires, a soutenu l'espérance des chimistes qui, depuis, ont trouvé des moyens de forger & de travailler cette substance singulière, également intéressante, & par les faits nouveaux qu'elle présente dans la chimie des métaux, & par l'utilité dont elle deviendra un jour dans les arts.

Un voile épais en couvre encore l'origine & l'histoire; & malgré l'abondance de ce métal, le préjugé en refuse à ceux qui veulent l'étudier & dont heureusement ces obstacles n'ont fait qu'exciter le zèle. On avoit cru d'abord que la platine qui peut se mêler avec l'or, s'y unissoit si intimement, qu'il étoit impossible de reconnoître le mélange & de la séparer d'avec l'or. Sans doute cet inconvénient auroit encore été un motif bien foible pour condamner à une éternelle inutilité une substance que la nature a prodiguée, & qu'à bien des égards il seroit difficile de remplacer; mais cet inconvénient n'existe même plus depuis quarante ans. Cependant l'opinion de ceux qui possèdent la platine est restée la même; exemple moins rare qu'on ne croit, & de la lenteur avec laquelle les vérités s'établissent, & de cette fatalité singulière qui fait regarder l'opinion la moins fondée, comme suffisante pour donner le droit de ravir aux hommes quelque portion de leur liberté, tandis qu'on exige que l'inutilité d'une prohibition soit rigoureusement prouvée, & souvent le soit depuis long-temps, pour se croire autorisé à la faire cesser. Il semble que chez tous les peuples & dans tous les temps, on ait regardé l'esclavage comme le véritable état de l'homme, & la liberté comme un état forcé, & pour ainsi dire contre nature.

Vers 1750, M. Macquer fut chargé, par la Cour, d'une commission particulière. Il existoit alors en Bretagne, un

Homme, le Comte de la Garaie, qui, entraîné par une véritable passion à l'exercice de la bienfaisance, s'étoit dévoué depuis quarante ans, au service de l'humanité souffrante. Il avoit bâti un hôpital à côté d'un laboratoire de chimie; il soignoit, il traitoit lui-même les malades auxquels il administroit les remèdes préparés dans son laboratoire, remèdes qu'il avoit ou que du moins il croyoit avoir inventés. Son premier ouvrage étoit fondé sur l'idée chimérique d'extraire des mixtes, par le moyen de l'eau, toutes leurs parties actives; & on devoit à cet ouvrage quelques préparations utiles, nouvelles ou peu connues.

D'autres idées du même genre avoient frappé depuis le Comte de la Garaie; & il vouloit vendre au Gouvernement ses nouveaux remèdes, comme il lui avoit vendu les premiers secrets, c'est-à-dire, toujours au profit de son hôpital. Il est singulier, peut-être, qu'un homme si bienfaisant fit un secret de ses découvertes, & qu'il ne s'empresât point de les consacrer gratuitement à l'utilité commune; mais puisque ceux qui sollicitent des grâces oublient si facilement que c'est aux dépens du sang du peuple qu'ils cherchent à satisfaire leur avarice ou leur ambition, pourroit-on ne point pardonner un pareil oubli à celui qui ne demande que pour les malheureux?

M. Macquer fut chargé d'examiner ces remèdes. Le projet du Comte de la Garaie étoit alors d'extraire les parties salubres des minéraux par une longue macération avec des sels neutres. Il avoit entr'autres préparé une teinture mercurielle par des procédés qui duroient plusieurs mois; mais cette teinture n'étoit qu'une dissolution de sublimé corrosif dans l'esprit-de-vin. Telle est en général l'histoire de ces secrets si vantés, tantôt chimériques, tantôt connus de tout le monde, excepté de ceux qui les achettent.

M. Macquer se trouva placé à une époque où la chimie commençoit à se délivrer des rêves des alchimistes dont les ouvrages des restaurateurs de cette science sont encore infectés; mais la clarté, la méthode étoient un mérite

inconnu dans les livres de qui en traitoient, & sur-tout en France, un reste de cartésianisme ajoutoit à l'obscurité de la science, en la surchargeant de prétendues explications mécaniques.

M. Macquer est le premier qui ait donné des élémens de chimie où l'on trouve la même clarté, la même méthode, qui règnoient déjà dans les autres branches de la physique. Avant lui, on regardoit la chimie comme une science isolée, embarrassée, obscure, remplie d'opérations secrètes, de recettes énigmatiques presque comme une occupation dangereuse où l'on risquoit de compromettre sa santé, sa fortune, & même sa raison : elle parut dans les ouvrages de M. Macquer, une science simple, fondée sur les faits, procédant par des opérations dont une sage méthode prescrivait tous les détails, utile à tous les besoins de la vie humaine & liée au système général de nos connoissances. Ainsi, ses élémens contribuèrent à répandre le goût de la chimie, en montrant combien il étoit facile de l'apprendre ; tandis qu'un autre chimiste son contemporain, & autrefois son maître, en inspiroit l'enthousiasme par une marche plus hardie & des idées plus vastes & plus imposantes.

M. Macquer fit, pendant plusieurs années, des cours, conjointement avec M. Baumé. Il avoit préféré, dans ces cours, l'ordre qui lui avoit paru exiger de ceux qui les suivoient moins de connoissances préliminaires en chimie ; il décrivait les expériences, exposoit les faits avec clarté, avec précision, y ajoutoit les explications les plus plausibles, les plus généralement adoptées, mais avec le ton d'un homme qui doute encore & qui veut seulement payer un léger tribut au besoin si naturel aux hommes, & sur-tout aux jeunes gens, de croire quelque chose. L'incertitude où une suite de simples faits auroit laissé ses disciples, leur eût paru trop pénible ; il les consolait donc par quelques explications, mais il ne les trompoit point sur le prix qu'ils devoient y attacher. Il avoit l'art de choisir les parties de la chimie où les faits étoient le plus certains, où

où les objets avoient été le plus discutés & le mieux éclaircis; enfin son but sembloit être principalement d'inspirer quelque confiance dans les vérités chimiques aux esprits d'une justesse sévère, & qui se piquent d'être difficiles en preuves. Il se concilioit ainsi l'estime & la confiance de ses disciples plus qu'il n'attiroit leur admiration; ils n'étoient point frappés de la fécondité de ses vues, mais ils sentoient qu'ils avoient en lui un guide sûr, qui ne les égareroit jamais. C'est avec un plaisir mêlé de douleur que je m'arrête sur ces détails. Je dois à M. Macquer mes premières connoissances en chimie; & en parlant ici de ses talens comme démonstrateur, c'est un devoir de reconnoissance dont je m'acquitte envers sa mémoire.

M. Macquer jugea qu'un dictionnaire de chimie étoit nécessaire pour assurer les heureux effets que ses livres élémentaires & ses cours avoient déjà produits. Cette manière de traiter les sciences appartient presque à notre siècle, & c'est un des services qu'il aura rendus à l'esprit humain. Aucune espèce de livres n'est plus propre à montrer à chaque époque le point où les sciences sont parvenues, à en faire connoître tous les détails, à en perfectionner la langue. Le public attendoit cet ouvrage de M. Macquer; son esprit naturellement juste & méthodique, son impartialité bien connue, son aversion pour les systèmes, la sagesse qu'il savoit mettre dans ses vues & dans ses jugemens, l'indiquoient comme le chimiste auquel on devoit désirer que cet important travail fût confié. L'exécution & le succès répondirent à cette attente. Il avoit pris la méthode la plus sûre pour faire un bon dictionnaire: celle de composer une espèce de cours de chimie complet & méthodique, dont les grands articles de son dictionnaire sont en quelque sorte les principaux chapitres, & peuvent être lûs suivant leur ordre naturel qu'il a indiqué dans une table particulière.

M. Macquer donna la seconde édition de son dictionnaire dans un moment où de nouvelles difficultés auroient pu

refroidir son zèle. C'étoit précisément celui où la connoissance d'un grand nombre de substances aériformes, jusqu'alors négligées dans les analyses, avoit produit dans toutes les parties de la chimie une révolution, & presque un bouleversement général; où toutes les théories devenoient incertaines, & toutes les expériences incomplètes. M. Macquer sut éviter à la fois les deux inconvéniens qui étoient le plus à craindre, celui de se refuser à des idées nouvelles qui l'obligeoient de revenir sur des opinions qu'il avoit long-temps adoptées, & celui de trop sacrifier à ces nouvelles idées, & de négliger les autres parties de la science. Il exposa les faits nouvellement découverts, en discuta les circonstances & les résultats, & garda un juste milieu entre un attachement servile aux opinions anciennes & l'enthousiasme des nouveautés.

Il est impossible d'être chimiste sans avoir la curiosité d'étudier les travaux des arts qui ne sont que des opérations chimiques faites en grand, d'après les règles fondées sur une expérience en général grossière & peu précise, mais qui présentent beaucoup de phénomènes instructifs, & où, parmi un grand nombre de procédés inutiles & bizarres, il s'en trouve d'autres qu'on seroit d'abord tenté de condamner, & dont un examen plus approfondi fait connoître les raisons & l'utilité.

M. Hellot, qui étoit commissaire du Conseil pour les teintures, & chimiste de la manufacture de porcelaine, desira d'avoir M. Macquer pour adjoint; & ce desir fait d'autant plus d'honneur à M. Hellot, qu'il savoit très-bien que la réputation de M. Macquer, en chimie, surpassoit la sienne, & qu'il est rare de se choisir pour successeurs ou pour adjoints, des hommes par lesquels on puisse craindre d'être éclipsé; mais il ne l'est pas moins de mériter, comme M. Macquer, qu'une conduite si noble ne puisse être regardée comme imprudente.

L'art de la teinture dépend de la chimie, & d'une chimie très-délicate & très-compiquée. M. Macquer voulut

d'abord traiter cette partie de la science comme il avoit traité toutes les autres, c'est-à-dire, en donner les élémens, les principes, en dissiper les ténèbres. Il regardoit ce préliminaire comme aussi essentiel aux véritables progrès des arts qu'à ceux des sciences, & une grande partie de son art de la teinture en soie, publié dans la collection de l'Académie, est consacrée à l'exposition de ces principes élémentaires. Il y joignit dans nos Mémoires, des procédés pour employer le bleu de Prusse comme teinture, & pour donner à la soie teinte avec la cochenille, la même nuance & le même brillant que cette substance colorante fait prendre à la laine; ces procédés sont le fruit d'observations chimiques très-fines, & ce qui est rare dans les opérations des arts, on y est guidé par une méthode sûre.

M. Macquer n'a rien publié sur l'art de la porcelaine, & on doit le regretter. Cette poterie, utile à la Chine & au Japon, pays dans lesquels elle est d'un usage commun, n'est encore, parmi nous, qu'un objet de luxe, & par conséquent une bagatelle inutile. L'art de la porcelaine étoit le secret de quelques manufactures au commencement de ce siècle; mais elles se sont répandues depuis chez presque toutes les nations; elles se sont multipliées, & pour nous procurer la jouissance d'un objet qui, sans être d'une nécessité réelle, pourroit devenir d'une véritable utilité, il ne faudroit aujourd'hui que rendre la liberté à ce genre d'industrie, & lever le voile, bien transparent à la vérité, sous lequel quelques parties de cet art sont encore cachées. Heureusement l'on commence à convenir presque généralement que les secrets dans les arts ne peuvent que produire le double effet, d'en restreindre l'usage & d'en arrêter les progrès.

L'esprit qu'on remarque dans les ouvrages de M. Macquer, est le même qui dirigea sa conduite. Tout en lui étoit d'accord: cette justesse d'esprit, cette modération dans ses jugemens, cette réserve dans ses assertions, étoient la source de la modestie, de la tranquillité, de la douceur qu'il

montra constamment dans toutes les circonstances de sa vie. Il étoit sensible aux critiques; mais il ne connoissoit ni l'aigreur, ni l'emportement de l'amour-propre blessé. S'il ne faisoit pas valoir avec enthousiasme ce qui lui paroïssoit utile & bon, du moins il approuvoit toujours avec plaisir. C'étoit malgré lui, & lorsqu'il y étoit contraint par la justice, qu'il se déterminoit à porter un jugement sévère. Il voyoit le bien, il l'aimoit, mais quelquefois cédoit trop facilement aux obstacles, croyoit trop promptement à l'impossibilité du succès, & se consolait trop tôt par l'idée qu'il est impossible d'empêcher le bien s'il est une fois connu, & qu'il ne faut que savoir attendre.

Quoiqu'il eût peu pratiqué la médecine, la Société Royale le choisit pour un de ses premiers membres; & son amour pour le bien public lui fit un devoir de s'intéresser à un établissement si utile. Les réclamations qui s'élevèrent contre cette institution, n'ébranlèrent pas M. Macquer; il y reconnut les mêmes raisonnemens & les mêmes principes que dans le siècle dernier on avoit opposés à l'établissement des compagnies savantes. Son zèle éclairé pour les Sciences & pour l'Académie, étoit encore un des motifs de son attachement à cette société nouvelle; il savoit que c'est sur-tout des progrès de la théorie que doivent s'occuper les compagnies qui, par leur constitution, embrassent toute l'étendue des sciences. C'est dans ces Académies seules que les recherches qui ne sont point d'une application immédiate, qui ne frappent point la curiosité publique, peuvent être appréciées, ou espérer de trouver une récompense. Si, séduites par des vues d'une utilité prochaine, les compagnies savantes se livroient exclusivement à des recherches pratiques, la marche des sciences en seroit retardée aux dépens de cette même utilité à laquelle on les auroit imprudemment sacrifiées.

L'institution d'un corps chargé spécialement de l'application des sciences physiques à l'utilité commune, devoit donc paroître à un esprit aussi juste que celui de M. Macquer,

non-seulement un moyen de perfectionner la médecine , mais un service rendu aux sciences , qui , s'enrichissant tous les jours de vérités & d'applications nouvelles , deviennent d'une immense étendue , & demandent à être partagées pour être mieux cultivées.

M. Macquer avoit passé une grande partie de sa vie avec un frère qui aimoit les Lettres , & à qui l'on doit quelques abrégés chronologiques estimés ; après la mort de ce frère , le seul chagrin violent qu'il ait jamais éprouvé , il ne vécut plus qu'avec sa femme & deux enfans , dont l'éducation étoit son unique délassement & son occupation la plus chérie.

Il aimoit peu le monde , parce qu'il préféroit à tout la tranquillité & l'indépendance ; cependant il étoit doux , facile même dans la société , & on n'eût jamais deviné qu'il ne s'y livrât qu'à regret : l'espèce de contrainte qu'il y éprouvoit n'étoit pas l'embarras que donne l'humeur , c'étoit le besoin de ces sentimens doux auxquels il est si touchant de pouvoir s'abandonner en liberté , & qui rendent , pour ceux qui les connoissent , tout autre plaisir insipide. Il n'étoit point malheureux dans le monde , mais il y portoit toujours le souvenir involontaire du bonheur qui l'attendoit au sein de sa famille. C'est le contraire de ce qu'éprouve le commun des hommes , qui souvent se trouvent mal où ils sont , sans pouvoir dire où ils seroient mieux.

La sérénité qui paroissoit dans toute la personne de M. Macquer , sembloit indiquer une santé constante ; mais cette sérénité n'annonçoit que le calme de son ame. Il souffroit depuis long-temps , mais le cachoit aux personnes qu'il aimoit le plus , parce qu'il regardoit ses maux comme incurables ; il les sentit redoubler peu-à-peu dans ses dernières années , en observa le progrès , & conjectura très-juste le moment où la mort devoit les finir. Peu de temps auparavant , il en avertit sa femme , lui parla de sa fin prochaine avec sensibilité , mais sans trouble , la remercia du bonheur qu'elle avoit répandu sur sa vie , & insista beaucoup

30 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

sur le desir qu'il avoit d'être ouvert après sa mort, afin que la cause en fût connue. Quelques jours après, les maux augmentèrent, & il y succomba le 15 Février 1784, sans avoir perdu un instant ni sa présence d'esprit, ni sa sensibilité, ni sa douceur, ni sa tranquillité ordinaire. L'ossification de l'aorte & des concrétions pierreuses formées dans les cavités du cœur, avoient été la cause de cet état de souffrance auquel il étoit condamné depuis plusieurs années, & de l'impossibilité d'exister dont il avoit senti si long-temps les approches lentes & douloureuses.



ÉLOGE

DE M. BERGMAN.

TORBERN BERGMAN, professeur de chimie à Upsal, membre de l'Académie des Sciences de la même ville, de celles de Londres, de Berlin, de Stockholm, des Curieux de la nature, de Gottingue, de Turin, associé-étranger de la Société de médecine de Paris & de l'Académie des Sciences, naquit le 20 Mars 1735, à Catharineberg, dans la province de Vestro-Gothie, de Barthold Bergman, receveur des finances, & de Sara Høegg.

Chez presque toutes les nations de l'Europe, l'état de financier est une profession lucrative & paisible; il n'en étoit pas de même alors en Suède. Souvent les receveurs des deniers publics, créatures d'un parti qui avoit été dominant dans une Diète, étoient exposés à la persécution de la Diète suivante, où le parti contraire avoit l'avantage. On croyoit trouver dans la recherche de leur fortune, des ressources pour le trésor public, & dans les poursuites exercées contre eux, un moyen presque sûr de capter la bienveillance du peuple. Il en résultoit que leurs profits devoient être d'autant plus grands, d'autant plus onéreux à la nation, qu'ils étoient plus incertains; mais en même-temps ceux qui, comme M. Bergman, refusoient d'embrasser cette profession, annonçoient au moins autant de sagesse que de désintéressement.

Lorsqu'il eut fini ses premières études, son père lui permit de suivre la carrière des universités, & de se rendre à Upsal. Un de ses parens fut chargé de veiller sur sa conduite. Bien loin d'avoir besoin de l'exhorter au travail, le surveillant se vit bientôt obligé de modérer son ardeur,

& sur-tout de l'empêcher de cultiver les sciences physiques. L'université d'Upsal embrasse les connoissances humaines dans toute leur étendue ; & ceux qui s'y appliquent à la théologie, au droit public, à la jurisprudence, peuvent espérer des places importantes & une grande fortune , tandis que les succès dans l'étude des mathématiques & de la physique ne sont récompensés que par un peu de gloire. M. Bergman préféroit cependant ces dernières études, & cette préférence imprudente étoit l'objet des remontrances de son parent ; remontrances auxquelles il ne put échapper qu'en imaginant un moyen de cacher subitement ses livres de physique , lorsqu'il étoit surpris , pour ne laisser voir que ceux qu'il lui étoit permis d'étudier. Cette nécessité d'acquérir dans des genres auxquels il ne se livroit qu'avec dégoût , assez de connoissances pour persuader qu'il en avoit été uniquement occupé , & cacher les progrès plus grands qu'il faisoit dans les sciences de son choix , altéra promptement sa santé ; & au bout d'une année, il fut obligé de retourner dans sa famille & de joindre aux études sédentaires un exercice de corps habituel, qui seul pouvoit rétablir & fortifier sa constitution. Mais il voulut que cet exercice servît encore à l'instruire ; il avoit étudié la botanique avant d'aller à Upsal ; il reprit cette étude dans sa retraite , & y joignit celle des insectes. Plusieurs de ceux qu'il observa ne se trouvoient point classés dans les ouvrages de Linné. M. Bergman en forma une petite collection , & la fit remettre à cet homme illustre , qui alors habitoit Upsal. M. Bergman n'avoit pas osé se présenter à lui pendant son premier séjour. Cette discrétion est un sentiment bien naturel dans un jeune homme qui , frappé d'un juste respect pour le génie , ne se croit pas digne encore de l'approcher , mais nourrit au fond de son cœur l'espérance de mériter un jour d'attirer ses regards. Cet hommage fut d'autant plus agréable à Linné , que le jeune naturaliste avoit eu le bonheur de rencontrer des espèces curieuses & réellement inconnues.

Lorsque

Lorsque la santé de M. Bergman fut rétablie, il obtint la permission de retourner à Upsal, avec une liberté entière de cultiver les mathématiques, la physique, l'histoire naturelle. Il s'y étoit ménagé l'avantage d'être connu du savant dont le nom célèbre y éclipsoit alors les autres noms. Ainsi, cédant à cet empire que la gloire & le génie exercent sur tout ce qui les environne, M. Bergman ne parut d'abord aimer que l'histoire naturelle; elle fut l'objet de ses premiers travaux, & son premier Mémoire fut une découverte. On ignoroit la nature d'un corps qui se trouve dans quelques eaux, & qui porte le nom de *coccus aquaticus*. M. Bergman s'aperçut que c'étoit l'œuf d'une sangsue, œuf qui renfermoit dix à douze petits. Linné, auquel il fit part de cette observation, refusa de le croire; mais M. Bergman le rendit lui-même témoin de ce fait. Alors Linné, après avoir écrit de sa main au bas du mémoire de son élève; *vidi & obfupui, je l'ai vu, & j'en ai été frappé d'étonnement*, l'envoya, décoré de cette honorable apostille, à l'Académie de Stockolm.

Peu de temps après, Linné donna le nom de M. Bergman à une nouvelle espèce d'insectes. Cette manière d'attacher le nom d'un homme à une espèce qui doit être éternelle, semble annoncer qu'on croit, ou ses talens, ou le sentiment qu'on éprouve pour lui dignes d'être consacrés à l'immortalité. C'est une sorte d'apothéose qui ne coûte rien à la raison; mais le succès de cet honneur dépend beaucoup du hasard. Ces dénominations disparaissent souvent de la langue des sciences, d'autres fois elles s'y conservent, mais elles cessent de rappeler un nom oublié dont on a voulu vainement prolonger la mémoire; & les savans ne doivent compter sur l'immortalité que lorsqu'ils l'ont méritée par leurs ouvrages.

Des Mémoires couronnés par l'Académie de Stockolm, sur l'histoire des insectes qui attaquent les arbres à fruit, & sur les moyens de se mettre à l'abri de leurs ravages; une méthode de les classer d'après la forme qu'ils ont dans

Hist. 1784.

E

l'état de larve, époque où il seroit le plus utile pour l'agriculture de pouvoir reconnoître & détruire ceux qui sont nuisibles; un grand nombre d'observations sur cette classe d'animaux si variés dans leurs formes & dans leur organisation, si importans pour l'homme qui a su en soumettre quelques-uns à ses besoins, tandis que les autres défendus par leur petitesse, & puissans par leur multitude, osent lui disputer encore quelques parties de son empire, enfin si intéressans par cette foule d'observations qu'offre au philosophe qui sait voir & réfléchir, le spectacle de leur industrie, de leur prévoyance, de leurs travaux, de leurs mœurs, de leur état de civilisation plus ou moins perfectionnée: tel a été le fruit du goût de M. Bergman pour une étude qui déjà n'étoit plus pour lui qu'un délassement; car les mathématiques & les parties de la physique qui y ont rapport étoient devenues sa véritable occupation. M. Bergman aimoit à parler de ses premiers travaux dans un genre auquel il avoit renoncé, mais pour lequel il avoit conservé un goût très-vif; & long-temps après il citoit avec une sorte de complaisance, que dans un seul jardin & pour une seule année, l'usage d'un moyen qu'il avoit indiqué avoit prévenu la naissance de plus de sept millions d'insectes destructeurs.

Il fut nommé, en 1761, professeur de mathématiques & de philosophie naturelle. Depuis plusieurs années il enseignoit les différentes parties de ces sciences. Nous lui devons une savante histoire de l'arc-en-ciel & des crépuscules, des recherches sur l'aurore boréale, sur les phénomènes électriques, sur l'électricité du crystal d'Islande, sur celle de la tourmaline. Enfin on trouve son nom dans la liste des astronomes qui ont observé le premier passage de Vénus sur le Soleil, parmi ceux dont les résultats méritent le plus la confiance des savans.

Personne alors ne savoit à Upsal qu'il eût cultivé la chimie; mais Wallerius s'étant démis, en 1767, du titre de professeur dans cette science, M. Bergman fit inscrire son nom dans la liste des concurrens. Wallerius avoit espéré

pouvoir faire passer la chaire à un de ses élèves, & bientôt M. Bergman vit se réunir contre lui tous ceux qui formoient, à Upsal, le parti de l'ancien professeur : car tout homme célèbre a la triste facilité d'en avoir un, à moins qu'il n'ait la sagesse & la noble fierté de dédaigner un avantage si dangereux. Ce parti s'accrut bientôt de la foule de ces hommes condamnés à ne jamais reconnoître un mérite supérieur dans leurs contemporains, ainsi qu'à ne jamais croire une vérité si elle n'a point été une des opinions de leur jeunesse.

Deux dissertations sur l'alun, que M. Bergman avoit données comme un essai de ses forces, furent critiquées avec amertume. Il devoit succomber sous cette espèce de conjuration. Heureusement pour la chimie, le prince royal, aujourd'hui roi de Suède, étoit alors chancelier de l'université d'Upsal ; il consulta des savans qui, étrangers à ce corps, ne pouvoient partager les préventions de ses membres, examina les titres de M. Bergman & les reproches élevés contre lui, se chargea lui-même de répondre à ces reproches & de le défendre auprès du sénat. C'est à-la-fois une anecdote bien honorable pour les sciences, & une preuve frappante des progrès de la raison humaine, que de voir l'héritier d'un trône employer ses talens, plutôt encore que son crédit, à soutenir devant les chefs de la nation la cause du génie persécuté, & à lui faire obtenir justice.

On auroit pu craindre que M. Bergman, livré pendant long-temps à des études étrangères à la chimie, ne manquât, dans la nouvelle carrière où il s'étoit jeté, de cette étendue de connoissances, de cette facilité, de cette habitude des opérations, avantages sans lesquels, dans les sciences physiques, le talent peut encore beaucoup pour la célébrité du savant, mais très-peu pour le progrès de la science & l'utilité réelle. On s'aperçut bientôt au contraire, que ses études de géométrie, de physique, d'histoire naturelle, étoient bien loin de lui avoir été inutiles. Elles le préservèrent des préjugés & de l'esprit de routine dont chaque partie

de nos connoissances semble avoir encore conservé quelques vestiges ; elles donnèrent à ses idées & à ses vues plus de précision & plus d'étendue. Il vit que la chimie devoit être , après les mathématiques , la base fondamentale de la connoissance de la nature , qu'il falloit donc reculer les bornes du champ trop resserré où cette science avoit été renfermée ; mais qu'en lui ouvrant une carrière plus vaste , on couroit risque de n'y multiplier que les erreurs , si on ne s'occupoit en même temps d'en bannir toutes les explications vagues & systématiques , d'en réformer la langue , enfin d'y porter l'exactitude de quelques autres parties de la physique.

Son premier soin fut de former auprès de son laboratoire un cabinet dans lequel les substances du règne minéral étoient rangées par ordre , à côté des produits des expériences qui lui en avoient fait connoître la composition ; une autre pièce renfermoit les minéraux qui se trouvent en Suède , & ils y étoient rangés suivant leur ordre géographique ; enfin dans une troisième , les modèles des machines , des instrumens , des métiers employés à faire subir à ces substances les préparations , à leur donner les formes qui les rendent utiles à nos besoins , étoient placés à côté des produits que les arts en avoient formés. Par ce moyen , un élève apprend d'abord à connoître les substances d'après leur nature & la proportion de leurs principes. Plus loin , il les aperçoit rangées dans l'ordre où elles ont été répandues sur le globe , & les loix qui ont présidé à cet ordre deviennent plus faciles à reconnoître ou à saisir. Enfin il voit comment les arts ont su employer ces substances , comment leur pratique a prévenu les théories , ou a su en profiter ; comment on y a résolu une foule de problèmes chimiques compliqués par une condition de plus , la nécessité de les résoudre avec profit , élément qui rend cette solution plus difficile , & les méthodes par lesquelles on l'a trouvée , souvent plus piquantes.

Cette manière d'instruire , si nouvelle , & pour laquelle

M. Bergman fit des sacrifices considérables, est un des grands services qu'un esprit profond & philosophique pût rendre aux sciences. Bientôt après il les enrichit par de nombreuses découvertes.

C'est lui qui le premier a fait bien connoître la substance à laquelle on donnoit le nom d'*air fixe*, & qu'il a nommée *acide aérien*, après avoir prouvé qu'elle avoit toutes les propriétés des acides.

Le nikel, le régule de manganèse, la terre de magnésie, la terre pesante étoient des substances nouvellement découvertes, & sur lesquelles la chimie n'offroit avant lui que des vues ingénieuses ou des expériences isolées.

L'acide qu'on retire du sucre & d'un grand nombre d'autres substances végétales, en distillant sur elles de l'acide nitreux; ceux qu'on retire de l'arsenic, de la molybdène, du spath fluor, de la tunstène, avoient été découverts dans son école, par lui ou par ses disciples. Mais il falloit une longue suite d'expériences & de recherches pour apprendre à connoître ces substances, ou nouvelles, ou peu familières aux chimistes, aussi parfaitement que celles qui ont été plus anciennement traitées; & pour que leur analyse, leurs propriétés, les phénomènes qu'elles présentent dans leurs combinaisons, formassent également un ensemble systématique de faits constans & précis,

M. Bergman osa entreprendre ce travail immense; & tandis que ce terrain, jusque-là sans culture, lui offroit d'abondantes moissons, il savoit en recueillir de nouvelles sur ceux qu'une culture assidue sembloit avoir épuisés. Le fer qui est depuis si long-temps le sujet des opérations de tant d'arts différens, & l'objet des recherches des savans & des artistes, n'a commencé à être vraiment connu que depuis les recherches de M. Bergman, qui a montré, dans ce qu'on prenoit pour du fer, plusieurs substances étrangères, presque toutes métalliques, dont l'existence étoit inconnue; mais ce n'est point par ces travaux particuliers qu'il faut juger de son génie; c'est dans les nouvelles

méthodes, dans les théories générales, qu'il faut apprendre à le connoître & à l'apprécier.

Dans ses dissertations sur l'analyse des eaux, on le voit ajouter aux réactifs déjà employés, des réactifs nouveaux; faire sentir l'imperfection de cette méthode, en même temps qu'il enseigne à la porter à un degré d'exactitude encore inconnu; ajouter à l'analyse directe de nouveaux moyens de ne laisser échapper aucun des produits, de les séparer avec plus d'exactitude & d'en déterminer les quantités respectives avec une très-grande précision. Au lieu de chercher à les obtenir seuls pour les peser ensuite, méthode souvent difficile & qui exposeroit à en perdre une partie, il cherche au contraire le poids d'une des combinaisons de chacun de ces principes, avec une substance bien connue qu'il a employée, pour enlever ce principe à ceux auxquels il étoit uni. Des expériences faites à part & plus en grand lui apprennent ensuite à connoître la proportion des substances qui constituent cette combinaison nouvelle; cette méthode ingénieuse & féconde dont il est l'auteur rend les résultats plus précis & souvent même plus assurés,

Les pierres précieuses, connues sous le nom de *gemmes*, avoient presque entièrement échappé à tous les efforts de l'analyse. M. Bergman parvint à les y soumettre, brisa l'union qui règne entre leurs parties, & sépara les terres de différente nature dont elles sont composées. La terre alumineuse en forme plus de la moitié; la terre quartzeuse & la terre calcaire, un peu de chaux de fer en sont les autres principes; & c'est avec ces substances communes & viles en apparence, que la Nature, avec l'aide du temps, & par des moyens qui sont encore un secret pour nous, parvient à former ces pierreries que leur éclat, leur rareté, leur éternelle durée ont rendu dignes de servir d'ornement à la beauté, & de parer la tête des rois ou les statues des dieux.

Le diamant qui diffère de toutes les autres pierres, par la propriété qu'il a de brûler, n'a pu même se dérober tota-

lement à la sagacité de M. Bergman, qui en a fait assez pour prouver que si dans ses recherches sur le diamant, il n'a pu obtenir un succès également complet, c'est sa fortune & non son génie qu'il en faut accuser.

M. Bergman a prouvé la nécessité de procéder dans les opérations docimastiques par la voie humide, c'est-à-dire, par l'analyse où l'on emploie des menstrues, seule méthode qui puisse être rigoureuse; mais il enseignoit en même temps à perfectionner les procédés ordinaires, à les simplifier; il montrait quelle pouvoit en être la véritable utilité; il apprenoit à exécuter avec un chalumeau, un charbon, une simple cuillier & quelques substances d'épreuve, de premières analyses assez exactes, pour reconnoître les substances minérales avec certitude & se guider dans une analyse plus complète. M. Bergman entreprit alors de classer toutes ces substances d'après leur composition chimique. Cette méthode est la seule vraiment scientifique, puisque c'est la seule qui ait pour objet les qualités essentielles aux substances, celles dont dépendent toutes leurs propriétés secondaires; mais une difficulté jusqu'à lors insoluble avoit empêché les naturalistes d'adopter cette méthode, l'impossibilité d'en faire usage ailleurs que dans un laboratoire, par des moyens lents, coûteux & pénibles. M. Bergman avoit sçu vaincre cette difficulté, en inventant cette analyse au chalumeau; & aujourd'hui le minéralogiste armé de cet appareil portatif peut, au sein des mines, sur le sommet des montagnes, au fond des souterrains creusés par la nature, tout analyser & tout reconnoître.

Dans un Mémoire sur la cristallisation, publié en 1773, M. Bergman montra comment d'une forme primitive très-simple peuvent naître des formes de cristaux qui, au premier coup-d'œil, n'ont aucun rapport avec la forme génératrice; & comment la dissection de ces cristaux, l'examen des coupes qu'on peut y faire avec plus ou moins de facilité, apprennent à reconnoître cette figure primitive & les loix plus ou moins simples, d'après lesquelles elle a déterminé

la production des cristaux différens. Ce Mémoire n'est qu'un simple essai, c'est la première esquisse d'une théorie nouvelle, mais cette esquisse est l'ouvrage d'un grand maître. M. l'abbé Haüy s'occupoit de son côté des mêmes objets à peu-près dans le même temps, mais avec plus de suite, & c'est à lui que doit appartenir la gloire d'avoir établi cette théorie qui manquoit aux sciences naturelles.

Un des derniers ouvrages de M. Bergman, est un savant traité sur les attractions électives. Nous entrerons dans un détail plus long sur cette théorie qui est à la fois le fondement de la chimie, & le point par lequel elle se lie le plus à la physique, & doit un jour s'unir aux sciences mathématiques; union dont les recherches sur les phénomènes de la cristallisation peuvent nous faire espérer que l'époque n'est pas aujourd'hui très-éloignée.

M. Geoffroi, de cette Académie, paroît être le premier qui ait imaginé de réduire à quelques règles générales les phénomènes observés constamment dans les opérations chimiques. On appeloit alors *affinité* la force inconnue, en vertu de laquelle deux substances s'unissent & forment une combinaison. Si une troisième substance détruit cette première combinaison pour en former une nouvelle avec un de ses principes, on disoit qu'elle avoit avec ce principe une affinité plus grande que le second principe qui en avoit été séparé par elle. M. Geoffroi imagina de donner une table qui contenoit, pour les substances les plus importantes ou les plus connues, l'ordre de la force d'affinité, suivant laquelle les autres y adhèrent. C'étoit d'après les observations que cette table avoit été formée; elle étoit comme le précis des résultats que l'on en pouvoit tirer; elle réduisoit à un petit nombre de faits simples & généraux, la masse déjà très-grande des faits chimiques: elle pouvoit servir à donner l'explication de plusieurs phénomènes nouveaux, c'est-à-dire à montrer leur accord avec les faits déjà connus. Cette table eut le succès que méritoit une idée si ingénieuse, & depuis ce temps il n'est presque pas de chimiste célèbre qui,

qui, dans ses leçons ou dans ses ouvrages, n'ait donné la table des affinités de M. Geoffroi, corrigée, augmentée, perfectionnée. M. Bergman avoit porté, dans l'étude de la chimie, des vues trop philosophiques pour ne pas sentir l'importance de cette table & ne pas s'occuper de la rendre plus utile. Mais il regardoit ce travail comme devant former le résultat & le complément de tous les autres, & il avoit calculé le nombre effrayant de trente mille expériences nécessaires encore pour la rendre aussi complète que nos connoissances le permettent. Aussi auroit-il retardé encore long-temps la publication de cet ouvrage, si le dépérissement de sa santé ne lui eût fait envisager une mort prochaine. Alors il se crut permis de mettre au jour les matériaux qu'il avoit rassemblés, les idées qu'il auroit voulu éclaircir, les vues qu'il se proposoit de vérifier; il ne craignit plus le reproche d'avoir publié un ouvrage trop imparfait, de n'avoir fait que deviner ce qu'il auroit fallu prouver. *Il me suffit, disoit-il, que mes essais puissent mettre les autres en état de porter plus loin leurs recherches. Qu'importe que la vérité soit trouvée par moi ou par un autre, pourvu qu'elle le soit.*

Cependant cet ouvrage si imparfait à ses yeux, ne l'a pas été aux yeux des autres chimistes. Sa table incomparablement plus étendue que celle de M. Geoffroi, est la première qui contienne les loix des affinités, telles qu'on les observe en opérant par la voie sèche. Il a eu de plus l'idée absolument nouvelle d'exprimer, par des espèces de formules, toutes les opérations chimiques, dont les résultats servent de base à sa table. Un seul coup-d'œil fait voir les substances sur lesquelles on a opéré, la méthode employée & le résultat de l'opération.

Cette espèce de langue nouvelle mérite l'attention des philosophes; le moment approche où la langue alphabétique ne sera plus ni assez rapide, ni assez riche, ni assez précise, pour répondre aux besoins des sciences & suivre leurs progrès; elles seront forcées de s'arrêter, ou il faudra créer pour chacune une langue dans laquelle des signes invariablement déterminés,

expriment les objets de nos connoissances, les diverses combinaisons de nos idées, les opérations auxquelles nous soumettons les productions de la nature, & celles que nous exécutons sur nos propres idées, qui soient enfin pour tous les genres de sciences, mais avec plus de perfection encore, ce que la langue de l'algèbre est pour l'analyse mathématique.

Personne, avant M. Bergman, n'avoit mieux prouvé combien les loix des affinités sont constantes, & comment on peut, par un examen plus approfondi des phénomènes, rappeler à ces loix les faits qui paroissent se plus les combattre. Il montre en effet que la même substance agit tantôt comme n'étant qu'un seul principe, & tantôt comme étant elle-même décomposable, & par l'action séparée des différens principes dont elle est formée. Ici les principes, au lieu de se combiner deux à deux, se combinent trois à trois; là, une substance formée de deux principes est capable de conserver, avec une certaine quantité surabondante d'un de ses principes, une affinité assez forte pour enlever ce principe à une autre substance & la décomposer. M. Bergman s'est borné à la table des affinités simples ou regardées comme telles: car peut-être n'en existe-t-il pas réellement dans la nature. La table des affinités doubles eût exigé un travail immense que la durée trop courte de sa vie ne lui a point permis de terminer.

Au mot d'*affinité* il substituoit celui d'*attraction élective*; il employoit le mot *attraction*, parce que cette force, comme l'attraction Newtonienne, peut s'observer dans tous les corps de la nature, & tend à rapprocher, à unir les molécules entr'elles; & il y ajoutoit l'épithète *élective*, parce qu'elle n'est pas la même dans les molécules égales en masse, mais qu'elle varie suivant la nature des substances qui tendent à se combiner.

Dans cet ouvrage rempli de tant de vérités, ou neuves, ou éclaircies & mieux prouvées, dans celui où, par la comparaison des masses de métaux qui se précipitent mutuellement, M. Bergman cherche le rapport des quantités de

phlogistique qu'ils contiennent, on voit qu'il admettoit une théorie différente de celle qui paroît presque généralement adoptée par les chimistes françois. Dans M. Bergman, le soufre n'est pas une substance qui, s'unissant avec un des principes de l'air vital, forme de l'acide vitriolique; c'est une combinaison de l'acide vitriolique & du phlogistique. Elle se change en acide lorsqu'elle perd ce phlogistique & qu'elle s'unit à la matière de la chaleur, qui est elle-même une combinaison du phlogistique & de l'air vital. Une terre métallique est, suivant M. Lavoisier, le métal uni à l'air vital: suivant M. Bergman & M. Schéelle, c'est une terre unie à la matière de la chaleur, & le métal étoit la même terre unie avec le phlogistique. On voit combien les deux explications qui peuvent paroître opposées au premier coup-d'œil, se rapprochent lorsqu'on vient à les considérer de plus près. Aussi rendent-elles raison des phénomènes avec un succès presque égal; & jusqu'ici il paroît qu'aucune expérience vraiment décisive n'a ni confirmé, ni détruit aucun des deux systèmes. Mais quand M. Bergman se seroit trompé, la sincérité avec laquelle il n'a donné son opinion que comme la plus vraisemblable à ses yeux, la modestie avec laquelle il emploie le système d'explications proposé par M. Schéelle, lorsqu'il lui eût été si facile d'en imaginer un autre, devraient lui faire pardonner cette erreur. D'ailleurs on ne pourroit lui faire, sans injustice, le reproche de n'avoir pas assez étudié la nouvelle théorie des gaz, reproche qu'ont mérité peut-être quelques partisans du phlogistique, puisque indépendamment de ses travaux sur le gaz aérien, sur le gaz hépatique des eaux sulfureuses, on lui doit la première explication solide de la détonation de l'or fulminant, détonation dûe à la production d'un air alkalin.

Une théorie de la terre fait partie des ouvrages de M. Bergman. Mais dans un discours sur la manière de chercher la vérité, ouvrage digne d'un homme qui avoit commencé par donner de grands exemples, il nous apprend lui-même ce que nous devons penser de ces hypothèses

philosophiques. Il croyoit, comme M. Francklin, qu'il ne peut y avoir dans ces systèmes d'autre mérite que la facilité de les faire, jointe à celle de les abandonner. Il croyoit en même temps qu'en les envisageant comme de simples plans d'expériences ou d'observations, ils peuvent avoir quelque utilité : d'ailleurs ils servent de cadre pour arranger les faits sous un ordre plus frappant ; en parlant à l'imagination, ils soutiennent une attention foible que lasseroit une suite non interrompue de discussions & de faits ; & à cet égard ils sont en quelque sorte, dans les sciences, ce que sont dans la littérature ces romans de morale ou de politique destinés à rendre l'instruction plus agréable & plus facile.

Les événemens de la vie de M. Bergman sont peu variés. Placé comme professeur de chimie à Upsal, il n'en sortit plus que pour faire quelques courses scientifiques dans les mines, & pour aller prendre les eaux lorsque la santé lui en avoit rendu le secours nécessaire.

Il eut l'honneur d'être élu recteur de l'Université : cette compagnie n'est pas seulement un corps littéraire ; propriétaire de grandes terres sur lesquelles elle exerce une autorité très-étendue, jouissant d'une juridiction sur ses membres & sur les écoliers, possédant un grand nombre de ces immunités, de ces privilèges, que dans les siècles qui nous ont précédés on regardoit comme des encouragemens, & qui ne servent qu'à décourager le talent, à ralentir l'activité en détruisant la concurrence ; l'université d'Upsal est au milieu de la Suède une sorte de république. Les professeurs en sont les chefs ; & tandis que dans les établissemens littéraires, toutes les institutions devroient avoir pour but d'y maintenir la paix, & de dispenser leurs membres de toute occupation étrangère aux sciences, la constitution de cette université oblige les professeurs à des soins qui peuvent les écarter ou les dégoûter de leurs fonctions, & inspire aux autres corps de l'état, aux personnes puissantes le desir de s'y faire des créatures, d'y avoir de l'influence. Ses membres pourroient être tentés quelquefois d'oublier que ce n'est pas leur intérêt, mais l'intérêt commun des citoyens, qui a été l'objet de leur

établissement ; & de sacrifier leur véritable devoir , le zèle pour le progrès des sciences , à cet esprit de corps aussi méprisable dans son principe , moins raisonnable dans ses motifs que l'intérêt personnel , mais plus audacieux dans les excès , & moins susceptible d'être contenu par l'honneur ou par la crainte. Chef de cette université alors partagée en deux grands partis , celui des théologiens unis aux juriconsultes & celui des physiciens , M. Bergman ne s'occupait que de maintenir entre eux l'union , l'égalité même , quoiqu'il eût contribué plus que personne à faire pencher la balance du côté du parti trop long-temps le plus foible ; & l'époque de sa magistrature est remarquable dans les fastes de ce corps , par le petit nombre d'affaires & de délibérations que présentent les registres. Elle le fut aussi par la sagesse de la conduite des écoliers ; ils sont en grand nombre , presque tous au-dessus de l'enfance & dans le premier âge des passions : souvent ils avoient éludé ou bravé la sévérité des réglemens , & ils furent subjugués par leur respect pour la gloire de leur chef & leur admiration pour son génie. M. Bergman favoit que le premier dans une société savante , n'est ni le chef de cette société , ni l'homme dont la voix y a le plus d'influence ; mais celui qui s'est illustré par un plus grand nombre de découvertes , ou qui en a fait de plus importantes.

Le roi de Prusse desira d'attacher M. Bergman à son Académie. Le savant Suédois hésita un moment : sa santé altérée par le double travail de l'enseignement & des recherches chimiques , pouvoit se rétablir dans un climat plus doux ; il auroit pu s'y livrer sans partage à des travaux académiques. Mais le roi de Suède avoit été son bienfaiteur particulier ; il fut que sa retraite affligeroit ce monarque , & il n'y songea plus : seulement il demanda au roi de ne pas lui faire perdre le mérite de ce sacrifice en augmentant ses appointemens ; mais sa demande ne fut point écoutée.

La réputation d'un savant illustre s'accroît par celle de ses disciples. Son nom se présente à la postérité entouré des

noms célèbres qui ont dû à ses soins une partie de leur éclat ; il conserve enfin sur les découvertes faites dans son école , une espèce de droit de suzeraineté. Parmi les chimistes formés par M. Bergman , nous citerons sur-tout M. Schéelle , parce qu'il est plus particulièrement son ouvrage. Un des auditeurs de M. Bergman découvrit par hasard , chez un apothicaire d'Upsal , un jeune élève à qui l'on reprochoit de négliger les travaux de son état en s'abandonnant à son goût pour la chimie. Il vit ce jeune homme , fut surpris des recherches ingénieuses auxquelles il avoit pu se livrer dans un laboratoire particulier , que , malgré la médiocrité de sa fortune & la gêne à laquelle il étoit soumis , il avoit su se former : cet élève étoit M. Schéelle. M. Bergman instruit de cet événement , voulut voir ce jeune homme , fut étonné de ses connoissances , de ses dispositions heureuses : ce génie naissant ne put échapper à la sagacité d'un maître habile ; dès ce moment M. Schéelle fut son disciple chéri , bientôt son digne émule & toujours son ami. Au lieu d'affecter sur lui cette supériorité à laquelle un maître renonce avec tant de peine , M. Bergman se trouvoit assez grand pour ne vouloir que l'égalité ; & loin de chercher à s'arroger quelque droit sur les travaux de M. Schéelle , on lit dans ses lettres à des chimistes étrangers , qu'il voyoit avec une véritable douleur que l'erreur les lui attribuât quelquefois. Sa conduite à cet égard fut la même pour tous ses disciples ; exact à les citer , ardent & habile à faire valoir leurs travaux , il alloit au-delà même de la justice rigoureuse qui malheureusement auroit encore été un mérite.

La célébrité de M. Bergman lui avoit fait des disciples dans toutes les contrées de l'Europe. En France , nous citerons en particulier deux magistrats qui honorent la magistrature par leurs lumières , par leur zèle ardent & éclairé pour le progrès des sciences , par le courage avec lequel ils se sont élevés au-dessus des préjugés , & qui en même temps ont fait honneur aux sciences par l'esprit d'humanité , de raison , de patriotisme éclairé qu'ils ont porté dans leurs fonctions. On reconnoîtra ici M.^r de Morveau.

& de Virli. L'un d'eux, M. de Virli, voulut même aller entendre M. Bergman en Suède, & profiter de ses leçons; & nous devons à M. de Morveau la traduction de l'ouvrage où, sous le titre modeste d'Opuscules, M. Bergman a rassemblé les plus importantes de ses recherches.

L'usage de l'Académie de Stockolm est de partager entre ses membres le travail des éloges décernés à ceux qu'elle a perdus. M. Bergman se chargea de celui de Wallerius qui avoit été constamment injuste envers lui, & même envers la chimie, sur laquelle son aversion s'étoit étendue. Nous ne le louerons point d'avoir oublié en ce moment son ancienne injure; mais il étoit utile que le mérite réel de Wallerius fût apprécié par un homme fait pour le bien connoître, dont le suffrage ne seroit pas suspect, & M. Bergman fut assez sûr de lui-même pour ne pas craindre de confondre les limites étroites qui séparent la justice de la sévérité, & l'indulgence qu'on doit à un ennemi, d'une générosité qui seroit un outrage.

La passion de M. Bergman pour les sciences, avoit épuisé sa constitution naturellement ardente & délicate. Il prodiguoit sa santé, non-seulement pour les travaux qui pouvoient lui procurer des connoissances nouvelles ou lui mériter de la gloire, mais encore pour ceux qui, n'étant utiles qu'à l'instruction de ses disciples, ne lui offroient d'autre récompense que le plaisir d'avoir rempli son devoir. Pendant quelque temps les eaux minérales artificielles suspendirent ses maux, & ce fruit de ses travaux répara une partie du mal qu'ils lui avoient fait. Les eaux de Medewi en Suède lui sauvèrent une fois la vie, mais en 1784 il eut encore besoin de ce secours, elles ne lui firent plus aucun effet, & le 8 Juillet de la même année, il succomba sous le poids de ses maux, victime de son zèle pour ses devoirs & pour la chimie. Il n'avoit pas encore cinquante ans, & depuis long-temps son nom étoit, dans les sciences, un des premiers de l'Europe.





ÉLOGE

DE M. MORAND.

JEAN-FRANÇOIS-CLÉMENT MORAND, docteur-régent de la Faculté de médecine de Paris, premier médecin du cardinal de Bavière électeur de Cologne, des Académies des Sciences de Stockholm, de Harlem & de Bruxelles; de la Société Royale de Londres, de l'Académie de médecine de Madrid, de la Société botanique de Florence; de la Société économique de Berne, & de la Société d'émulation de Liège, pensionnaire anatomiste de l'Académie des Sciences, naquit à Paris le 29 Avril 1726, de Sauveur-François Morand, de cette Académie, & de Marie-Clémence Guerin.

Le père de M. Morand comptoit parmi ses parens, plusieurs chirurgiens célèbres; lui-même s'étoit illustré dans cette profession, & avoit contribué à lui faire obtenir la juste considération dont elle jouit de nos jours. Il étoit naturel qu'il desirât d'avoir dans son fils un successeur qui soutînt le nom que sa famille avoit acquis dans la chirurgie. Mais quoique le jeune Morand eût pris pour l'anatomie le goût qu'il seroit difficile qu'un si bon maître & un exemple si glorieux n'eussent pas réussi à lui donner, il préféra l'état de médecin.

Le goût naturel de M. Morand le portoit à cultiver les sciences, mais beaucoup moins à en approfondir une en particulier, qu'à les effleurer toutes, & à rassembler sur chacune les faits singuliers ou importans, les observations neuves ou utiles qui s'offroient à sa curiosité, & qu'il cherchoit avec une activité infatigable. En parcourant les observations

observations répandues dans une foule de recueils différens, on est également surpris de leur nombre & de leur variété. Des analyses d'eaux minérales, des observations sur la composition ou les effets de remèdes nouveaux, & sur l'utilité de divers instrumens de chirurgie; l'exposition de plusieurs maladies extraordinaires observées, soit dans l'homme, soit dans les animaux, & propres à éclairer sur les secrets de l'économie animale; des remarques sur quelques phénomènes de botanique ou de météorologie; l'histoire d'un insecte, la description d'une mine ou d'une montagne, des observations sur l'altération que différentes substances ont éprouvée ou dans la terre, ou dans la mer; des dissertations sur des antiquités, & enfin jusqu'à des recherches sur le lieu de la sépulture de cet Hermite Pierre, le premier auteur des croisades, qui doit son immortalité à l'honneur funeste, mais rare pour un particulier, d'avoir été la première cause de la mort de plusieurs millions d'hommes : tel est le tableau très-abrégé & très-incomplet de ce qu'offrent les ouvrages épars de M. Morand.

En 1759, il entra dans l'Académie comme adjoint-anatomiste; & on trouve dans les Mémoires de la même année, la dissertation sur la construction intérieure & l'usage du thymus. Cet organe singulier existe dans la poitrine du fœtus des animaux vivipares, croît avec eux, & continue même de croître encore dans les premiers temps qui suivent la naissance; bientôt après il diminue, s'oblitére & disparaît presque en entier. Il exerce donc, dans les premiers temps de la vie, des fonctions qui deviennent ensuite inutiles à la conservation de l'individu, & n'entrent plus dans l'ordre des loix d'après lesquelles il doit exister. Comme les conjectures des anatomistes sur ces fonctions étoient peu satisfaisantes, M. Morand a cru devoir en former de nouvelles; & il suppose que, pendant le temps de la gestation, le thymus sépare du sang la partie laiteuse que lui fournit le placenta. Elle passe du thymus dans le canal thorachique, pour prendre enfin la route que suit le chyle dans les

animaux adultes. Lorsque l'animal est né & qu'il respire, ce même organe peut encore servir à la sécrétion d'une partie du sang, tant que la nouvelle route que prend alors la circulation n'est pas assez établie, & que le poumon n'exerce pas ses fonctions d'une manière complète. La position du thymus, sa construction intérieure, la nature des vaisseaux qui le parcourent, tout semble concourir à rendre vraisemblable cette opinion de M. Morand; & c'est beaucoup en ce genre, où l'ignorance, peut-être à jamais invincible, du premier principe de la vie, ne permet guère de s'élever au-dessus de la vraisemblance.

M. Morand s'occupa bientôt après d'un travail d'un autre genre. Il se chargea de donner à l'Académie la description de l'art d'exploiter les mines de charbon de terre; minéral dont la nature semble avoir tenu en réserve des masses immenses pour le temps où l'industrie des hommes auroit perfectionné tous les arts sans lesquels ce minéral seroit resté ou inutile ou même inconnu. Cette précaution est d'autant plus bienfaisante, que les progrès des arts accompagnent nécessairement ceux de l'agriculture, qui ne peut elle-même se perfectionner sans faire disparaître de la surface de la terre les forêts immenses qui la couvroient. En effet, la disette de bois dont on se plaint déjà depuis long-temps, n'est que la suite infaillible des progrès de l'agriculture & du commerce. Les forêts doivent diminuer jusqu'à ce que le bois ait acquis le prix naturel qu'il doit avoir relativement aux autres productions, & que ce prix soit assez fort pour en rendre la culture avantageuse. Ainsi, les moyens de multiplier les usages du charbon de terre & de les répandre, sont devenus un objet important, non pour ménager le bois, mais pour le rendre moins nécessaire, laisser plus de terrains à d'autres productions, & le réserver pour des usages dans lesquels il peut être plus difficilement remplacé.

Les travaux de M. Morand, sur le charbon de terre,

renferment à la fois tout ce que les sciences peuvent apprendre sur son origine ou sur la nature, & les plus petits détails des travaux nécessaires pour le tirer de la mine, ou des usages économiques auxquels il peut être utilement employé. M. Morand prenoit au charbon de terre, aux ouvrages qui en ont traité, aux manufactures qui le consomment, à tout ce qui a quelque rapport, même éloigné, avec cette substance, cet intérêt vif, cette espèce d'enthousiasme que l'objet d'une longue occupation ne manque guère d'inspirer, dont ceux qui ne le partagent pas ne peuvent s'empêcher de s'étonner, que dans le premier mouvement on seroit tenté de trouver ridicule, mais qu'on respecte, par réflexion, comme la source de presque tout ce qui se fait d'utile.

M. Morand entreprit un grand travail relativement aux états de population, objet important en politique comme en médecine. Il rassembloit avec soin, tous les ans, ce qu'il lui étoit possible de recueillir, & il se proposoit de donner chaque dixième année le résultat de ses observations dans les Mémoires de l'Académie des Sciences; mais il n'a pu exécuter ce projet que pour deux époques, celle de 1770. & celle de 1780. Les recherches de ce genre n'ont encore, parmi nous, ni obtenu toute l'estime, ni excité tout l'intérêt qu'elles méritent, soit parce que l'art d'en tirer des résultats est encore & peu connu, & peu avancé, soit parce qu'elles assujettissent l'esprit à une marche trop simple & trop régulière, qui conduit à quelques vérités utiles, mais avec beaucoup de travail & très-peu de gloire; au lieu qu'on peut obtenir à peu de frais une renommée plus brillante, en renfermant des demi-vérités ou même des erreurs dans des maximes vagues, mais imposantes, & en les embellissant des formes de l'éloquence.

Quoique M. Morand n'eût presque jamais pratiqué la Médecine, il n'en étoit pas un membre moins zélé de la Faculté. Il y a souvent présidé à des thèses, dont quelques-unes avoient pour objets des questions curieuses :

telle est celle où il demande si les héros produisent des héros.

Cette question de la ressemblance des pères aux enfans dans les qualités morales, est sûrement une des plus dignes d'occuper les physiciens & les philosophes; mais il faudroit, pour la résoudre, avoir rassemblé un nombre d'observations d'autant plus grand, qu'il s'y trouve une source particulière d'incertitude à laquelle on ne doit pas sans doute attacher une importance trop grande, mais qu'il seroit imprudent de négliger.

L'humanité, le zèle de M. Morand pour le bien public, ne lui permettoient pas de refuser ses secours toutes les fois qu'une maladie épidémique ou extraordinaire réclamoit son assistance. Il donnoit ses soins aux malheureux & à quelques amis; il étoit même le médecin de trois communautés religieuses, qui, par la confiance qu'elles lui avoient montrée, avoient vaincu la répugnance pour la pratique. Cette confiance n'a pas été trompée, si on en juge par leurs regrets & par le desir qu'elles m'ont témoigné de rendre ici en leur nom, à M. Morand, un témoignage public de leur reconnoissance.

M. Morand, fils d'un ancien Académicien, étoit né, pour ainsi dire, dans le sein de cette compagnie; il en avoit connu dès l'enfance le régime intérieur, & il l'aima toujours comme sa patrie. Sévèrement attaché à la règle, même dans les petites choses, ennemi des innovations, mais sans avoir l'humeur qui accompagne presque toujours cette disposition, & qui en trahit alors le motif, ceux mêmes dont il combattoit les opinions, respectoient la sincérité de son zèle & la pureté de ses intentions. Nous l'avons vu remplir, il y a peu d'années, les fonctions de directeur, avec ce mélange d'amour pour la règle & de condescendance pour ses confrères, que doit réunir le chef annuel d'une compagnie où il ne peut voir que des égaux; tandis qu'il savoit soutenir les intérêts de son corps avec cette dignité modeste

si convenable au représentant d'une Académie qui doit toute la considération à son utilité réelle, & au mérite personnel de ceux qui la composent.

La santé de M. Morand paroissoit nous promettre de conserver encore long-temps un confrère qui nous étoit cher ; mais il fut attaqué d'une péripneumonie maligne, le 9 août 1784, & il y succomba le 13 du même mois, laissant une femme à laquelle il étoit uni par une amitié très-tendre, & dont il ne lui restoit pas d'enfans, & un frère, chanoine de la Sainte-Chapelle.



ÉLOGE

DE M. CASSINI.

CÉSAR-FRANÇOIS CASSINI DE THURY, noble Siennois, maître des comptes, directeur de l'Observatoire, de la Société royale de Londres, de l'Institut de Bologne, des Académies de Berlin & de Munich, pensionnaire astronome de l'Académie des sciences, naquit à Paris le 17 Juin 1714, de Jacques Cassini & de Susanne-Françoise Charpentier de Charmoi.

Quoique la famille de M. Cassini, connue depuis plusieurs siècles en Italie, fût comptée parmi les familles sénatoriales de Sienne, dès le temps du cardinal Cassini, archevêque de cette ville en 1426, & qu'il y ait eu un second cardinal de ce nom dans la promotion de 1712, c'est aux sciences qu'elle doit sa principale illustration. Le nom de Dominique Cassini sera long-temps cité parmi ceux dont s'honore un siècle fécond en hommes de génie; & ce qui est sans exemple dans notre histoire, M. le comte de Cassini, notre confrère, fils de M. de Thury, est le quatrième académicien en ligne directe de cette famille, qui, depuis 1669, a constamment & sans interruption donné des astronomes à l'Académie.

Le nom de Cassini imposoit, pour ainsi dire, au jeune Thury l'obligation d'étudier l'astronomie, & de se rendre digne de succéder à son père à l'Observatoire comme parmi nous. M. Maraldi voulut se charger de diriger les premières études du petit-fils de Dominique Cassini dont il étoit l'élève & le neveu, ses soins, aidés des heureuses dispositions de M. de Thury, eurent un si heureux succès,

qu'ayant à peine dix ans le jeune Astronome calcula les phases de l'éclipse totale de Soleil, qu'on attendoit pour l'année 1727. En 1735, il fut reçu à l'Académie comme adjoint surnuméraire à l'âge de vingt-un ans : son père y avoit été admis beaucoup plus jeune, à dix-sept ans seulement. On peut croire que dans ces adoptions, en quelque sorte prématurées, l'Académie avoit compté pour quelque chose le nom de Cassini, & que dans l'empire des sciences, comme ailleurs, une naissance illustre peut aplanir tous les chemins; mais si, dans cette carrière, ce mérite étranger aide quelquefois au talent, du moins il ne peut dispenser d'en avoir; & il seroit à désirer qu'on pût en dire autant des avantages que la naissance procure dans d'autres états.

Les premiers travaux de M. Cassini eurent pour objet la vérification de la méridienne qui passe par l'Observatoire. Il y travailla d'abord avec son père, & ensuite avec M. l'abbé de la Caille. Cette méridienne avoit été tracée par Dominique Cassini; son fils & Picard avoient eu part à ce travail, mais les valeurs qu'ils avoient trouvées pour les degrés du méridien en France & pour le degré de longitude pris à Paris, tendoient à faire regarder la terre comme alongée, tandis que les expériences du pendule, la mesure d'un degré de latitude, faite près du pôle, conduisoient à supposer à notre globe une forme aplatie, la seule qui pût s'accorder avec la théorie Newtonienne. Il paroissoit donc nécessaire de vérifier de nouveau les anciennes mesures, & sur-tout celle de la base, quoiqu'exécutée par Picard, puisque toutes les autres en dépendoient. M.^{rs} Cassini s'en chargèrent, y découvrirent une erreur de quelques toises; & Jacques Cassini, après avoir long-temps combattu contre l'aplatissement de la terre, eut le mérite d'avoir contribué à détruire la seule objection raisonnable qu'on pût opposer à cette opinion.

En même temps que les astronomes vérifioient, corrigeoient toutes ces mesures, ils prolongeoient à l'orient & à l'occident de Paris la perpendiculaire à la méridienne.

On avoit aussi formé le projet de faire une description géométrique de la France. Le jeune Cassini s'occupa de ces travaux avec toute l'activité de son âge. Il conçut le plan plus étendu de ne pas borner cette description à la détermination des points des grands triangles qui devoient embrasser toute la surface du royaume, mais de lever le plan topographique de la France entière, de déterminer par ce moyen la distance de tous les lieux à la méridienne de Paris & à la perpendiculaire à cette méridienne. Jamais on n'avoit formé en géographie une entreprise plus vaste & d'une utilité plus générale. C'étoit en effet un préliminaire absolument nécessaire pour parvenir à une connoissance approfondie & détaillée de la France. On ne se bornoit pas à marquer sur la carte tous les objets, même jusqu'à des chaumières isolées ; on devoit y figurer les terrains, autant qu'il étoit possible de le faire, par de simples hachures. Ces cartes, ainsi exécutées, devenoient une espèce de cadre dans lequel toutes les connoissances particulières, tous les détails sur l'élévation des terrains, la pente & la direction des eaux, sur l'histoire naturelle, sur les productions de chaque pays, sur l'étendue des phénomènes de l'atmosphère, sur la population & l'histoire naturelle de l'homme, les limites même des coutumes, des différentes administrations, des loix de finance ou de commerce, venoient se ranger dans un ordre méthodique qui permettoit d'en mieux saisir l'ensemble, d'en tirer des conclusions plus exactes. Cette base une fois donnée, si on se proposoit d'acquérir une idée générale & exacte de la France, ou d'une de ses provinces, la partie du travail la plus pénible, la plus dispendieuse, devoit se trouver toute préparée.

Une entreprise si utile, mais en même temps si difficile, exigeoit de la part du gouvernement des secours extraordinaires, & M. de Cassini en obtint sans peine.

Le feu Roi qui avoit appris la géographie, dans son enfance, du célèbre Guillaume de l'Isle, avoit conservé pour cette science un goût assez vif : d'ailleurs il n'en est point d'une utilité

utilité plus immédiate dans la plupart des opérations du gouvernement, & dont le besoin se fassé plus sentir à presque tous les instans. Elle a même encore l'avantage, non moins grand, de rendre plus facile l'acquisition de toutes les connoissances qui peuvent être nécessaires aux princes. Mais malgré l'intérêt constant que le Roi prenoit à cette entreprise, M. de Sechelles supprima les fonds que ses prédécesseurs avoient accordés. Le Roi, qui aimoit M. Cassini, voulut se charger de lui annoncer lui-même cette nouvelle fâcheuse. Sire, lui dit M. Cassini, *que Votre Majesté daigne dire seulement qu'Elle voit avec peine la suspension de cette entreprise & qu'Elle en desire la continuation, je me charge du reste.* Le Roi y consentit, mais en plaisantant M. Cassini sur l'inutilité de cette marque d'intérêt; car ce prince, après plus de trente ans de règne, ne connoissoit pas encore toute la force de l'influence que l'opinion du monarque a sur les courtisans.

Cependant M. Cassini forma le plan d'une compagnie qui se chargeroit de faire les avances, & qui, devenue propriétaire de l'entreprise, retireroit ses fonds sur la vente des cartes. Le mérite de rendre l'activité à un travail dont le Roi regrettoit la suspension, & l'avantage d'acquérir le droit de lui parler d'un objet qui lui étoit agréable, déterminèrent plusieurs courtisans à entrer dans cette compagnie; quelques citoyens se joignirent à eux dans la vue de contribuer au succès d'un ouvrage utile. L'entreprise se continua sous cette nouvelle forme, avec plus de rapidité & de méthode. Bientôt le gouvernement accorda quelques encouragemens; différentes provinces contribuèrent à la dépense; & M. Cassini a eu la consolation de voir terminer presque entièrement un travail si étendu, & d'en devoir à lui-même presque tout le succès.

Les points des triangles avoient été déterminés avec toute la précision à laquelle les progrès de la physique & ceux de l'art de construire les instrumens permettoient d'atteindre. Mais on avoit été obligé de partager entre un

grand nombre de coopérateurs le travail de lever l'intérieur de ces triangles ; & malgré les moyens de vérification que M. Cassini s'étoit procurés , l'exactitude de toutes les cartes ne pouvoit être la même ; les coopérateurs ne pouvoient avoir ni la même intelligence , ni le même zèle. On put s'apercevoir aussi que , dans la manière de représenter la forme des terrains , on n'avoit ni formé un plan général avec assez de soin , ni exécuté avec assez d'attention celui auquel on s'étoit arrêté ; mais en convenant de ces défauts , on ne peut s'empêcher d'avouer que cette entreprise , la plus vaste qui ait été tentée en géographie , est en même temps celle dont l'exécution a été la plus exacte.

M. Cassini ne vouloit pas qu'elle fût bornée à la France ; il profita de la guerre de 1741 , pour étendre ses cartes à la Flandre , & vérifier la mesure du degré faite par Snellius. C'étoit la première que les occidentaux eussent osé tenter ; & ce travail , joint à la découverte de la loi de la réfraction , avoit immortalisé avec justice le nom du savant Hollandois. Cette mesure étoit cependant très-fautive ; l'erreur paroissoit de près de deux mille toises sur un degré , & il étoit curieux de savoir quelle en avoit pu être la cause. M. Cassini trouva qu'il falloit l'attribuer presque uniquement à l'erreur qui avoit été commise dans la détermination de la différence de latitude des deux points dont Snellius avoit mesuré la distance.

Il embrassa uniquement dans sa carte de Flandre , le terrain que les armées Françoises avoient occupé ; & comme il le disoit lui-même , où s'arrêtèrent les conquêtes du Roi , là s'arrêtèrent les opérations de son astronome. Quelquefois il choisissoit pour sommet d'un de ses triangles le clocher , soit d'une ville assiégée , soit d'une place dont on préparoit le siège ; & cette confiance dans la certitude du succès , étoit une manière de flatter les généraux ou le prince , à laquelle peut-être ils n'étoient pas insensibles.

En 1761 , M. Cassini fit un voyage en Allemagne. Il avoit pour objet de prolonger jusqu'à Vienne la perpen-

diculaire à la méridienne de Paris, d'unir les triangles de la carte de France à des points pris en Allemagne, de préparer les moyens d'étendre à ce vaste pays le plan qu'on avoit suivi pour la France, & d'établir ainsi successivement pour toute l'Europe, une uniformité utile en elle-même, & glorieuse pour la nation qui avoit donné l'exemple.

L'empereur François, l'impératrice reine, les princes de la maison de Bavière, les margraves de Bareith & de Bade, les souverains ecclésiastiques de cette partie de l'empire, sentirent tous également l'utilité du projet de M. Cassini, tous s'empresèrent d'y concourir. Il étoit à Vienne, le 6 juin 1761, jour du passage de Vénus; le temps ne lui permit d'en observer que la sortie : cependant le Soleil paroissoit par intervalle, & M. Cassini eut la facilité de faire quelques observations, d'en expliquer l'objet, & d'en développer la méthode à l'archiduc Joseph, qui étoit venu de Laxembourg pour assister à cette observation. M. Cassini se rappeloit avec plaisir, dans ses dernières années, cette circonstance de sa vie. Ce souvenir sembloit lui faire contempler avec un intérêt plus vif les efforts heureux & soutenus de ce prince pour rendre à la patrie les hommes & les biens que d'antiques abus lui avoient enlevés, détruire les obstacles que les préjugés & l'ignorance avoient opposés aux progrès de l'industrie & des lumières, à l'instruction comme au bonheur du peuple, & rétablir les habitans de ses vastes états dans ces droits naturels de l'homme, dont l'intolérance & la tyrannie féodale les avoient privés trop long-temps. Enfin, M. Cassini, toujours occupé de la perfection de son grand ouvrage, profita de la dernière paix pour proposer de joindre à quelques points pris sur la côte d'Angleterre, ceux qui avoient été déterminés sur celle de France, & lier ainsi sa carte générale de ce royaume à la carte des îles Britanniques, de même qu'il l'avoit déjà liée à celles des Pays-bas & de l'Allemagne. Le roi d'Angleterre a bien voulu approuver ce plan.

Si l'on se représente les détails immenses qu'exigeoit la

direction d'une telle entreprise, si on songe aux voyages longs & souvent pénibles, qui se multiplioient d'autant plus pour M. Cassini, qu'il ne s'étoit reposé sur personne des déterminations les plus importantes; si on observe enfin qu'un travail de ce genre, souvent presque purement mécanique & toujours minutieux, fatigue, dégoûte, & semble ne devoir laisser à l'esprit aucune activité pour d'autres travaux, on sera tenté de croire que la direction de la carte de France a dû occuper toute la vie de M. Cassini, & on jugera en même temps qu'en se bornant à ce seul ouvrage, il auroit encore assez bien rempli sa carrière, & mérité la reconnaissance de son pays comme celle des savans. Mais il fut de plus un astronome très-laborieux; & en voyant la liste de ses travaux astronomiques, on sera encore tenté de croire qu'il s'y est appliqué tout entier.

M. Cassini a publié, dans nos Mémoires, une suite presque complète de ces observations que le ciel présente chaque année, dont chacune prise en elle-même est sans doute peu utile aux progrès de la science, & n'exige, pour être bien faite, que de l'attention & l'habitude d'observer, mais dont l'ensemble est nécessaire à la perfection des théories astronomiques, ou peut servir de base à des théories nouvelles; (c'étoit un devoir que lui imposoit le titre de directeur de l'Observatoire).

Il a traité de plus, séparément, plusieurs des questions fondamentales de l'astronomie. L'on trouve dans les Mémoires qu'il a donnés, des recherches sur la parallaxe du Soleil, de la Lune, de Vénus & de Mars; un travail suivi sur les réfractions astronomiques & sur le changement que la température produit dans la quantité ou dans la loi de la réfraction; un grand nombre d'observations sur l'obliquité de l'écliptique, sur la loi des variations qu'elle éprouve; & un examen des différentes méthodes d'observer les hauteurs solsticiales, d'après lequel il préfère celle qui consiste à prendre la distance du Soleil à des étoiles fixes dans lesquelles on ne reconnoît point de mouvement propre qui

puisse nuire à l'exactitude des déterminations, ou pour lesquelles la loi de ces mouvemens est bien connue. Pendant plus de cinquante ans, il a cultivé l'astronomie dans un temps que la mesure des degrés du méridien, deux passages de Vénus sur le Soleil, si importans pour nous en apprendre la distance, une disparition de l'anneau de Saturne, l'application du calcul aux perturbations des planètes & aux mouvemens de l'axe terrestre, l'introduction des méthodes analytiques dans les questions astronomiques, la découverte de plus de comètes qu'on n'en avoit observé depuis l'origine des sciences, enfin celle d'une nouvelle planète, rendent une des époques les plus brillantes de l'astronomie, qui, par l'invention des lunettes acromatiques & de plusieurs instrumens, acquéroit dans le même temps des moyens nouveaux d'étendre les observations & de les faire avec plus d'exactitude; & il est peu de ces objets si intéressans pour cette science, sur lesquels M. Cassini n'ait été utile par ses observations ou par ses recherches.

Il étoit d'un caractère franc & ouvert; son ame paroissoit inaccessible à la haine; mais il étoit très-sensible à l'amitié, & son penchant sembloit le porter de préférence vers les hommes dont il se seroit éloigné s'il avoit pu connoître ce sentiment pénible que la supériorité des talens ou de la réputation réveille trop souvent. Il jouissoit du succès des autres, non avec cette fierté noble d'un homme qui compte sur ceux qu'il mérite, ou qui a le courage de s'en passer, mais par un sentiment naturel, par l'effet d'un premier mouvement & sans aucun retour sur lui-même. L'existence d'un nouveau talent, une nouvelle couronne qu'un de ses confrères ajoutoit à sa gloire, étoit pour lui une jouissance nouvelle, & le plaisir naïf & pur qu'il éprouvoit alors, se peignoit dans ses regards & dans sa contenance.

M. Cassini eut des liaisons dans différentes classes de la société, & ne fut déplacé dans aucune. Estimé des magistrats, ses confrères, par sa probité, il étoit cher à ses confrères Académiciens par sa simplicité & sa douceur; quoiqu'admis

dans la familiarité des Grands, il sut conserver leur estime. On lui a reproché d'avoir trop cherché, peut-être, à s'approcher d'eux. En effet, l'espèce de domination qu'ils aiment à exercer sur les occupations, sur les sentimens même de ceux qu'ils nomment leurs amis, semble incompatible avec cette liberté & cette indépendance dont la perte enlève au talent la moitié de ses forces & de ses ressources. Plus la raison nous a convaincus de l'égalité primitive que la nature a mise entre les hommes, plus elle nous fait une loi d'éviter l'intimité de ceux que l'opinion a placés au-dessus de nous. Il est d'ailleurs difficile, en formant ces liaisons, d'échapper au soupçon de partager les motifs de vanité ou d'intérêt qui engagent les hommes ordinaires à en braver les inconvéniens & le danger ; mais du moins elles n'ont valu à M. Cassini ni fortune, ni places, ni titres, & cette exception à l'usage est trop rare pour qu'il puisse avoir besoin d'apologie.

On doit sans doute respecter le philosophe qui fait éviter ces liaisons à la fois si séduisantes & si dangereuses ; cependant, si tous ceux qui ont des lumières avoient le courage & la prudence de s'y refuser, ce seroit un malheur & pour les sciences & pour les grands eux-mêmes, & sur-tout pour ceux sur le sort desquels les grands ont de l'influence. Il ne faut donc pas blâmer les savans qui imiteroient, à cet égard, M. Cassini, pourvu toutefois qu'ils n'oublient point que pour être exempts de tout reproche, ils doivent imiter aussi son désintéressement & sa modestie.

M. Cassini étoit né avec une constitution très-forte ; ses travaux pour la géographie, l'avoient obligé à des voyages pénibles ; gravissant des montagnes escarpées où il falloit braver, dans une même saison, tantôt un soleil brûlant, tantôt le froid de leurs neiges éternelles, passant souvent des nuits en plein air ou dans quelques chaumières écartées, obligé de s'y contenter d'une nourriture grossière ou malsaine, son tempérament avoit résisté à ces fatigues, & sem-

bloit avoir acquis de nouvelles forces. Mais il fut attaqué d'une rétention d'urine dont les suites le condamnèrent, les douze dernières années de sa vie, à des incommodités habituelles & douloureuses, souvent même à des souffrances cruelles. Il supporta cet état avec ce courage calme d'une ame forte, unie à des organes vigoureux : son activité, sa douceur, sa gaieté, n'en étoient pas altérées.

Cette disposition de l'ame est un des meilleurs moyens de combattre les maladies & d'y résister ; aussi M. Cassini étoit-il resté dans un état qui laissoit l'espérance de le conserver encore long-temps, lorsqu'au mois d'août 1784, il fut attaqué de la petite vérole, à laquelle il succomba le 4 septembre.

Il a laissé une fille & un fils, M. le comte de Cassini, membre de cette compagnie, & directeur de l'Observatoire, comme ses ancêtres, qui, en recueillant cette partie si noble de leur héritage, a aussi succédé à l'attachement de l'Académie pour un nom si cher aux sciences.

ÉLOGE

DE M. LE COMTE DE MILLY.

NICOLAS-CHRISTIERN DE THY, comte de Milly, des académies de Madrid & de Harlem, associé-libre de celle des Sciences, naquit le 18 juin 1728.

La famille de M. le comte de Milly est établie dans le Beaujolois, depuis plus de quatre siècles, & la conformité du nom & des armes semble prouver qu'elle est une branche de l'ancienne maison de Thy, originaire de l'Auxois, connue dès le commencement du onzième siècle, & également illustrée par ses alliances & par les grandes charges qu'elle a occupées à la cour des ducs de Bourgogne de la première race.

M. le comte de Milly suivit, comme ses ancêtres, le parti des armes. N'ayant qu'une fortune médiocre & point de parens à la cour, il ne pouvoit porter les espérances au-dessus de l'avancement tardif & borné que l'on peut attendre du temps & des services; mais il croyoit remplir un devoir. Il avoit peu d'ambition, & il trouvoit des ressources contre le dégoût & contre l'ennui, dans son penchant pour les plaisirs de la jeunesse, & dans un goût plus vif encore pour les études sérieuses.

Dans la guerre de 1741, il se trouva aux batailles de Laufeld & de Raucoux; & dans la guerre de 1756, à celles de Rosbac, de Crevelt & de Minden. L'année qui suivit cette dernière bataille, il entra au service de M. le duc de Wirtemberg, allié de la France; &, en moins d'un an, il devint colonel, adjudant-général, chambellan & chevalier de

l'ordre de l'Aigle-rouge. Mais ce qui fut plus important pour le bonheur du reste de sa vie, la fin de la guerre & le loisir dont jouissent si paisiblement dans les cours ceux que l'intrigue n'y occupe pas, permirent à son amour pour les sciences de se développer & de s'exercer. Le goût des arts & le desir de servir l'humanité le conduisirent à l'étude de la chimie. Lorsqu'il revint dans sa patrie, en 1771, il y rapporta un ouvrage très-détaillé, sur les procédés employés dans la fabrication de la porcelaine de Saxe; & l'Académie jugea cet ouvrage digne d'entrer dans la collection des arts.

Il obtint, à cette époque, l'agrément d'une charge de lieutenant des gardes-suiſſes de Monsieur, & le brevet de colonel. Depuis plus de dix ans il avoit mérité & obtenu la croix de Saint-Louis; il se crut permis alors d'abandonner la carrière militaire, pour se livrer uniquement aux sciences, & quelques années après, une place d'associé-libre dans l'Académie fut la récompense de ce dévouement.

On ne doit pas attendre d'un homme qui, depuis quatorze ans jusqu'à plus de quarante, a vécu dans les garnisons, dans les camps & dans les cours; ces grands ouvrages, qui ne peuvent être que le fruit d'un travail constant & suivi, & qui exigent qu'on soit accoutumé dès l'enfance à se rendre maître de son temps, à dominer ses passions & ses goûts, à déployer toutes ses forces. Aussi lorsque M. de Milly a donné ses recherches sur l'activité des dissolvans, auxquels on imprime un mouvement rapide & continu; sur l'application de cette idée aux effets médicaux des bains; sur l'acidité de l'air fixe, alors peu connue & même contestée; sur la nature du fluide aériforme qui se dégage des pores du corps humain lorsqu'il est plongé dans l'eau; sur l'emploi d'une chaleur graduée &, soutenue dans l'analyse animale & végétale; sur les couleurs que les préparations de platine peuvent fournir à la peinture; enfin sur la revivification des chaux métalliques par l'électricité, il eût été injuste de se plaindre qu'il se bornât à présenter de simples essais, &

on a dû applaudir aux vues ingénieuses ou utiles que ces essais renferment.

Nous devons à M. le comte de Milly l'art du poëlier. Cet art est proprement celui d'employer toute la chaleur que peut donner une certaine masse de combustible à échauffer l'air d'un appartement ou d'une maison, & d'obtenir dans toutes les parties d'une même pièce une chaleur uniforme que l'on puisse graduer facilement.

La nécessité l'a fait naître dans les pays du Nord, dans les forêts de l'Allemagne. C'est-là que M. de Milly l'avoit observé, & il avoit senti combien on devoit desirer de le voir se répandre & se perfectionner dans les climats plus tempérés, y rendre les habitations plus saines & plus commodes, & donner en même temps les moyens d'épargner une denrée qui devient d'autant plus précieuse & plus rare, que les pays sont & plus peuplés & mieux cultivés. Mais malheureusement les hommes opulens ont encore plus de vanité que de mollesse, & préfèrent l'agrément ou la magnificence à la commodité réelle; tandis que ceux qui auroient le plus besoin d'épargner sur leur dépense, ne sont pas assez riches pour songer aux moyens d'être économes.

Ce n'est pas que dans ces climats plus doux, la rareté réelle ou apparente des combustibles ne se soit fait sentir plus d'une fois; mais au lieu de chercher dans la physique des moyens, ou de ménager ces substances, ou d'en augmenter la production, on a cru, par une erreur que l'habitude doit en quelque sorte rendre excusable, pouvoir réparer, par des réglemens, un mal dont la multiplicité des réglemens inutiles étoit déjà la principale cause.

La chimie n'a été pendant long-temps qu'un recueil de procédés presque tous secrets, ou qui du moins avoient commencé par l'être. Il n'est donc pas étonnant que ceux qui cultivent cette science soient plus disposés que les autres savans à croire qu'il en existe encore; à s'occuper de pénétrer ceux qu'on annonce, à donner quelque confiance aux

hommes qui leur promettent de les initier dans ces mystères. M. le comte de Milly partagea cette foiblesse avec des chimistes très-célèbres. Mais heureusement ce goût ne lui avoit pas fait perdre celui des recherches vraiment scientifiques, c'étoit pour lui une diversion à des travaux plus sérieux, un véritable amusement beaucoup moins frivole que la plupart de ceux auxquels se livrent les hommes même qui passent pour les plus sages auprès de la multitude.

M. le Comte de Milly, avide de connoissances, & prompt à embrasser tous les moyens d'en acquérir, avoit voulu être admis dans toutes les sociétés où il pouvoit espérer de trouver quelques lumières, & sur-tout dans celles qui, faisant profession d'avoir une doctrine secrète, excitent une curiosité plus vive. Il croyoit d'ailleurs ces associations utiles en général pour réunir entr'eux les hommes qui ont secoué le joug des préjugés populaires, & qui, s'ils manquent d'un point de réunion, sont exposés à se trouver sans force contre les troupes plus ou moins nombreuses que l'erreur rassemble sous cent drapeaux différens.

Il s'étoit attaché particulièrement à cette société, dont l'origine est inconnue, ou du moins obscurcie par des fables, qui, répandue dans l'Europe depuis plusieurs siècles, tantôt ignorée & tantôt l'objet d'une curiosité inquiète, a essuyé souvent des persécutions sans avoir jamais mérité de reproches; qui, en cherchant à cacher le véritable esprit de son institution sous un langage bizarre, & sous une foule de cérémonies burlesques, a cependant toujours compté des sages parmi ses membres; qui, enfin, ne se faisant connoître au-dehors que par des actions de bienfaisance, eût mérité peut-être que la calomnie respectât ses mystères. S'il arrive un jour qu'ils soient dévoilés, on n'y trouvera sans doute que les précautions nécessaires, dans les siècles d'ignorance, à des hommes réunis par le besoin d'exercer librement leur raison. Eh! qui pourroit encore soupçonner l'innocence de ces mystères, lorsqu'on voit parmi les

noms qu'unifioit cette confraternité, celui de ce jeune prince, le seul qui depuis les temps historiques ait sacrifié sa vie pour l'humanité, tandis que tant d'autres ne l'ont immolée qu'à l'ambition ou à la gloire *?

M. le comte de Milly vivoit dans le monde, & il y étoit aimé; doux, complaisant, facile, ayant même autant de galanterie qu'on peut en avoir sans être frivole, c'étoit seulement dans la société des savans qu'il laissoit apercevoir quelques traces d'une susceptibilité très-délicate; mais il avoit assez d'empire sur lui même pour revenir sans peine, & soumettre à la raison les foiblesses d'un amour-propre d'autant plus sensible, mais aussi d'autant plus excusable, que, dans le peu de temps qu'il avoit consacré aux sciences, il n'avoit pu acquérir ces titres éclatans qui élèvent au-dessus de l'opinion une ame avide de renommée. Aussi dans la seule discussion qu'il ait eue avec ses confrères, lorsqu'il en vit plusieurs combattre ce qu'il avoit avancé sur la revivification des chaux métalliques par l'électricité, il parut d'abord très-sensible à cette contradiction, mais il ne fit aucun effort pour soutenir son opinion, ne répondit pas aux objections, & laissa tranquillement à d'autres phisiciens le soin de le défendre.

Né avec un tempérament robuste; & s'étant assujetti au régime pithagorien dans toute sa rigueur, M. le comte de Milly paroissoit devoir se promettre une longue carrière; cependant nous l'avons perdu le 17 Septembre 1784, à l'âge de 56 ans seulement. Il avoit appris ou découvert plusieurs remèdes particuliers; & comme il ne se permettoit pas de les donner à d'autres sans les avoir éprouvés sur lui-même; on a prétendu que ces essais avoit altéré sa constitution. L'enthousiasme qu'il montrait pour ces remèdes, dans les premiers momens, a donné lieu à cette opinion; mais il savoit bientôt les juger de sang-froid, & cette

* Le prince Léopold de Brunswick.

première chaleur n'étoit qu'une preuve de plus de sa bonne foi & de son zèle pour la conservation des hommes.

Si ceux qui l'ont peu connu étoient tentés de lui faire quelque reproche sur cet enthousiasme, l'estime dont il jouissoit parmi nous suffiroit pour en laver sa mémoire. On fait que, depuis son institution, l'Académie n'a cessé d'opposer un zèle infatigable à toutes ces merveilles si sagement couvertes par leurs premiers inventeurs, des voiles du mystère, & qu'elle a regardé constamment le soin de s'élever contre elles & d'en détromper le public, comme un de ses premiers devoirs, comme un moyen de servir à la fois les sciences & l'humanité.

M É M O I R E S
D E
M A T H É M A T I Q U E
E T
D E P H Y S I Q U E.

MÉMOIRES

M E M O I R E S
D E
M A T H É M A T I Q U E
E T
D E P H Y S I Q U E,
T I R É S D E S R E G I S T R E S
de l'Académie Royale des Sciences.
Année M. DCCLXXXIV.

M É M O I R E
*Sur les Inégalités séculaires des Planètes
& des Satellites.*

Par M. DE LA PLACE.

I.

LES Planètes sont assujetties, en vertu de leur action mutuelle, à des inégalités qui troublent l'ellipticité de leurs orbites. Les unes sont périodiques & dépendent de
Mém. 1784. A

la position de ces corps , soit entr'eux , soit à l'égard de leurs aphélies ; elles sont peu considérables relativement à l'équation du centre , & se rétablissent d'elles-mêmes , après un petit nombre d'années ; les autres altèrent les élémens des orbites par des nuances presque insensibles à chaque révolution des Planètes ; mais ces altérations , en s'accumulant sans cesse , finissent par changer entièrement la nature & la position des orbites : comme la suite des siècles le rend très-remarquables , on les a nommées *inégalités séculaires*.

On peut considérer les inégalités périodiques , comme autant d'oscillations très-petites que fait chaque Planète autour d'un point en mouvement sur l'ellipse qu'elle décrirait par l'action seule du Soleil ; & si l'on imagine que les élémens de cette ellipse subissent en même-temps des variations très-lentes , & dont les périodes embrassent un grand nombre de siècles , on aura une juste idée des inégalités séculaires.

Parmi ces inégalités , la plus intéressante est celle qui peut altérer les moyens mouvemens des Planètes. La plupart des Astronomes ont admis une équation séculaire proportionnelle aux carrés des temps , dans les moyens mouvemens de Jupiter & de Saturne. Les Géomètres qui se sont occupés avec le plus de succès de la théorie de ces Planètes , M.^r Euler & de la Grange avoient cru en trouver la cause dans l'action mutuelle de ces deux corps ; mais leurs résultats différoient tellement entr'eux , qu'il y avoit lieu d'y soupçonner quelque erreur ; c'est ce qui me détermina à reprendre cette matière , & à la traiter avec tout le soin que mérite son importance. En portant la précision jusqu'aux troisièmes puissances inclusivement des excentricités & des inclinaisons des orbites , je trouvai que la théorie ne donne aucunes inégalités séculaires dans les moyens mouvemens & dans les moyennes distances des Planètes au Soleil ; d'où je conclus que ces inégalités sont nulles ou du moins insensibles , depuis l'époque des observations les plus anciennes jusqu'à nos jours.

Ce résultat suffit aux besoins de l'Astronomie dont les

plus anciennes observations qui nous soient parvenues avec quelque vraisemblance, ne remontent pas au-delà de cinq mille ans. M. de la Grange l'a étendu depuis à un temps illimité, en faisant voir par une analyse ingénieuse & simple, que les moyennes distances des Planètes au Soleil sont immuables, & leurs moyens mouvemens uniformes, ce qui est également vrai pour les Satellites, puisqu'ils forment autour de leurs Planètes principales, des systèmes semblables à celui des Planètes autour du Soleil. Ainsi les Planètes & les Satellites conservent toujours les mêmes distances moyennes aux foyers des forces principales qui les animent, du moins lorsque l'on n'a égard qu'à leur action mutuelle, & lorsque l'on suppose leurs moyens mouvemens incommensurables entr'eux, comme cela existe pour les Planètes de notre système.

Il est cependant impossible de ne pas reconnoître des variations très-sensibles dans les révolutions de Jupiter & de Saturne. Si l'on compare entr'elles, les observations de ces deux Planètes, faites depuis le renouvellement de l'Astronomie; on trouve constamment le mouvement de Jupiter plus rapide, & celui de Saturne plus lent, que par la comparaison des observations modernes avec les anciennes. Halley, dans ses Tables de Jupiter, emploie une équation séculaire, additive au moyen mouvement, proportionnelle au carré du temps, & de $3^d 49'$, en deux mille ans. Cela suppose qu'en comparant les observations modernes entr'elles, il a trouvé le mouvement annuel de Jupiter, plus grand de $6'',9$, que par leur comparaison avec les anciennes observations. Ce grand Astronome emploie pareillement dans ses Tables de Saturne, une équation séculaire, soustractive du moyen mouvement, & de $9^d 16'$, en deux mille ans; ce qui indique que la comparaison des observations modernes entr'elles, lui a donné le mouvement annuel de Saturne, moindre de $16'',7$, que celui qui résulte de leur comparaison avec les anciennes. En effet, les oppositions de Saturne de 1594, 1595,

4 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

1596 & 1597, comparées à celles de 1713, 1714, 1715, 1716 & 1717, donnent un mouvement annuel plus petit de 16", que les oppositions de 1714 & de 1715, comparées à celle de l'an 228 avant notre Ere.

Dans l'impossibilité d'expliquer ces variations par l'action seule des Planètes, je soupçonnai d'abord que l'action des Comètes en étoit la cause ; mais en les considérant ensuite avec attention, leur marche me parut s'accorder si bien avec le résultat de l'action des Planètes, que j'abandonnai cette hypothèse. Une propriété générale de l'action des Planètes entr'elles, est que si l'on n'a égard qu'aux quantités qui ont de très-longues périodes, la somme des masses de chaque Planète, divisées respectivement par les grands axes de leurs orbites, reste toujours à très-peu-près constante ; d'où il suit que les carrés des moyens mouvemens étant réciproques aux cubes de ces axes, si le mouvement de Saturne se ralentit par l'action de Jupiter, celui de Jupiter doit s'accélérer par l'action de Saturne, ce qui est conforme à ce que l'on observe. De plus, en supposant avec M. de la Grange, que la masse du Soleil étant l'unité, celle de Jupiter est $\frac{1}{1067,195}$, & celle de Saturne est $\frac{1}{3358,49}$; on trouve que le retardement de Saturne doit être à l'accélération de Jupiter, à très-peu-près, comme 7 est à 3 ; ainsi l'équation séculaire de Saturne étant supposée de 9^d 16', celle de Jupiter doit être de 3^d 58', ce qui ne diffère que de 9 minutes du résultat de Halley. Il est donc fort probable que les variations observées dans les mouvemens de Jupiter & de Saturne, sont un effet de leur action mutuelle ; & puisqu'il est constant que cette action ne peut y produire aucunes inégalités, soit constamment croissantes, soit périodiques, mais d'une période très-longue & indépendante de la situation de ces Planètes, & qu'elle n'y cause que des inégalités dépendantes de leur configuration entre elles ;

il est naturel de penser qu'il existe dans leur théorie, une inégalité considérable de ce genre, dont la période est fort longue, & d'où résultent ces variations.

En examinant les circonstances du mouvement de Jupiter & de Saturne, on aperçoit aisément que leurs moyens mouvemens approchent beaucoup d'être commensurables, & que cinq fois le moyen mouvement de Saturne est à très-peu près égal à deux fois celui de Jupiter; d'où j'ai conclu que les termes qui, dans les équations différentielles du mouvement de ces Planètes, ont pour argument, cinq fois la longitude moyenne de Saturne, moins deux fois celle de Jupiter, pouvoient devenir sensibles par les intégrations, quoique multipliés par les cubes & les produits de trois dimensions des excentricités & des inclinaisons des orbites. J'ai regardé conséquemment ces inégalités, comme une cause très-vraisemblable des variations observées dans les mouvemens de Jupiter & de Saturne. La probabilité de cette cause & l'importance de cet objet, m'ont déterminé à entreprendre le calcul long & pénible, nécessaire pour m'en assurer. Le résultat de ce calcul a pleinement confirmé ma conjecture, en me faisant voir, 1.^o qu'il existe dans la théorie de Saturne, une grande équation d'environ 47', dont la période est à peu-près de huit cents soixante-dix-sept ans, & dépend de cinq fois le moyen mouvement de Saturne, moins deux fois celui de Jupiter; 2.^o que dans la théorie de Jupiter, il existe une équation d'un signe contraire, d'environ 20', & dont la période est la même.

Si l'on nomme $n t$ le moyen mouvement syderal de Jupiter, depuis 1700; $n' t$ celui de Saturne: je trouve qu'en n'ayant égard qu'aux inégalités précédentes, la longitude comptée de l'équinoxe de 1700, est pour Jupiter

$$n t + \epsilon + 20' . \sin. (5 n' t - 2 n t + 49^d 8' 40''),$$

& que pour Saturne elle est

$$n' t + \epsilon' - 46' 50'' . \sin. (5 n' t - 2 n t + 49^d 8' 40'').$$

ϵ & ϵ' étant deux constantes qui dépendent de la longitude des deux Planètes au commencement de 1700.

J'ai déterminé ces valeurs d'après les élémens des Tables de Halley, & en adoptant les déterminations précédentes des masses de Jupiter & de Saturne; j'ai seulement augmenté le mouvement annuel de Saturne donné par ces Tables, de $16'',7$, & j'ai diminué celui de Jupiter de $6'',9$, pour ramener ces mouvemens à ceux que Halley auroit trouvés par la comparaison des observations modernes avec les anciennes. Les coefficients numériques de ces valeurs cessent d'avoir lieu après un temps considérable, à cause de la variabilité des élémens des orbites; mais ils peuvent servir sans erreur sensible depuis Tycho jusqu'à nous, ce qui suffit pour la comparaison des observations modernes: il est facile d'ailleurs de les étendre à un temps quelconque. On peut observer que le coefficient relatif au mouvement de Jupiter, a un signe contraire à celui du coefficient de Saturne, & qu'il est à ce dernier, à très-peu-près, dans le rapport de 3 à 7.

Si l'on compare les formules précédentes aux observations, on trouve entre les unes & les autres un accord très-satisfaisant, & qui fournit une nouvelle preuve de l'admirable théorie de la pesanteur universelle. Ainsi, par exemple, l'opposition de Saturne de l'an 228 avant notre Ere, comparée à celles de 1714 & de 1715, doit donner, à peu-près, le moyen mouvement de Saturne, parce que l'inégalité précédente est peu sensible dans le grand intervalle qui sépare ces oppositions; mais en comparant l'opposition de 1595 avec celle de 1715, le mouvement annuel de Saturne doit, suivant nos formules, paroître plus petit que le véritable, de $16'',8$; les observations donnent $16''$; l'imperfection des observations du seizième siècle ne permet pas un plus parfait accord. Le mouvement annuel de Saturne doit donc paroître maintenant se ralentir de 16 à $17''$; & comme, par les formules précédentes, l'accélération apparente de Jupiter est au ralentissement apparent de Saturne, dans le rapport de 3 à 7;

le mouvement annuel de Jupiter doit paroître s'accélérer d'environ $7''$, ce qui est entièrement conforme aux déterminations de Halley. Ces deux Phénomènes ont été à leur *maximum* vers 1580; depuis cette époque, les moyens mouvemens apparens se sont rapprochés sans cesse, des véritables moyens mouvemens.

M. Lambert a publié dans les Mémoires de Berlin pour l'année 1773, un travail intéressant sur les inégalités de Jupiter & de Saturne. Il a cherché à déterminer empiriquement la loi des erreurs des Tables de Hallei, & il a trouvé qu'il falloit corriger les moyens mouvemens des Tables de Saturne, en leur ajoutant, à partir de 1640, une équation séculaire proportionnelle au carré des temps, & de $6',5$ pour le premier siècle; & comme Hallei emploie pour cette Planète, une équation séculaire soustractive du moyen mouvement, & de $1',4$ pour le premier siècle; il est clair que la correction de M. Lambert revient à ajouter depuis 1640, au moyen mouvement de Saturne, supposé uniforme, une équation séculaire de $5',1$ pour le premier siècle. Cet illustre Géomètre applique pareillement aux mouvemens des Tables de Jupiter, une équation séculaire soustractive, & de $3',2$ pour le premier siècle, à partir de 1657. Ces corrections ont été publiées dans le second volume du recueil des Tables astronomiques de l'Académie de Berlin: elles ont une marche contraire à celle des équations séculaires de Halley, & d'ailleurs elles sont incompatibles avec les observations anciennes; mais les Savans Editeurs de ces Tables, observent « que selon toute apparence, l'équation empirique de M. Lambert n'augmente pas toujours dans le rapport des carrés des temps; car il semble qu'elle varie, que ces variations sont périodiques & qu'il faudra une longue suite d'années pour en découvrir la loi; par conséquent cette équation ne servira pour les temps à venir, que jusqu'à ce qu'on puisse déterminer par les observations qu'on fera dans la suite, quelle est sa propriété ».

Si l'on transporte à l'époque de 1640, la formule

précédente relative à Saturne, & que l'on en réduise le sinus dans une suite ordonnée par rapport aux puissances du temps écoulé depuis cette époque; on trouve que le terme proportionnel au carré du temps est positif & de $5', 0$ pour le premier siècle, ce qui s'accorde quant au signe, avec le résultat de M. Lambert, & ce qui n'en diffère que de $0', 1$ pour la quantité. La formule relative à Jupiter, transportée à l'époque de 1657, & réduite en série, donne pour le terme proportionnel au carré du temps, une quantité négative & de $2', 7$ pour le premier siècle, ce qui s'accorde quant au signe, avec le résultat de M. Lambert, & ce qui n'en diffère que de $0', 5$ pour la quantité. Il n'est donc pas douteux que la vraie loi de l'équation empyrique de cet Auteur, ne soit renfermée dans nos formules, & il est assez remarquable qu'il ait approché aussi près des résultats de la théorie, par la comparaison seule de cent douze ans d'observations. Au reste la réduction des sinus en série, en rejetant les puissances du temps supérieures au carré, ne peut être employée que dans un intervalle de soixante ans.

Les expressions de la longitude de Jupiter & de Saturne, renferment encore des termes très-sensibles, qui coïncideroient avec les termes dûs au mouvement elliptique, si l'on avoit exactement $5 n^1 = 2 n$.

Ces termes sont pour Jupiter

$$2' 39'' . \sin. (3 n t - 5 n^1 t - 41^d 56')$$

$$+ 58'' . \sin. (5 n^1 t - n t - 34^d 31' 33''),$$

& pour Saturne,

$$- 13' 16'' . \sin. (2 n t - 4 n^1 t - 2^d 27' 4'')$$

$$- 2' 40'' . \sin. (6 n^1 t - 2 n t - 60^d 30' 16'').$$

On peut les considérer comme le résultat de variations dans les excentricités des orbites & dans la position des absides, & dont la période est de huit cens soixante-dix-sept ans. Ils expliquent pourquoi dans le dernier siècle & dans celui-ci, l'accroissement de l'équation du centre de

Jupiter

Jupiter , la diminution de celle de Saturne , & les mouvemens de leurs aphélies ont paru plus grands qu'ils n'ont dû l'être en vertu des seules inégalités séculaires.

Pour avoir la longitude vraie de Jupiter & de Saturne , il faut ajouter aux termes précédens , ceux qui appartiennent au mouvement elliptique , & ceux que produisent les perturbations , en ayant égard aux premières puissances des excentricités des orbites. Les Géomètres ont déjà considéré ces derniers termes ; mais les différences que présentent leurs résultats , en rend la vérification indispensable. J'ai rempli cet objet dans une nouvelle théorie de ces deux Planètes , qui paroîtra dans le volume suivant de ces Mémoires. Il résulte de cette théorie , que toutes les oppositions anciennes & modernes de Jupiter & de Saturne , peuvent être représentées avec la précision dont elles sont susceptibles , au moyen des inégalités précédentes auxquelles il faut par conséquent attribuer les dérangemens singuliers observés dans le mouvement de Saturne , & dont on ignoroit les loix & la cause. Il auroit fallu plusieurs siècles d'observations suivies , pour déterminer empiriquement ces inégalités , à cause de la longueur de leur période ; ainsi sur ce point , la théorie de la pesanteur a devancé l'observation.

Je reviens présentement à la Loi générale de l'uniformité des moyens mouvemens célestes. Ceux des trois premiers Satellites de Jupiter offrent un rapport remarquable , & qui peut donner lieu de craindre que cette loi ne soit pas observée à leur égard. La discussion de ce rapport , de la cause qui le produit , & de son influence sur les mouvemens des Satellites , m'a paru mériter l'attention des Géomètres & des Astronomes.

Les observations nous apprennent que le moyen mouvement du premier satellite de Jupiter , est environ deux fois plus grand que celui du second , qui lui-même est à-peu-près le double de celui du troisième satellite ; & la théorie de la pesanteur universelle fait voir que ces rapports sont la source des principales inégalités de ces Astres. Il suit

de-là que la différence des moyens mouvemens du premier & du second Satellite, est égale à deux fois la différence des moyens mouvemens du second & du troisième; mais ce rapport est incomparablement plus exact que les précédens, & les moyens mouvemens des Tables en approchent tellement, qu'il faut un très-long intervalle pour que la petite quantité dont elles s'en éloignent, puisse devenir sensible. De-là naissent plusieurs phénomènes constans dans la configuration des trois premiers Satellites; tel est, entr'autres, l'impossibilité de les voir s'éclipser à la-fois, d'ici à un grand nombre de siècles, & si l'on part des moyens mouvemens & des époques que M. Wargentin a employées dans ses Tables, on trouve que cela ne peut arriver qu'après 1,317,900 ans (*Mémoires d'Upsal, année 1743, page 41*). Une différence de six tierces dans le mouvement annuel du second Satellite, suffiroit pour rendre ce phénomène à jamais impossible, & M. Wargentin ne répond qu'à une ou deux secondes près, des mouvemens annuels dont il a fait usage.

Maintenant on peut établir comme une règle générale, que si le résultat d'une longue suite d'observations précises, approche d'un rapport simple, de manière que la différence soit inappréciable par les observations, & puisse être attribuée aux erreurs dont elles sont susceptibles; ce rapport est probablement celui de la Nature. Ainsi les observations n'ayant fait apercevoir aucune différence entre les moyens mouvemens de révolution de la Lune sur elle-même & autour de la Terre, on est fondé à supposer que ces deux mouvemens sont rigoureusement les mêmes. En appliquant cette règle aux mouvemens des trois premiers satellites de Jupiter, nous pouvons en conclure avec une grande probabilité, que la différence des moyens mouvemens du premier & du second, est exactement égale au double de la différence des moyens mouvemens du second & du troisième. Cette égalité n'est pas l'effet du hasard, & il est contre toute vraisemblance de supposer que ces trois corps

ont été placés primitivement aux distances qu'elle exige ; il est donc naturel de penser que leur attraction mutuelle en est la véritable cause. C'est ainsi que l'action de la Terre sur la Lune, établit entre les moyens mouvemens de rotation & de révolution de ce Satellite, une égalité rigoureuse ; quoiqu'à l'origine ces deux mouvemens aient pu différer entr'eux. Je me propose dans ce Mémoire, de discuter ce point important du système du monde, & d'examiner si le rapport que présentent les moyens mouvemens des trois premiers satellites de Jupiter, doit se maintenir sans cesse en vertu des Loix de la pesanteur universelle. Cette recherche est très-intéressante pour la théorie du second Satellite ; les principales inégalités qu'il éprouve, dépendent des actions du premier & du troisième ; mais le rapport précédent donne à ces inégalités la même période, & les fond en une seule qui, dans les Tables, forme la grande équation de ce Satellite ; si ce rapport n'étoit pas rigoureux, ces deux inégalités se sépareroient dans la suite des siècles, & les Tables du second Satellite cesseroient de représenter son mouvement. Voici maintenant ce qui résulte de mon analyse.

J'observe d'abord que les termes proportionnels aux premières puissances des masses perturbatrices, ne pouvant pas donner l'explication du rapport dont je viens de parler, il faut la chercher dans les termes qui dépendent des carrés & des produits de ces masses ; je discute en conséquence les termes de cet ordre qui peuvent produire ce rapport. En nommant t le temps, $n t$, $n' t$, $n'' t$, les moyens mouvemens du premier, du second & du troisième Satellite ; en désignant par s , la quantité $n - 3 n' + 2 n''$, & par V , la longitude moyenne du premier Satellite, comptée d'un point fixe sur l'orbite de Jupiter, moins trois fois celle du second, plus deux fois celle du troisième ; je trouve que les termes multipliés par les produits deux à deux, des masses de ces Satellites, introduisent dans les valeurs de s & de V , des quantités proportionnelles au temps. En les

faisant ensuite disparaître par la méthode que j'ai donnée ailleurs pour cet objet, je parviens à deux équations différentielles du premier ordre entre s , V & t . Leurs intégrales comparées aux observations, donnent une explication complète du phénomène dont il s'agit, & présentent en même-temps plusieurs conséquences intéressantes.

La première est que s & V sont des quantités périodiques, & qu'ainsi en faisant abstraction des quantités de cette nature, on a rigoureusement $n + 2n'' = 3n'$. On est donc assuré par-là que la différence des moyens mouvemens du premier & du second Satellite, est rigoureusement égale à deux fois la différence des moyens mouvemens du second & du troisième. C'est une condition à laquelle les moyens mouvemens des Tables doivent satisfaire, & comme ceux dont M. Wargentin a fait usage, la remplissent à très-peu-près, on doit en conclure qu'ils sont fort approchés, & qu'ils n'ont besoin que de très-légères corrections.

La seconde conséquence est que la condition précédente n'exige point qu'à l'origine, les trois Satellites aient été exactement placés aux distances respectives qui, par les loix de Képler, donnent l'équation $n + 2n'' = 3n'$; il suffit qu'ils en aient été peu éloignés, & alors leur attraction mutuelle établit entre leurs moyens mouvemens, cette égalité rigoureuse.

Une troisième conséquence est que l'on ne doit point craindre que dans la suite des siècles, les Tables du second Satellite cessent d'être exactes, du moins relativement à leur équation principale.

Enfin, la quatrième conséquence que je tire de mon analyse, est que si l'on fait abstraction des quantités périodiques, l'angle V est de six signes; c'est-à-dire, que la longitude moyenne du premier Satellite, moins trois fois celle du second, plus deux fois celle du troisième, est égale à 180° ; c'est une nouvelle condition que les Tables doivent remplir exactement. Celles de M. Wargentin donnent au commencement de 1760, $V = 180^\circ + 30'$, ce qui

s'éloigne peu de 180^d ; suivant les Tables de M. Bailli, la valeur moyenne de V ne s'en éloignoit que de $12'$ à la même époque ; ces écarts sont une imperfection des Tables, & doivent être comptés parmi les causes des erreurs dont elles sont encore susceptibles.

L'angle V est soumis à une inégalité périodique analogue aux oscillations d'un pendule ; elle affecte inégalement les mouvemens des trois Satellites, suivant des rapports dépendans de leurs masses & de leurs distances au centre de Jupiter ; la durée de sa période dépend des mêmes quantités. La masse du second Satellite est assez bien déterminée par les inégalités qu'elle produit dans le mouvement du premier ; mais les masses du premier & du troisième Satellite sont encore inconnues : il existe seulement entr'elles un rapport que donnent les inégalités du second Satellite, & c'est par son moyen que j'ai trouvé que le temps de la libration de V est compris entre quatre ans un huitième & onze ans un tiers. L'instant où cette libration est nulle & son étendue sont des arbitraires que l'observation peut seule déterminer. Si l'on ne considère que l'action des trois premiers satellites de Jupiter, leur mouvement dépend de neuf équations différentielles du second ordre, dont les intégrales finies renferment dix-huit constantes arbitraires. Les excentricités & les inclinaisons des orbites, les positions des nœuds & des aphélies déterminent douze de ces constantes ; les moyens mouvemens & leurs époques formeroient les six autres, sans les deux conditions auxquelles ces six arbitraires sont assujetties, & qui les réduisent à quatre : c'est pour y suppléer que l'expression de V renferme deux arbitraires.

Puisque les Tables représentent assez bien les observations, sans avoir égard à l'inégalité précédente, elle doit être peu considérable ; mais l'incertitude qui règne encore sur la plupart des élémens de la théorie des satellites de Jupiter, rend sa détermination très-difficile. C'est un point que je laisse à discuter aux Astronomes ; il me suffit ici de leur indiquer cette inégalité, comme un objet digne de

leur attention , & d'établir que les moyens mouvemens & les époques des Tables doivent remplir exactement les deux conditions suivantes :

1.^o Le moyen mouvement du premier Satellite , plus deux fois celui du troisième , est égal à trois fois celui du second.

2.^o La longitude moyenne du premier Satellite , moins trois fois celle du second , plus deux fois celle du troisième , est constamment égale à 180° .

Ces conditions subsisteroient encore , en supposant dans les moyens mouvemens des Satellites , des accélérations semblables à celle que les observations paroissent indiquer dans le moyen mouvement de la Lune. L'action mutuelle des trois premiers Satellites les maintiendrait sans cesse , en sorte que le système de ces corps , en descendant insensiblement vers Jupiter , en vertu de ces accélérations , conserveroit toujours les rapports nécessaires à l'existence des conditions précédentes. Ainsi l'action de la Terre sur la Lune maintient l'égalité rigoureuse des deux mouvemens de rotation & de révolution de ce Satellite , malgré l'accélération continuelle du second de ces deux mouvemens ; parce que le premier devient en même raison plus rapide. De-là résulte cette conséquence , savoir , que si pour mieux représenter les observations , on admet une équation séculaire dans le moyen mouvement de l'un des trois premiers Satellites de Jupiter , ainsi que M. Bailli l'a fait dans ses Tables du premier Satellite ; il faut en supposer de semblables dans les moyens mouvemens des deux autres , & les ordonner de manière que l'équation du premier , plus deux fois celle du troisième , soit égale à trois fois l'équation du second Satellite.

On voit , par ce que nous venons de dire , que l'action mutuelle des satellites de Jupiter ne produit dans leurs mouvemens , que des inégalités périodiques ; & nous pouvons généralement en conclure que si l'on n'a égard qu'aux loix de la gravitation universelle , les moyennes distances des corps célestes aux foyers de leurs forces principales , sont immuables. Il n'en est pas ainsi des autres élémens de

leurs orbites : on fait que leurs excentricités , leurs inclinaisons , les positions de leurs nœuds & de leurs aphélies varient sans cesse ; & il existe des méthodes fort simples pour déterminer ces variations , en supposant les orbites peu excentriques & peu inclinées les unes aux autres. Mais les excentricités & les inclinaisons sont-elles renfermées constamment dans d'étroites limites ? C'est un point important du Système du Monde qui reste encore à éclaircir , & dont la discussion est la seule chose que laisse maintenant à désirer , la théorie des inégalités séculaires. J'ai prouvé dans la seconde partie de nos Mémoires pour l'année 1772 , que si l'on ne considère que l'action de deux Planètes , les excentricités & les inclinaisons de leurs orbites sont toujours très-petites ; & M. de la Grange a fait voir dans les Mémoires de Berlin , pour l'année 1782 , que cela est également vrai pour les orbites des Planètes de notre Système , en partant des suppositions les plus vraisemblables sur leurs masses. Cependant l'incertitude où l'on est encore à l'égard de plusieurs de ces masses , peut laisser quelques doutes sur ce résultat , & il est nécessaire de s'assurer par une méthode indépendante de toute hypothèse , qu'en vertu de l'action mutuelle des Planètes , les excentricités & les inclinaisons de leurs orbites sont toujours peu considérables. Je me propose encore de remplir cet objet dans ce Mémoire , en établissant d'une manière générale , que les inégalités séculaires des excentricités & des inclinaisons des orbites des Planètes , ne renferment ni arcs-de-cercle , ni exponentielles ; d'où il suit qu'en vertu de l'action de ces corps , leurs orbites s'aplatissent plus ou moins , mais en ne s'écartant que très-peu de la forme circulaire , & en conservant toujours les mêmes grands axes ; les positions respectives de leurs plans & de leurs aphélies varient sans cesse , elles s'inclinent plus ou moins les unes aux autres , mais elles sont toujours renfermées dans une zone d'un petit nombre de degrés.

I I.

Équations générales du mouvement d'un système de Corps qui s'attirent mutuellement.

CONSIDÉRONS le mouvement d'un système de corps m , m' , m'' , &c. autour d'un corps M dont nous prendrons la masse pour unité de masse. Soient x , y , z , les trois coordonnées rectangles de m , & r , la distance à M , ou son rayon vecteur, l'origine des coordonnées étant au centre de M . Marquons d'un trait, de deux traits, &c. les mêmes lettres relatives à m' , m'' , &c. & nommons λ , la fonction

$$+ \frac{\frac{m \cdot m'}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}}}{\frac{m \cdot m''}{\sqrt{(x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2}}} + \frac{\frac{m' \cdot m''}{\sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2}}}{+ \&c.}$$

cette fonction étant la somme des produits des masses m , m' , m'' , &c. prises deux à deux, divisés par les distances mutuelles de ces masses; cela posé :

Si l'on transporte en sens contraire, au corps m , la force dont M est animé par l'action du système; on trouvera facilement que dans son mouvement relatif autour de M , il sera animé parallèlement aux axes des x , des y , & des z , par les trois forces suivantes

$$\begin{aligned} & - \frac{(1 + m) \cdot x}{r^3} - \frac{m' \cdot x'}{r'^3} - \frac{m'' \cdot x''}{r''^3} - \&c. + \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right); \\ & - \frac{(1 + m) \cdot y}{r^3} - \frac{m' \cdot y'}{r'^3} - \frac{m'' \cdot y''}{r''^3} - \&c. + \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right); \\ & - \frac{(1 + m) \cdot z}{r^3} - \frac{m' \cdot z'}{r'^3} - \frac{m'' \cdot z''}{r''^3} - \&c. + \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Ces trois forces tendent à augmenter les coordonnées x ,

x, y, z ; en désignant donc par ∂t , l'élément du temps, supposé constant, on aura par les principes connus de Dynamique, les trois équations différentielles

$$0 = \frac{\partial \lambda}{\partial t^2} + \frac{(1+m) \cdot x}{r^3} + \frac{m' \cdot x'}{r'^3} + \&c. - \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right); (1)$$

$$0 = \frac{\partial \lambda}{\partial t^2} + \frac{(1+m) \cdot y}{r^3} + \frac{m' \cdot y'}{r'^3} + \&c. - \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right); (2)$$

$$0 = \frac{\partial \lambda}{\partial t^2} + \frac{(1+m) \cdot z}{r^3} + \frac{m' \cdot z'}{r'^3} + \&c. - \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z} \right); (3)$$

En changeant successivement dans ces équations, m, x, y, z, r , dans m', x', y', z', r' ; $m'', x'', y'', z'', r'', \&c.$, & réciproquement; on aura les équations différentielles relatives à $m', m'', \&c.$

I I I.

Si l'on multiplie l'équation (1) par

$$2 m \partial x \text{ — } \frac{2 m \cdot (m \partial x + m' \partial x' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.},$$

l'équation (2) par

$$2 m \partial y \text{ — } \frac{2 m \cdot (m \partial y + m' \partial y' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.},$$

& l'équation (3) par

$$2 m \partial z \text{ — } \frac{2 m \cdot (m \partial z + m' \partial z' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.};$$

si l'on multiplie pareillement la première des équations différentielles relatives à m' , par

$$2 m' \partial x' \text{ — } \frac{2 m' \cdot (m \partial x + m' \partial x' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.},$$

la seconde par

$$2 m' \partial y' \text{ — } \frac{2 m' \cdot (m \partial y + m' \partial y' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.},$$

& la troisième par

$$2 m' \partial z' = \frac{2 m' \cdot (m \partial z + m' \partial z' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.},$$

& ainsi du reste ; si l'on ajoute ensuite toutes ces équations, & si l'on observe que

$$0 = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x'} \right) + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x''} \right) + \&c.;$$

$$0 = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y'} \right) + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y''} \right) + \&c.;$$

$$0 = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z'} \right) + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z''} \right) + \&c.;$$

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)};$$

$$r' = \sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)};$$

&c.

on formera l'équation suivante,

$$\begin{aligned} 0 = & 2 m \cdot \frac{(\partial x \cdot \partial \partial x + \partial y \cdot \partial \partial y + \partial z \cdot \partial \partial z)}{\partial r^2} + 2 m' \cdot \frac{(\partial x' \cdot \partial \partial x' + \partial y' \cdot \partial \partial y' + \partial z' \cdot \partial \partial z')}{\partial r'^2} + \&c. \\ & - 2 \cdot \frac{(m \partial x + m' \partial x' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} \cdot \frac{(m \partial \partial x + m' \partial \partial x' + \&c.)}{\partial r^2} \\ & - 2 \cdot \frac{(m \partial y + m' \partial y' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} \cdot \frac{(m \partial \partial y + m' \partial \partial y' + \&c.)}{\partial r^2} \\ & - 2 \cdot \frac{(m \partial z + m' \partial z' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} \cdot \frac{(m \partial \partial z + m' \partial \partial z' + \&c.)}{\partial r^2} \\ & + 2 \cdot \left(\frac{m \partial r}{r^3} + \frac{m' \partial r'}{r'^3} + \&c. \right) - 2 \partial \lambda. \end{aligned}$$

Cette équation donne, en l'intégrant,

$$\begin{aligned} 0 = & f + m \cdot \frac{(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)}{\partial r^2} + m' \cdot \frac{(\partial x'^2 + \partial y'^2 + \partial z'^2)}{\partial r'^2} + \&c. \\ & - \frac{(m \partial x + m' \partial x' + \&c.)^2}{(1 + m + m' + \&c.) \cdot \partial r^2} - \frac{(m \partial y + m' \partial y' + \&c.)^2}{(1 + m + m' + \&c.) \cdot \partial r^2} \\ & - \frac{(m \partial z + m' \partial z' + \&c.)^2}{(1 + m + m' + \&c.) \cdot \partial r^2} - 2 \cdot \left(\frac{m}{r} + \frac{m'}{r'} + \&c. \right) - 2 \lambda \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\frac{(m \partial x + m' \partial x' + \&c.)^2}{(1 + m + m' + \&c.) \cdot \partial r^2}}} \right\} ; (4)$$

f étant une constante arbitraire.

On peut encore obtenir trois intégrales des équations différentielles du mouvement du système, de la manière suivante.

Si l'on multiplie l'équation (1) par

$$- m y + \frac{m.(m y + m' y' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.},$$

& l'équation (2) par

$$m x - \frac{m.(m x + m' x' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.},$$

si l'on multiplie pareillement, la première des équations relatives à m' , par

$$- m' y' + \frac{m'.(m x + m' y' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.},$$

& la seconde par

$$m' x' - \frac{m'.(m x + m' x' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.};$$

& ainsi du reste; si l'on ajoute ensuite toutes ces équations, en observant que

$$0 = x \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right) - y \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) + x' \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y'} \right) - y' \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x'} \right) + \&c.$$

$$0 = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x'} \right) + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y'} \right) + \&c.$$

on aura

$$0 = m \cdot \frac{(x \partial \partial y - y \partial \partial x)}{\partial r^2} + m' \cdot \frac{(x' \partial \partial y' - y' \partial \partial x')}{\partial r'^2} + \&c.$$

$$- \frac{(m x + m' x' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} \cdot \frac{(m \partial \partial y + m' \partial \partial y' + \&c.)}{\partial r^2}$$

$$+ \frac{(m y + m' y' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} \cdot \frac{(m \partial \partial x + m' \partial \partial x' + \&c.)}{\partial r^2};$$

C ij

20 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
équation dont l'intégrale est

$$c = m \cdot \frac{(x \partial y - y \partial x)}{\partial t} + m' \cdot \frac{(x' \partial y' - y' \partial x')}{\partial t} + \&c. \left. \begin{aligned} &- \frac{(mx + m'x' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} \cdot \frac{(m \partial y + m' \partial y' + \&c.)}{\partial t} \\ &+ \frac{(my + m'y' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} \cdot \frac{(m \partial x + m' \partial x' + \&c.)}{\partial t} \end{aligned} \right\}; (5)$$

c étant une constante arbitraire.

On parviendra de la même manière aux deux intégrales suivantes,

$$c' = m \cdot \frac{(x \partial z - z \partial x)}{\partial t} + m' \cdot \frac{(x' \partial z' - z' \partial x')}{\partial t} + \&c. \left. \begin{aligned} &- \frac{(mx + m'x' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} \cdot \frac{(m \partial z + m' \partial z' + \&c.)}{\partial t} \\ &+ \frac{(mz + m'z' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} \cdot \frac{(m \partial x + m' \partial x' + \&c.)}{\partial t} \end{aligned} \right\}; (6)$$

$$c'' = m \cdot \frac{(y \partial z - z \partial y)}{\partial t} + m' \cdot \frac{(y' \partial z' - z' \partial y')}{\partial t} + \&c. \left. \begin{aligned} &- \frac{(my + m'y' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} \cdot \frac{(m \partial z + m' \partial z' + \&c.)}{\partial t} \\ &+ \frac{(mz + m'z' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} \cdot \frac{(m \partial y + m' \partial y' + \&c.)}{\partial t} \end{aligned} \right\}; (7)$$

c' & c'' étant deux arbitraires. Ces quatre intégrales sont les seules que l'on peut obtenir dans l'état actuel de l'analyse.

V.

Si l'on suppose les masses $m, m', \&c.$ extrêmement petites; chacune d'elles décrira à très-peu-près à chaque révolution, une ellipse autour de M . En vertu des inégalités séculaires, les élémens de ces ellipses varieront par des nuances imperceptibles; mais la suite des siècles rendra ces variations

très-sensibles. Les intégrales précédentes établissent entre elles, des rapports constans que nous allons déterminer.

Soit a , le demi-grand axe de l'ellipse que m décriroit autour de M , si l'on ne considéroit que l'action de ces deux corps; on aura, comme l'on fait

$$\frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial t^2} = \frac{2.(1+m)}{r} - \frac{1+m}{a}.$$

Cette équation n'aura plus lieu, si l'on a égard à l'action des autres corps m' , m'' , &c; cependant, si l'on observe que l'orbite de m peut toujours être considérée à chaque révolution, comme une ellipse, aux quantités périodiques près, qui troublent le mouvement de ce corps; on verra que cette équation est encore à très-peu près exacte après un temps quelconque; mais le demi-grand axe a pourra n'être plus le même qu'à l'origine.

Il suit de-là qu'en ayant égard à l'action de tous les corps du système, on a

$$\frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial t^2} = \frac{2.(1+m)}{r} - \frac{1+m}{a} + \psi,$$

ψ étant une fonction périodique de l'ordre des masses perturbatrices.

Si l'on nomme pareillement a' , a'' , &c, les demi-grands axes des orbites que m' , m'' , &c, décriroient à chaque révolution, sans les perturbations qu'ils éprouvent, on aura

$$\frac{\partial x'^2 + \partial y'^2 + \partial z'^2}{\partial t^2} = \frac{2.(1+m')}{r'} - \frac{1+m'}{a'} + \psi',$$

$$\frac{\partial x''^2 + \partial y''^2 + \partial z''^2}{\partial t^2} = \frac{2.(1+m'')}{r''} - \frac{1+m''}{a''} + \psi'';$$

&c.

ψ' , ψ'' , &c, étant des quantités périodiques de l'ordre m ,

En substituant ces valeurs dans l'équation (4) de l'article précédent, elle deviendra

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{m}{a} + \frac{m'}{a'} + \frac{m''}{a''} + \&c. \\
 &- \frac{m^2.(m' + m'' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \\
 &- \frac{m'^2.(m + m'' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} \cdot \left(\frac{2}{r'} - \frac{1}{a'} \right) \\
 &- \&c. \\
 &- \frac{(2 m m'. \partial x. \partial x' + 2 m m''. \partial x. \partial x'' + 2 m'. m'', \partial x'. \partial x'' + \&c.)}{(1 + m + m' + \&c.). \partial r^2} \\
 &- \frac{(2 m m'. \partial y. \partial y' + 2 m m''. \partial y. \partial y'' + 2 m'. m'', \partial y'. \partial y'' + \&c.)}{(1 + m + m' + \&c.). \partial r^2} \\
 &- \frac{(2 m m'. \partial z. \partial z' + 2 m m''. \partial z. \partial z'' + 2 m'. m'', \partial z'. \partial z'' + \&c.)}{(1 + m + m' + \&c.). \partial r^2} \\
 &- 2 \lambda - \frac{m.(1 + m' + m'' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} \cdot \psi - \frac{m'.(1 + m + m'' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} x \\
 &\quad \psi' - \&c.
 \end{aligned}$$

Les quantités

$$\frac{m m' \partial x \partial x'}{\partial r^2}, \quad \frac{m m''. \partial x \partial x''}{\partial r^2}, \quad \frac{m m'. \partial y. \partial y'}{\partial r^2}, \quad \&c.$$

sont périodiques, dans la supposition du mouvement elliptique, & les termes que les perturbations y introduiroient, seroient de l'ordre m^3 ; en négligeant donc les quantités de cet ordre, & celles de l'ordre m^2 , qui ne sont que périodiques ou constantes, l'équation précédente prendra cette forme très-simple,

$$f = \frac{m}{a} + \frac{m'}{a'} + \frac{m''}{a''} + \&c; \quad (8)$$

ainsi, en supposant que la suite des siècles amène des changemens remarquables dans les demi-grands axes a ,

a' , &c. des orbites; ils doivent toujours satisfaire à l'équation précédente dans laquelle la constante f est invariable.

On voit par-là que pour avoir entre les élémens des orbites supposées elliptiques, les relations que donnent les intégrales précédentes des équations différentielles du mouvement du système, il suffit de substituer dans ces intégrales, les valeurs des coordonnées relatives au mouvement elliptique; en négligeant ensuite les quantités constantes ou périodiques de l'ordre m^2 , on aura entre les élémens des ellipses, autant d'équations qu'il y a d'intégrales.

Déterminons d'après ce principe, les relations entre les élémens qui résultent des intégrales (5), (6) & (7) de l'article précédent. Si l'on nomme $e.a$ l'excentricité de l'orbite de m , & si l'on néglige m vis-à-vis de l'unité; l'aire que son rayon vecteur trace autour de M , durant l'instant ∂t , sera par la théorie du mouvement elliptique, $\frac{1}{2} \partial t. \sqrt{a.(1 - e^2)}$. Cette aire projetée sur le plan des x & des y , est diminuée dans le rapport du cosinus de l'inclinaison de l'orbite de m sur ce plan, au rayon. Soit θ , la tangente de cette inclinaison; l'aire projetée sera $\frac{1}{2} \partial t. \sqrt{\frac{a.(1 - e^2)}{1 + \theta^2}}$; ce sera dans l'hypothèse elliptique, la valeur de $\frac{1}{2}.(x \partial y - y \partial x)$.

Si l'on nomme pareillement, $e'.a'$, $e''.a''$, &c, les excentricités des orbites de m' , m'' , &c; θ , θ' , θ'' , &c, les tangentes des inclinaisons de leurs orbites;

$$\frac{1}{2} \partial t. \sqrt{\frac{a'(1 - e'^2)}{1 + \theta'^2}}, \frac{1}{2} \partial t. \sqrt{\frac{a''(1 - e''^2)}{1 + \theta''^2}}, \&c.$$

seront dans l'hypothèse elliptique, les valeurs de

$$\frac{1}{2}.(x' \partial y' - y' \partial x'), \frac{1}{2}.(x'' \partial y'' - y'' \partial x''), \&c.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (5) de l'article

précédent, & en négligeant les quantités constantes ou périodiques de l'ordre m^2 , on aura

$$c = m \cdot \sqrt{\left[\frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + \theta^2} \right]} + m' \cdot \sqrt{\left[\frac{a' \cdot (1 - e'^2)}{1 + \theta'^2} \right]} + m'' \cdot \sqrt{\left[\frac{a'' \cdot (1 - e''^2)}{1 + \theta''^2} \right]} + \&c. \quad (9)$$

en supposant donc qu'après un temps considérable, les excentricités & les inclinaisons des orbites subissent des changemens remarquables, elles doivent toujours satisfaire à l'équation précédente dans laquelle la constante c est invariable.

Les équations (6) & (7) de l'article précédent fournissent encore deux relations entre les élémens des orbites; mais il est plus facile de les tirer immédiatement de l'équation (9), en y substituant successivement, au lieu de $\theta, \theta', \&c.$, les tangentes des inclinaisons des orbites sur le plan des x & des z , & sur celui des y & des z . Nommons I , l'angle que forme avec l'axe des x , l'intersection du plan de l'orbite de m , & du plan des x & des y . Il est aisé de voir par la trigonométrie sphérique, que la tangente de l'inclinaison de cette orbite sur le plan des x & des z , sera $\sqrt{\left(\frac{1 + \theta^2 \cdot \sin. I^2}{\theta^2 \cdot \cos. I^2} \right)}$, & que la tangente de l'inclinaison de la même orbite sur le plan des y & des z , sera $\sqrt{\left(\frac{1 + \theta^2 \cdot \cos. I^2}{\theta^2 \cdot \sin. I^2} \right)}$; soit donc

$$\theta \cdot \sin. I = p; \quad \theta \cdot \cos. I = q;$$

ces tangentes seront $\frac{1}{q} \cdot \sqrt{(1 + p^2)}$, $\frac{1}{p} \cdot \sqrt{(1 + q^2)}$.

En marquant d'un trait, de deux traits, &c. les lettres I, p, q , relatives à $m', m'', \&c.$, on aura les tangentes des inclinaisons des orbites de ces corps sur le plan des x & des z , & sur celui des y & des z . En substituant ensuite

ensuite ces tangentes, au lieu de $\theta, \theta', \&c$, dans l'équation (9), on aura les deux équations suivantes,

$$c' = m q \cdot \sqrt{\left[\frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + \theta^2} \right]} + m' q' \cdot \sqrt{\left[\frac{a' \cdot (1 - e'^2)}{1 + \theta'^2} \right]} + m'' \cdot q'' \cdot \sqrt{\left[\frac{a'' \cdot (1 - e''^2)}{1 + \theta''^2} \right]} + \&c. \quad \left. \vphantom{\frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + \theta^2}} \right\} ; (10)$$

$$c'' = m p \cdot \sqrt{\left[\frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + \theta^2} \right]} + m' p' \cdot \sqrt{\left[\frac{a' \cdot (1 - e'^2)}{1 + \theta'^2} \right]} + m'' \cdot p'' \cdot \sqrt{\left[\frac{a'' \cdot (1 - e''^2)}{1 + \theta''^2} \right]} + \&c. \quad \left. \vphantom{\frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + \theta^2}} \right\} ; (11)$$

dans lesquelles les constantes c' & c'' , sont invariables.

V.

Sur les moyens mouvemens des trois premiers satellites de Jupiter.

CONSIDÉRONS présentement les mouvemens des trois premiers satellites de Jupiter. Nous observerons d'abord que le mouvement du quatrième, n'offrant aucun rapport de commensurabilité avec ceux des trois autres, on peut négliger ici son action. On peut, par la même raison, négliger l'action du Soleil; enfin, on peut faire abstraction de la figure de Jupiter, dont l'influence sur les variations des grands axes est nulle. Soient donc m, m', m'' , les masses du premier, du second & du troisième satellite de Jupiter dont nous prendrons la masse M pour unité de masse. Supposons qu'après un temps considérable, les demi-grands axes a, a', a'' , &c, se changent dans

$$a + \delta a, a' + \delta a', a'' + \delta a'';$$

si l'on prend pour le plan des x & des y , celui de l'orbite de Jupiter, & que l'on néglige les carrés des excentricités

26 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

& des inclinaisons des orbites, & ceux de δa , $\delta a'$, $\delta a''$; les équations (8) & (9) de l'article précédent, donneront, en les différenciant par rapport à la caractéristique δ ,

$$0 = \frac{m \cdot \delta a}{a^2} + \frac{m' \cdot \delta a'}{a'^2} + \frac{m'' \cdot \delta a''}{a''^2};$$

$$0 = \frac{m \cdot \delta a}{\sqrt{a}} + \frac{m' \cdot \delta a'}{\sqrt{a'}} + \frac{m'' \cdot \delta a''}{\sqrt{a''}};$$

d'où l'on tire

$$\delta a' = \frac{-m \cdot \delta a}{m'} \cdot \frac{a'^2}{a^2} \cdot \left(\frac{a^{\frac{1}{2}} - a''^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - a'^{\frac{1}{2}}} \right);$$

$$\delta a'' = \frac{-m \cdot \delta a}{m''} \cdot \frac{a''^2}{a^2} \cdot \left(\frac{a^{\frac{1}{2}} - a'^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - a''^{\frac{1}{2}}} \right).$$

Soient n , n' , n'' , les moyens mouvemens des Satellites m , m' , m'' ; on aura, comme l'on fait,

$$n^2 = \frac{1}{a^3}; \quad n'^2 = \frac{1}{a'^3}; \quad n''^2 = \frac{1}{a''^3};$$

partant

$$\delta n = -\frac{3}{2} \cdot n \cdot \frac{\delta a}{a}$$

$$\delta n' = -\frac{m}{m'} \cdot \delta n \cdot \frac{n'^{\frac{3}{2}} \cdot (n - n'')}{n^{\frac{3}{2}} \cdot (n' - n'')}$$

$$\delta n'' = \frac{m}{m''} \cdot \delta n \cdot \frac{n''^{\frac{3}{2}} \cdot (n - n')}{n^{\frac{3}{2}} \cdot (n' - n'')}$$

ainsi pour avoir les variations séculaires des moyens mouvemens des trois Satellites, il ne s'agit que de déterminer δa , ou ce qui revient au même, le terme pro-

portionnel au temps, qui entre dans l'expression du demi-grand axe a , du premier Satellite.

V I.

Si l'on ajoute ensemble les équations (1), (2) & (3) de l'article II, après avoir multiplié la première par ∂x , la seconde par ∂y , & la troisième par ∂z ; & que pour abrégé, on suppose,

$$R = \frac{m' \cdot (x x' + y y' + z z')}{r'^3} + \frac{m'' \cdot (x x'' + y y'' + z z'')}{r''^3} - \frac{\kappa}{m} z,$$

enfin, si l'on désigne par la caractéristique d , les différences prises en ne faisant varier que les coordonnées relatives au Satellite m ; on aura

$$0 = \frac{\partial x \cdot \partial \partial x + \partial y \cdot \partial \partial y + \partial z \cdot \partial \partial z}{\partial t^2} + (1 + m) \cdot \frac{\partial r}{r^2} + dR;$$

d'où l'on tire en intégrant

$$0 = \frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial t^2} - \frac{2 \cdot (1 + m)}{r} + \frac{1 + m}{a} + 2 \int dR.$$

Si la différentielle $2 dR$ renferme un terme constant $k \partial t$, l'intégrale $2 \int dR$ renfermera le terme $k t$ proportionnel au temps; on aura donc après le temps t , en négligeant les quantités périodiques de l'ordre m ,

$$0 = \frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial t^2} - \frac{2 \cdot (1 + m)}{r} + \frac{1 + m}{a} + k \cdot t;$$

mais si l'on nomme $a + \partial a$, ce que devient le demi-grand axe a , après ce temps, on a

$$0 = \frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial t^2} - \frac{2 \cdot (1 + m)}{r} + \frac{1 + m}{a + \partial a};$$

partant

$$\frac{1 + m}{a + \partial a} = \frac{1 + m}{a} + k t,$$

D ij

ce qui donne, en négligeant le carré de δa , & m vis-à-vis de l'unité,

$$\delta a = - a^2 k t :$$

la question se réduit ainsi à déterminer k .

Pour y parvenir, nous observerons que si l'on n'a égard qu'aux quantités de l'ordre des masses perturbatrices, la différentielle dR ne renferme aucun terme constant; (*Voyez sur cela les Mémoires de Berlin pour l'année 1776, page 210*). Il faut conséquemment, pour y trouver des termes semblables, avoir égard aux produits de ces masses. Si l'on nomme v, v', v'' , les angles formés par l'axe des x , & par les projections des rayons recteurs r, r', r'' , sur le plan de l'orbite de Jupiter; si l'on nomme de plus, $n t + \epsilon, n' t + \epsilon', n'' t + \epsilon''$, les longitudes moyennes des trois Satellites, rapportées au même plan, & comptées de l'axe des x ; l'angle

$$(2 n'' - 3 n' + n).t + 2\epsilon'' - 3\epsilon' + \epsilon,$$

sera à très-peu-près constant suivant les observations, en vertu du rapport qu'elles indiquent entre les moyens mouvemens des trois premiers Satellites, comme on l'a vu dans l'article premier. Soit V cet angle; on doit donc chercher les termes constans de dR , parmi ceux qui sont multipliés par les sinus de V ; & de ses multiples; & il est clair que l'angle V étant composé des mouvemens des trois Satellites, il ne peut se rencontrer que parmi les termes de dR , affectés du produit $m' . m''$.

Nous négligerons les excentricités & les inclinaisons des orbites; nous aurons ainsi

$$x = r . \cos. v ; y = r . \sin. v ; z = 0 ;$$

$$x' = r' . \cos. v' ; y' = r' . \sin. v' ; z' = 0 ;$$

$$x'' = r'' . \cos. v'' ; y'' = r'' . \sin. v'' ; z'' = 0 ;$$

& par conséquent

$$R = \frac{m' \cdot r \cdot \cos. (v' - v)}{r'^2} + \frac{m'' \cdot r \cdot \cos. (v'' - v)}{r''^2}$$

$$\frac{m'}{\sqrt{[r^2 - 2rr' \cdot \cos. (v' - v) + r'^2]}} + \frac{m''}{\sqrt{[r^2 - 2rr' \cdot \cos. (v' - v) + r''^2]}}$$

Supposons qu'en réduisant R dans une suite ordonnée par rapport aux cosinus de $v' - v$, $v'' - v$, & de leurs multiples, on ait

$$R = m' \cdot [A^{(0)} + A^{(1)} \cdot \cos. (v' - v) + A^{(2)} \times \cos. 2 (v' - v) + \&c.]$$

$$+ m'' \cdot [B^{(0)} + B^{(1)} \cdot \cos. (v'' - v) + B^{(2)} \times \cos. 2 (v'' - v) + \&c.];$$

on aura dR , en différenciant R , uniquement par rapport à r & v , ce qui donne

$$dR = m' \partial v \cdot \{ A^{(1)} \cdot \sin. (v' - v) + 2 A^{(2)} \cdot \sin. 2 (v' - v) + \&c. \}$$

$$+ m' \partial r \cdot \{ \left(-\frac{\partial A^{(0)}}{\partial r} \right) + \left(-\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r} \right) \cdot \cos. (v' - v) + \left(-\frac{\partial A^{(2)}}{\partial r} \right) \cdot \cos. 2 (v' - v) + \&c. \}$$

$$+ m'' \partial v \cdot \{ B^{(1)} \cdot \sin. (v'' - v) + 2 B^{(2)} \cdot \sin. 2 (v'' - v) + \&c. \}$$

$$+ m'' \partial r \cdot \{ \left(-\frac{\partial B^{(0)}}{\partial r} \right) + \left(-\frac{\partial B^{(1)}}{\partial r} \right) \cdot \sin. (v'' - v) + \left(-\frac{\partial B^{(2)}}{\partial r} \right) \cdot \sin. 2 (v'' - v) + \&c. \}.$$

Il faut maintenant substituer dans cette expression de dR , au lieu de r , r' , r'' , v , v' , v'' , leurs valeurs approchées jusqu'aux premières puissances inclusivement de m , m' , m'' , en distinguant avec soin, les termes constants, de ceux qui ne sont que périodiques.

POUR cela, nous allons rappeler ici quelques résultats de la théorie des perturbations des satellites de Jupiter ; nous les tirerons de l'excellente pièce de M. de la Grange, qui a remporté le Prix de l'Académie pour l'année 1766, & qui est imprimée dans le tome IX du recueil des Prix de l'Académie.

Si l'on désigne par l'unité, le demi-diamètre de Jupiter ; on aura, en n'ayant égard qu'à l'action des trois premiers Satellites,

$$\begin{aligned}
 r &= 5,67 + m^I \cdot \left\{ \begin{aligned} &4,19 \cdot \text{cof.} (n^I t - n t + t^I - t) - 1014,93^x \\ &\text{cof.} 2 \cdot (n^I t - n t + t^I - t) - 3,87 \cdot \text{cof.} \\ &3 \cdot (n^I t - n t + t^I - t) - 1,02 \cdot \text{cof.} 4 \cdot (n^I t - n t \\ &\quad + t^I - t) - \&c. \end{aligned} \right\} \\
 &+ m^{II} \cdot \left\{ \begin{aligned} &0,75 \cdot \text{cof.} (n^{II} t - n t + t^{II} - t) - 1,06^x \\ &\text{cof.} 2 \cdot (n^{II} t - n t + t^{II} - t) - 0,13 \cdot \text{cof.} \\ &3 \cdot (n^{II} t - n t + t^{II} - t) - 0,02 \cdot \text{cof.} 4 \cdot (n^{II} t - n t \\ &\quad + t^{II} - t) - \&c. \end{aligned} \right\} \\
 r^I &= 9,00 + m \cdot \left\{ \begin{aligned} &518,78 \cdot \text{cof.} (n^I t - n t + t^I - t) + 5,73^x \\ &\text{cof.} 2 \cdot (n^I t - n t + t^I - t) + 1,36 \cdot \text{cof.} \\ &3 \cdot (n^I t - n t + t^I - t) + 0,49 \cdot \text{cof.} 4 \cdot (n^I t - n t \\ &\quad + t^I - t) + \&c. \end{aligned} \right\} \\
 &+ m^{II} \cdot \left\{ \begin{aligned} &7,16 \cdot \text{cof.} (n^{II} t - n t + t^{II} - t) - 824,07^x \\ &\text{cof.} 2 \cdot (n^{II} t - n t + t^{II} - t) - 6,29 \cdot \text{cof.} \\ &3 \cdot (n^{II} t - n t + t^{II} - t) - 1,66 \cdot \text{cof.} 4 \cdot (n^{II} t - n t \\ &\quad + t^{II} - t) - \&c. \end{aligned} \right\} \\
 r^{II} &= 14,38 + m \cdot \left\{ \begin{aligned} &5,88 \cdot \text{cof.} (n^{II} t - n t + t^{II} - t) + 0,19^x \\ &\text{cof.} 2 \cdot (n^{II} t - n t + t^{II} - t) + 0,03 \cdot \text{cof.} \\ &3 \cdot (n^{II} t - n t + t^{II} - t) + 0,00 \cdot \text{cof.} 4 \cdot (n^{II} t - n t \\ &\quad + t^{II} - t) + \&c. \end{aligned} \right\} \\
 &+ m^I \cdot \left\{ \begin{aligned} &452,98 \cdot \text{cof.} (n^I t - n^I t + t^I - t^I) + 9,13^x \\ &\text{cof.} 2 \cdot (n^I t - n^I t + t^I - t^I) + 2,16 \cdot \text{cof.} \\ &3 \cdot (n^I t - n^I t + t^I - t^I) + 0,59 \cdot \text{cof.} 4 \cdot (n^I t - n^I t \\ &\quad + t^I - t^I) + \&c. \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v &= n^1 t + \varepsilon^1 + m^1 \cdot \left\{ \begin{array}{l} 9300^1 \cdot \sin. (n^1 t - n^1 t + \varepsilon^1 - \varepsilon) - 1227214^1 x \\ \sin. 2. (n^1 t - n^1 t + \varepsilon^1 - \varepsilon) - 3526^1 \cdot \sin. \\ 3. (n^1 t - n^1 t + \varepsilon^1 - \varepsilon) - 705^1 \cdot \sin. 4. (n^1 t - n^1 t \\ + \varepsilon^1 - \varepsilon) - \&c. \end{array} \right\} \\
 &+ m^{11} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1158^1 \cdot \sin. (n^{11} t - n^1 t + \varepsilon^{11} - \varepsilon) - 1007^1 x \\ \sin. 2. (n^{11} t - n^1 t + \varepsilon^{11} - \varepsilon) - 101^1 \cdot \sin. \\ 3. (n^{11} t - n^1 t + \varepsilon^{11} - \varepsilon) - 18^1 \cdot \sin. 4. (n^{11} t - n^1 t \\ + \varepsilon^{11} - \varepsilon) - \&c. \end{array} \right\} \\
 v' &= n^1 t + \varepsilon^1 + m \cdot \left\{ \begin{array}{l} 387482^1 \cdot \sin. (n^1 t - n^1 t + \varepsilon^1 - \varepsilon) + 2727^1 x \\ \sin. 2. (n^1 t - n^1 t + \varepsilon^1 - \varepsilon) + 509^1 \cdot \sin. \\ 3. (n^1 t - n^1 t + \varepsilon^1 - \varepsilon) + 12^1 \cdot \sin. 4. (n^1 t - n^1 t \\ + \varepsilon^1 - \varepsilon) + \&c. \end{array} \right\} \\
 &+ m^{11} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 10067^1 \cdot \sin. (n^{11} t - n^1 t + \varepsilon^{11} - \varepsilon) - 626246^1 x \\ \sin. 2. (n^{11} t - n^1 t + \varepsilon^{11} - \varepsilon) - 3717^1 \cdot \sin. \\ 3. (n^{11} t - n^1 t + \varepsilon^{11} - \varepsilon) - 825^1 \cdot \sin. 4. (n^{11} t - n^1 t \\ + \varepsilon^{11} - \varepsilon) - \&c. \end{array} \right\} \\
 v'' &= n^{11} t + \varepsilon^{11} + m \cdot \left\{ \begin{array}{l} -1306^1 \cdot \sin. (n^{11} t - n^1 t + \varepsilon^{11} - \varepsilon) + 38^1 \cdot \sin. 2x \\ (n^{11} t - n^1 t + \varepsilon^{11} - \varepsilon) + 8^1 \cdot \sin. 3. (n^{11} t - n^1 t \\ + \varepsilon^{11} - \varepsilon) + 1^1 \cdot \sin. 4. (n^{11} t - n^1 t + \varepsilon^{11} - \varepsilon) \\ + \&c. \end{array} \right\} \\
 &+ m^1 \cdot \left\{ \begin{array}{l} 207375^1 \cdot \sin. (n^{11} t - n^1 t + \varepsilon^{11} - \varepsilon) + 2760^1 x \\ \sin. 2. (n^{11} t - n^1 t + \varepsilon^{11} - \varepsilon) + 559^1 \cdot \sin. \\ 3. (n^{11} t - n^1 t + \varepsilon^{11} - \varepsilon) + 142^1 \cdot \sin. 4. (n^{11} t - n^1 t \\ + \varepsilon^{11} - \varepsilon) + \&c. \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

(Voyez la pièce citée, pages 63 & suivantes); cela posé.

Considérons d'abord le terme $m^1 \partial v. A^{(1)} \cdot \sin. (v^1 - v)$, de l'expression de dR . Si l'on y substitue au lieu de v , la valeur précédente; il est aisé de voir qu'il n'en peut résulter aucun terme constant ou proportionnel à $\sin. V$. Il n'en est pas ainsi de la substitution de la valeur de v' , & l'on voit facilement que le terme

$$- m^{11} \cdot 626246^1 \cdot \sin. 2. (n^{11} t - n^1 t + \varepsilon^{11} - \varepsilon),$$

de cette valeur, produira dans $m' \partial v . A^{(1)} . \sin. (v' - v)$, le suivant

$$- m' m'' . 626246' . A^{(1)} . n \partial t . \cos. (n' t - n t + \epsilon' - \epsilon) \times \\ \sin. 2 . (n'' t - n' t + \epsilon'' - \epsilon'),$$

& par conséquent celui-ci,

$$- \frac{m' m''}{2} . 626246' . A^{(1)} . n \partial t . \sin. V.$$

pour réduire en parties du rayon le coefficient 626246', il faut le diviser par $57^d 17' 44''$; en désignant donc par h , le quotient de cette division, le terme précédent deviendra

$$- \frac{m' m''}{2} . h . A^{(1)} . n \partial t . \sin. V;$$

& il produira dans $2 d R$, le terme constant

$$- m' m'' . h . A^{(1)} . n \partial t . \sin. V.$$

$A^{(1)}$ étant une fonction de r & de r' , la substitution de leurs valeurs peut produire encore des termes constants dans $m' . \partial v . A^{(1)} \sin. (v' - v)$; or il est facile de s'assurer que la valeur de r ne produira aucun terme semblable, & que la valeur de r' produira le terme

$$- m' . m'' . n \partial t . \left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r'} \right) . 824,07 . \cos. 2 (n'' t - n' t + \epsilon'' - \epsilon') \times \\ \sin. (n' t - n t + \epsilon' - \epsilon),$$

ce qui donne le terme constant

$$\frac{m' m''}{2} . n \partial t . \left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r'} \right) . 824,07 . \sin. V;$$

en désignant donc par l , le coefficient numérique 824,07, il en résultera dans $2 d R$, le terme constant

$$m' m'' . n \partial t . \left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r'} \right) . l . \sin. V.$$

On voit ainsi que le terme $m' \partial v . A^{(1)} . \sin. (v' - v)$,
de

de l'expression de dR , produit dans $2 dR$, la quantité constante

$$m' . m'' . n \partial t . \sin . V . [l (\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r'}) - h A^{(1)}] .$$

Si l'on analyse de la même manière, les autres termes de l'expression de dR ; on verra que les termes constants qui en résultent, sont insensibles par rapport à la quantité précédente, à cause de la grandeur des coefficients numériques h & l , qui multiplient les deux termes. On peut donc supposer que la partie constante de $2 dR$, se réduit à cette quantité, & qu'ainsi l'on a

$$k = m' m'' . n . \sin . V . [l (\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r'}) - h A^{(1)}] ;$$

d'où l'on tire par l'article précédent,

$$\partial a = - m' m'' . a^2 n t . \sin . V . [l (\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r'}) - h A^{(1)}] ;$$

& par conséquent

$$\partial n = \frac{3}{2} . m' m'' . a . n^2 t . \sin . V . [l (\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r'}) - h A^{(1)}] .$$

De-là il est aisé de conclure par l'article V,

$$2 \partial n'' - 3 \partial n' + \partial n = \frac{3}{2} . a n^2 t . \sin . V . [l (\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r'}) - h A^{(1)}] . \left\{ \begin{array}{l} m' m'' \\ + 3 m m'' . \frac{n^{\frac{1}{2}} . (n - n'')}{n^{\frac{3}{2}} . (n' - n'')} \\ + 2 m m' . \frac{n''^{\frac{1}{2}} . (n - n')}{n^{\frac{3}{2}} . (n' - n'')} \end{array} \right\}$$

Soit a , la fonction qui, dans le second membre de cette équation, multiplie $n^2 t . \sin . V$; & que l'on désigne par s , la quantité $2 n'' - 3 n' + n$; on aura

$$\partial s = a n^2 t . \sin . V .$$

L'ÉQUATION précédente donne la variation δs , correspondante au temps t ; mais elle ne peut servir que pour un intervalle dans lequel $a n^2 t \cdot \sin V$ est peu considérable; on peut cependant en tirer la valeur de s , pour un temps illimité, au moyen de la méthode que j'ai donnée dans la seconde partie de nos Mémoires pour l'année 1772. Suivant cette méthode, on doit considérer s , comme une fonction de at , qui réduite dans une série ordonnée par rapport aux puissances de at , est de cette forme

$$s = at \cdot \frac{\partial s}{a \partial t} + \frac{a^2 t^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\partial^2 s}{a^2 \partial t^2} + \&c.$$

les quantités s , $\frac{\partial s}{a \partial t}$, $\frac{\partial^2 s}{a^2 \partial t^2}$, &c. étant relatives à l'instant que l'on choisit pour époque. Le second terme de cette série exprime la variation δs , lorsque at est très-petit; en comparant donc cette variation à celle-ci, $a n^2 t \cdot \sin V$, on aura

$$\frac{\partial s}{\partial t} = a n^2 \cdot \sin V,$$

& comme l'instant de l'époque est arbitraire, cette équation différentielle a lieu pour un instant quelconque.

Maintenant, V étant par l'article VI, égal à

$$2 n'' t - 3 n' t + n t + 2 \epsilon'' - 3 \epsilon' + \epsilon,$$

on a

$$\partial V = \partial t \cdot (2 n'' - 3 n' + n) = s \partial t;$$

on aura ainsi entre s , V & t , deux équations différentielles du premier ordre, dont les intégrales donneront les valeurs de s & V , pour un temps quelconque.

De ces équations, on tire la suivante,

$$\frac{\partial \partial V}{\partial t^2} = a n^2 \sin V;$$

en la multipliant par ∂V , & en l'intégrant, on aura

$$\frac{\pm \partial V}{\sqrt{(\lambda - 2 a n^2 \cos V)}} = \partial t; \quad (a)$$

λ étant une constante arbitraire. Les différentes valeurs que l'on peut supposer à cette constante, donnent lieu aux trois cas suivans.

Premier cas.

Si λ est positif & plus grand que $\pm 2 a n^2$; il est visible que l'angle $\pm V$ croîtra sans cesse, & cela doit arriver, si à l'origine du mouvement, $2 n'' - 3 n' + n$, est positif ou négatif, & d'un ordre supérieur à $\sqrt{(\pm a)}$.

Second cas.

Si a est positif, & λ moindre que $2 a n^2$; le radical

$$\sqrt{(\lambda - 2 a n^2 \cos V)}$$

devient imaginaire, dans la supposition de $V = 0$; l'angle V sera donc alors périodique, & ne pourra jamais être nul; il ne fera qu'osciller de part & d'autre de 180° , en sorte que sa valeur moyenne sera de six signes.

Troisième cas.

Si a est négatif, & λ moindre que $-2 a n^2$; le radical

$$\sqrt{(\lambda - 2 a n^2 \cos V)}$$

devient imaginaire, dans la supposition de $V = 180^\circ$; l'angle V ne peut donc jamais dans ce cas atteindre 180° ; il ne fera qu'osciller de part & d'autre de zéro, en devenant alternativement positif & négatif, & sa valeur moyenne sera nulle.

36 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
Voyons lequel de ces trois cas a lieu dans la Nature.

I X.

EN prenant pour unité, le demi-diamètre de Jupiter, les observations donnent

$$a = 5,67; a' = 9,00; a'' = 14,38.$$

De-là j'ai conclu

$$A^{(1)} = -\frac{0,0952}{a'}; \left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r'}\right) = \frac{0,594}{a'^2};$$

Mais on a par l'article VII,

$$h = \frac{626246'}{57^d 17' 44''}; l = 824,07;$$

on aura par conséquent

$$l \cdot \left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r'}\right) - h A^{(1)} = \frac{71,731}{a'}.$$

ce qui donne

$$a = 67,786 \cdot \left\{ \begin{array}{l} m' m'' + 3 m m'' \cdot \frac{n'^{\frac{1}{2}} \cdot (n - n'')}{n'^{\frac{1}{2}} \cdot (n' - n'')} \\ + 2 m m' \cdot \frac{n''^{\frac{1}{2}} \cdot (n - n')}{n'^{\frac{1}{2}} \cdot (n' - n'')} \end{array} \right\}.$$

Nous sommes ainsi assurés que a est positif; d'où il suit que le dernier des trois cas précédens, ne peut pas exister. Il faut donc, ou que l'angle $\pm V$ croisse sans cesse, ou si sa valeur est périodique, qu'il ne puisse qu'osciller de part & d'autre de 180^d .

X.

Si l'angle $\pm V$ croît indéfiniment, λ est positif & plus grand que $2 a n^2$; or, si l'on suppose $V = 180^d \pm \omega$,

le signe de ϖ étant le même que celui de ∂V , dans l'équation différentielle (a) de l'article VIII, cette équation donnera

$$\partial \varpi = \partial t \cdot \sqrt{(\lambda + 2 a n^2 \cdot \cos. \varpi)};$$

on aura donc dans l'intervalle compris depuis $\varpi = 0$, jusqu'à $\varpi = 90^\circ$, $\varpi > t \cdot \sqrt{(\lambda)}$, & par conséquent $\varpi > n t \cdot \sqrt{(2 a)}$; ainsi le temps t que ϖ emploiera à parvenir de 0° à 90° , sera moindre que $\frac{90^\circ}{n \sqrt{(2 a)}}$. Si l'on nomme T le temps de la révolution du premier Satellite, on aura $n T = 360^\circ$; ce qui donne $n = \frac{360^\circ}{T}$; donc le temps t que ϖ emploiera à parvenir de 0° à 90° , sera moindre que $\frac{T}{4 \cdot \sqrt{(2 a)}}$.

La valeur de a dépend des masses des trois premiers Satellites de Jupiter; la masse m' du second paroît assez bien déterminée par l'inégalité du premier Satellite, & si l'on prend pour unité, la masse de Jupiter, on a

$$m' = 0,00002417.$$

Quant aux masses m & m'' du premier & du troisième Satellite, la théorie des inégalités du second est insuffisante pour les déterminer; mais elle donne entr'elles, la relation suivante

$$91810.m + 148383.m'' = 16,5.$$

(Voyez la pièce citée de M. de la Grange, pages 74 & 78). En supposant donc $m = \mu m'$, on aura

$$m'' = 0,000111199 - 0,000014955.\mu.$$

Les temps des révolutions des trois premiers Satellites sont

$$1^j 18^h 28' 36''; 3^j 13^h 17' 54''; 7^j 3^h 59' 36'';$$

& il est clair que les valeurs de n , n' , n'' , sont réciproques

38 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

à ces temps; d'où il suit que ces valeurs sont entr'elles comme les nombres

$$1; 0,497978; 0,246967;$$

on aura ainsi

$$\frac{3 n^{\frac{1}{2}} \cdot (n - n'')}{n^{\frac{1}{2}} \cdot (n' - n'')} = 3,55242;$$

$$\frac{2 n''^{\frac{1}{2}} \cdot (n - n')}{n^{\frac{1}{2}} \cdot (n' - n'')} = 0,619791;$$

d'où l'on tire

$$a = 0,000000182187 \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1 + 3,55263 \cdot \mu \\ - 0,477756 \cdot \mu^2 \end{array} \right\}$$

La valeur de μ est comprise entre les deux limites $\mu = 0$

& $\mu = \frac{0,1199}{14955}$, dont la première répond à $m = 0$,

& dont la seconde répond à $m'' = 0$; or il est aisé de voir que la plus petite valeur dont a est susceptible, répond à $\mu = 0$; ainsi le temps t que l'angle ω doit employer dans le cas que nous discutons ici, à parvenir de 0^d à 90^d , est nécessairement moindre que

$$\frac{T}{4 \cdot \sqrt{(0,000000364374)}};$$

& comme T réduit en décimales de jours, est égal à 11,76986, il en résulte que t est moindre que 733,002, ou au-dessous de deux ans.

Maintenant, si l'on compare ce résultat aux observations, on verra qu'il leur est entièrement contraire; car les Tables des trois premiers Satellites, qui satisfont assez bien aux observations depuis plus d'un siècle, donnent à toutes les époques, V peu différent de 180 degrés, & par conséquent ω peu considérable. Suivnat celles que M. Bailli a insérées à la fin de son Ouvrage sur les Satellites de Jupiter, les

quantités dont V surpassoit 180 degrés, aux époques de 1671 & 1763, étoient de $9' 31''$, & de $12' 23''$; dans toutes les époques intermédiaires, elles étoient comprises entre ces limites. Il est donc certain que depuis la découverte des Satellites de Jupiter, ϖ ne s'est jamais élevé à 90 degrés; ainsi la supposition de l'angle ϖ croissant sans cesse, est entièrement contraire aux observations. Le second des trois cas de l'article VIII, est donc le seul qui puisse avoir lieu dans la Nature; c'est-à-dire que l'angle V est nécessairement périodique, & ne fait qu'osciller de part & d'autre de 180 degrés, en sorte que sa valeur moyenne est de six signes.

X I.

REPRENONS l'équation différentielle de l'article précédent.

$$\frac{\partial \varpi}{\sqrt{(\lambda + 2\alpha n^2 \cdot \cos. \varpi)}} = \partial t.$$

Si l'on nomme g , l'espace que la pesanteur terrestre fait parcourir dans la première seconde; si l'on imagine ensuite un pendule dont la longueur soit $\frac{2g}{\alpha i^2}$, i étant le nombre de secondes que renferme le temps de la révolution du premier Satellite; enfin si l'on suppose à l'origine du mouvement, ce pendule éloigné de la verticale, d'un angle dont le cosinus soit $\frac{-\lambda}{2\alpha i^2}$; ses oscillations représenteront les variations de l'angle ϖ .

Puisque les Tables des Satellites satisfont assez bien aux observations, sans avoir égard aux variations de cet angle, il doit être peu considérable: on peut donc supposer $\cos. \varpi = 1 - \frac{\varpi^2}{2}$; ainsi en faisant $\frac{\lambda + 2\alpha n^2}{\alpha n^2} = C$, on aura

$$\frac{\partial \varpi}{\sqrt{(C - \varpi^2)}} = n \partial t. \sqrt{(\alpha)}.$$

Cette équation donne, en l'intégrant,

$$\varpi = C. \sin. \{ n t \sqrt{a} \} + \gamma,$$

C & γ étant deux constantes arbitraires que l'observation peut seule déterminer. L'équation $\frac{\partial V}{\partial t} = \partial s$, donne

$$s = \pm n C. \sqrt{a}. \cos. \{ n t \sqrt{a} \} + \gamma,$$

d'où l'on voit que s est, ainsi que ϖ , une quantité périodique: en faisant donc abstraction de ces quantités, c'est-à-dire, en supposant que $n t$, $n' t$, $n'' t$, représentent les vrais moyens mouvemens des Satellites, on a rigoureusement $s = 0$, ou

$$n + 2 n'' = 3 n'.$$

On voit encore que cette équation n'exige point qu'à l'origine du mouvement, s ou $n + 2 n'' = 3 n'$, ait été rigoureusement nul; il suffit qu'il ait été compris dans les limites $- n C. \sqrt{a}$, & $+ n C. \sqrt{a}$.

On aura le temps t de la période des variations de s & de ϖ , au moyen de l'équation $n t. \sqrt{a} = 360^\circ$, ce qui donne $t = \frac{360^\circ}{n. \sqrt{a}}$; mais T étant le temps de la révolution du premier Satellite, on a $n T = 360^\circ$; on aura donc

$$t = \frac{T}{\sqrt{a}};$$

les deux limites de t , répondent conséquemment aux deux limites de a ; or la plus petite valeur de a est

$$a = 0,000000182187,$$

& la plus grande valeur est

$$a = 0,00000138542;$$

ainsi

ainsi les deux limites de t , sont

$$1503^{\text{jours}},5; \text{ \& } 4146^{\text{jours}},5;$$

c'est-à-dire, que le temps de la période des valeurs de s & de θ , est compris entre 4 ans $\frac{1}{3}$, & 11 ans $\frac{1}{3}$.

Les mouvemens des trois Satellites ont des variations analogues à celles de l'angle ϖ ; ces variations sont dans le rapport des quantités δn , δn , δn , qui par l'article V, sont entr'elles comme les quantités

$$1; - \frac{m}{m'} \cdot \frac{n'^{\frac{1}{2}} \cdot (n - n'')}{n^{\frac{1}{2}} \cdot (n' - n'')}; \frac{m}{m''} \cdot \frac{n''^{\frac{1}{2}} \cdot (n - n')}{n^{\frac{1}{2}} \cdot (n' - n'')}.$$

En nommant donc, $k \sin. \{ n t \sqrt{a} + \gamma \}$, l'équation qui en résulte dans le mouvement du premier Satellite; les équations correspondantes du second & du troisième Satellite, seront

$$- 1,18414 \cdot \frac{m}{m'} \cdot k \sin. \{ n t \sqrt{a} + \gamma \};$$

$$0,309895 \cdot \frac{m}{m''} \cdot k \sin. \{ n t \sqrt{a} + \gamma \};$$

& l'on aura

$$C = (1 + 3,55242 \cdot \frac{m}{m'} + 0,619791 \cdot \frac{m}{m''}) \cdot k.$$

Il est impossible dans l'état actuel de la théorie des Satellites de Jupiter, de prononcer sur la véritable valeur de C ; on voit seulement par l'inspection des erreurs des meilleures Tables, qu'il n'est pas impossible que cette valeur excède 40'; mais c'est un point que je laisse à discuter aux Astronomes qui cherchent à perfectionner cette théorie.

X I I.

IL suit de ce qui précède, que si l'on néglige les quantités périodiques, & que l'on n'ait égard qu'aux moyens

Mém. 1784.

F

42. MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

mouvemens & à leurs époques; on a les deux équations suivantes,

$$\epsilon - 3 \epsilon' + 2 \epsilon'' = 0; n - 3 n' + 2 n'' = 0.$$

Ces équations subsisteroient encore dans le cas où par des causes inconnues, telles que la résistance d'un milieu, les moyens mouvemens des Satellites de Jupiter seroient assujettis à des équations séculaires. En vertu de ces causes, les expressions des grands axes des orbites, & par conséquent les valeurs de n , n' , n'' , renfermeroient des termes proportionnels au temps; soient $i t$, $i' t$, $i'' t$, ces termes; i , i' , i'' , étant des coefficients constans, ou du moins que l'on peut traiter comme tels, pendant un très-long intervalle. Si l'on nomme, pour abréger, q la quantité

$$\frac{3}{2} \cdot m' m'' \cdot a \cdot \left[l \left(-\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r^1} \right) - h A^{(1)} \right];$$

on aura par les *art. V & VI*.

$$\delta n = q n^2 t. \sin. V + i t;$$

$$\delta n' = - \frac{m}{m'} \cdot \frac{n'^{\frac{1}{2}} \cdot (n - n'')}{n^{\frac{1}{2}} \cdot (n' - n'')} \cdot q \cdot n^2 t. \sin. V + i' t,$$

$$\delta n'' = \frac{m}{m''} \cdot \frac{n''^{\frac{1}{2}} \cdot (n - n')}{n^{\frac{1}{2}} \cdot (n' - n'')} \cdot q \cdot n^2 t. \sin. V + i'' t;$$

d'où l'on tire par l'*art. VIII*, les équations

$$\frac{\partial n}{\partial t} = q n^2 \cdot \sin. V + i;$$

$$\frac{\partial n'}{\partial t} = - \frac{m}{m'} \cdot \frac{n'^{\frac{1}{2}} \cdot (n - n'')}{n^{\frac{1}{2}} \cdot (n' - n'')} \cdot q \cdot n^2 \cdot \sin. V + i';$$

$$\frac{\partial n''}{\partial t} = \frac{m}{m''} \cdot \frac{n''^{\frac{1}{2}} \cdot (n - n')}{n^{\frac{1}{2}} \cdot (n' - n'')} \cdot q \cdot n^2 \cdot \sin. V + i''.$$

En supposant donc, comme dans l'article VII,

$$s = n - 3 n' + 2 n'';$$

$$a = q \cdot \left[1 + \frac{3m}{m'} \cdot \frac{n^{\frac{1}{2}} \cdot (n - n'')}{n_1^{\frac{1}{2}} \cdot (n' - n'')} + \frac{2m}{m''} \cdot \frac{n^{\frac{1}{2}} \cdot (n - n')}{n^{\frac{1}{2}} \cdot (n' - n'')} \right];$$

on aura

$$\frac{\partial s}{\partial t} = a n^2 \cdot \sin. V + i - 3 i' + 2 i''.$$

on a ensuite $\frac{\partial V}{\partial t} = s$; partant

$$\frac{\partial \partial V}{\partial t^2} = a n^2 \cdot \sin. V + i - 3 i' + 2 i''.$$

Supposons $V = 180^\circ + \varpi$, ϖ étant peu considérable; l'équation précédente donnera

$$\frac{\partial \partial \varpi}{\partial t^2} + a n^2 \varpi = i - 3 i' + 2 i'';$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$\varpi = C \cdot \sin. [n t \sqrt{a} + \gamma] + \frac{i - 3 i' + 2 i''}{a n^2};$$

C & γ étant deux constantes arbitraires; & comme, on a

$$s = \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial \varpi}{\partial t}; \text{ on aura}$$

$$s - 3 n' + 2 n'' = n C \cdot \cos. [n t \sqrt{a} + \gamma];$$

ainsi en négligeant les quantités périodiques, on aura

$$n - 3 n' + 2 n'' = 0.$$

On voit par-là que les causes qui peuvent altérer les moyens mouvemens des trois premiers satellites de Jupiter, ne troublent point le rapport précédent entre ces mouvemens; d'où il suit que si ces corps sont assujettis à des équations séculaires, celle du premier plus deux fois celle du troisième doit être égale à trois fois l'équation séculaire du second.

Pour déterminer ces équations, nous observerons que l'on a par ce qui précède,

$$q n^2 \cdot \sin. V = \frac{q \partial s}{a \partial t} - \frac{q}{a} \cdot (i - 3 i' + 2 i'');$$

on aura donc en rejetant la quantité périodique $\frac{\partial s}{\partial t}$,

$$\frac{\partial n}{\partial t} = i - \frac{q}{a} \cdot (i - 3 i' + 2 i''),$$

$$\frac{\partial n'}{\partial t} = i' + \frac{q m}{a m'} \cdot (i - 3 i' + 2 i'') \cdot \frac{n'^{\frac{1}{2}} \cdot (n - n'')}{n^{\frac{1}{2}} \cdot (n' - n'')},$$

$$\frac{\partial n''}{\partial t} = i'' - \frac{q m}{a m''} \cdot (i - 3 i' + 2 i'') \cdot \frac{n''^{\frac{1}{2}} \cdot (n - n')}{n^{\frac{1}{2}} \cdot (n' - n'')},$$

Si l'on intègre deux fois de suite, ces valeurs de ∂n , $\partial n'$, $\partial n''$; les termes proportionnels au carré du temps t , seront les équations séculaires des Satellites; les valeurs de ces équations seront par conséquent

$$\frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot \left[i - \frac{q}{a} \cdot (i - 3 i' + 2 i'') \right],$$

$$\frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot \left[i' + \frac{q m}{a m'} \cdot (i - 3 i' + 2 i'') \cdot \frac{n'^{\frac{1}{2}} \cdot (n - n'')}{n^{\frac{1}{2}} \cdot (n' - n'')} \right],$$

$$\frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot \left[i'' - \frac{q m}{a m''} \cdot (i - 3 i' + 2 i'') \cdot \frac{n''^{\frac{1}{2}} \cdot (n - n')}{n^{\frac{1}{2}} \cdot (n' - n'')} \right].$$

La valeur moyenne de V , est $180^\circ + \frac{i - 3 i' + 2 i''}{a n^2}$;

ainsi en supposant $i - 3 i' + 2 i''$ positif, V seroit plus grand que 180 degrés, & l'on pourroit expliquer par-là, pourquoi toutes les Tables des satellites de Jupiter donnent $V > 180$ degrés: mais on doit observer que les quantités i , i' , i'' , doivent être insensibles relativement à $a n^2$, puisqu'autrement elles produiroient dans les moyens mouvemens des Satellites, des équations séculaires que

l'intervalle de temps écoulé depuis leur découverte jusqu'à nos jours, auroit rendues très-sensibles. On pourroit à la vérité diminuer ces équations par différentes suppositions sur les valeurs de m , m' , m'' , i , i' , i'' ; supposons, par exemple, le Satellite m extrêmement petit relativement à m' & à m'' , & qu'il se meuve dans un milieu résistant qui ne s'étende pas jusqu'à l'orbite du second Satellite; on aura $q = a$, $i' = 0$, $i'' = 0$; les équations séculaires des trois Satellites seront nulles, & V sera égal à $180^d + \frac{i}{an}$. On pourra donc supposer $\frac{i}{an}$ égal à plusieurs minutes, sans qu'il en résulte aucune équation séculaire sensible dans les mouvemens des Satellites; car si d'un côté, le milieu dans lequel se meut le premier Satellite, tend à accélérer son mouvement, en l'approchant de Jupiter; d'un autre côté, l'action des deux autres Satellites, détruit l'effet de ce milieu, & conserve au premier Satellite son moyen mouvement & sa moyenne distance. Mais ces hypothèses & toutes celles du même genre, sont trop peu vraisemblables pour être admises; on doit donc regarder l'équation

$$e - 3e' + 2e'' = 0,$$

comme une condition à laquelle les époques des Tables doivent nécessairement satisfaire.

XIII.

Sur les Excentricités & les Inclinaisons des orbites des Planètes.

CONSIDÉRONS présentement le second objet que nous nous sommes proposés de traiter dans ce Mémoire, & cherchons à établir d'une manière générale, que les excentricités & les inclinaisons des orbites des Planètes, sont constamment renfermées dans d'étroites limites; pour cela

nous allons rappeler ici les principaux résultats de la théorie connue des inégalités séculaires.

Si l'on prend pour plan fixe, celui de l'Écliptique à une époque donnée, & que l'on compte les longitudes, de l'équinoxe correspondant supposé invariable; si l'on nomme ensuite $m, m', m'',$ &c. les masses des Planètes, celle du Soleil étant prise pour l'unité; $a, a', a'',$ les demi-grands axes de leurs orbites; $ea, e'a', e''a'',$ &c. leurs excentricités; $V, V', V'',$ &c. les longitudes de leurs aphélies; $\theta, \theta', \theta'',$ &c. les tangentes des inclinaisons de leurs orbites sur le plan fixe; enfin $I, I', I'',$ les longitudes de leurs nœuds ascendans; les quantités $e. \sin. V, e. \cos. V; e'. \sin. V', e'. \cos. V',$ &c; $\theta. \sin. I, \theta. \cos. I; \theta'. \sin. I', \theta'. \cos. I',$ &c. seront données par des équations différentielles linéaires du premier ordre, dont les coefficients sont constans. Les excentricités & les inclinaisons étant fort petites, le système des équations relatives aux excentricités, est indépendant du système des équations relatives aux inclinaisons; en sorte que le premier système est le même que si les orbites étoient dans le même plan, & le second est le même que si les orbites étoient circulaires.

En intégrant le premier système, chacune des quantités $e. \sin. V, e. \cos. V, e'. \sin. V', e'. \cos. V',$ &c. est exprimée par la somme d'un nombre fini de sinus & de cosinus d'angles proportionnels au temps t ; les nombres par lesquels il faut multiplier ce temps, pour former ces angles, étant les racines d'une équation algébrique, d'un degré égal au nombre des Planètes; nous représenterons cette équation par (k) . La même chose a lieu relativement aux équations du second système; mais l'équation dont dépend la formation des angles, n'est pas la même que pour le premier système; nous la représenterons par (k') . On peut consulter sur cet objet, les Mémoires de cette Académie, pour l'année 1772, *II. Partie*, page 361; & les Mémoires de l'Académie de Berlin, pour l'année 1782, pages 243 & 262.

Si toutes les racines des équations (k) & (k') sont réelles & inégales, les valeurs des quantités précédentes, ne renfermeront ni arcs-de-cercle ni exponentielles, & par conséquent elles resteront toujours fort petites; il n'en sera pas de même si quelques-unes de ces racines sont égales ou imaginaires, car on sait qu'alors les sinus & les cosinus se changent en arcs-de-cercle ou en exponentielles: mais quelle que soit la nature des racines de ces équations, les valeurs de $e \cdot \sin. V$, $e \cdot \cos. V$, $e' \cdot \sin. V'$, $e' \cdot \cos. V'$, &c. seront toujours comprises dans les formes suivantes:

$$\begin{aligned} e \cdot \sin. V &= a f^{i'} + \mathcal{C} \cdot f^{i''} + \&c. \\ &+ \gamma t' + \lambda \cdot t'^{-1} + \&c. + h; \\ e \cdot \cos. V &= \mu f^{i'} + \epsilon \cdot f^{i''} + \&c. \\ &+ \Phi t' + \psi \cdot t'^{-1} + \&c. + l; \\ e' \cdot \sin. V' &= a' f^{i'} + \mathcal{C}' \cdot f^{i''} + \&c. \\ &+ \gamma' t' + \lambda' \cdot t'^{-1} + \&c. + h'; \\ e' \cdot \cos. V' &= \mu' f^{i'} + \epsilon' \cdot f^{i''} + \&c. \\ &+ \Phi' \cdot t' + \psi' \cdot t'^{-1} + \&c. + l'; \\ &\&c. \end{aligned}$$

f étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. Les coefficients $a, \mathcal{C}, \mu, \epsilon$, &c, $a', \mathcal{C}', \mu', \epsilon'$, &c. des exponentielles, sont des quantités réelles sans exponentielles, mais qui peuvent être fonctions de l'arc t , & de sinus & de cosinus d'angles proportionnels à cet arc: les quantités $\gamma, \lambda, \Phi, \psi$, &c, $h, l, \gamma', \lambda', \Phi', \psi'$, &c, h', l' , &c. sont réelles, sans arcs-de-cercle ni exponentielles, & par conséquent constantes ou périodiques.

Supposons qu'abstraction faite du signe, on ait $i > i'$, $i'' > i'''$, &c. e étant égal à $(e \cdot \sin. V)^2 + (e \cdot \cos. V)^2$, on aura

$$\begin{aligned} e^2 &= (a^2 + \mu^2) \cdot f^{2i''} + \&c. \\ &+ (\gamma^2 + \Phi^2) \cdot t^{2i''} + \&c. + h^2 + l^2. \end{aligned}$$

On aura pareillement

$$e^{i^2} = (a^{i^2} + \mu^{i^2}) \cdot f^{i^2} + \&c. \\ + (\gamma^{i^2} + \phi^{i^2}) \cdot t^{i^2} + \&c. + h^{i^2} + l^{i^2}.$$

& ainsi de suite; on aura donc ainsi les valeurs des excentricités des orbites.

Ces valeurs ne peuvent servir que pour un temps limité, après lequel les excentricités devenant fort grandes, la supposition qu'elles sont peu considérables, & d'après laquelle elles ont été trouvées, cesse d'être exacte: on ne peut donc étendre à un temps quelconque, les résultats obtenus dans cette supposition, qu'autant que l'on est assuré que les racines de l'équation (k), sont toutes réelles & inégales; mais il seroit très-difficile d'y parvenir par la considération directe de cette équation. Voici un moyen fort simple de prouver que ni les exponentielles f^{i^2} , f^{i^2} , &c, ni l'arc t & les puissances ne se rencontrent point dans les valeurs de $e \cdot \sin. V$, $e \cdot \cos. V$; $e' \cdot \sin. V'$, $e' \cdot \cos. V'$, &c.

X I V.

REPRENONS l'équation (9) de l'article IV: si l'on suppose e & θ très-petits, & que l'on néglige les quantités des ordres e^4 , $e^2 \theta^2$, & θ^4 , elle donnera

$$e = m \sqrt{a} + m' \sqrt{a'} + \&c. \\ - \frac{1}{2} \cdot m \cdot (e^2 + \theta^2) \cdot \sqrt{a} - \frac{1}{2} m' \cdot (e'^2 + \theta'^2) \cdot \sqrt{a'} - \&c.$$

mais les moyennes distances des Planètes au Soleil ne sont point troublées par leur action mutuelle; on aura donc

$$m \cdot (e^2 + \theta^2) \cdot \sqrt{a} + m' \cdot (e'^2 + \theta'^2) \cdot \sqrt{a'} + \&c. = \text{constante.}$$

Nous avons observé dans l'article précédent, que les valeurs de e , e' , e'' , sont données par des équations indépendantes de celles qui donnent les valeurs de θ , θ' , θ'' , &c. en sorte qu'elles

qu'elles sont les mêmes que si θ , θ' , θ'' , &c. étoient nuls; mais l'équation précédente devient dans cette hypothèse,

$$\text{Const.} = m \cdot e^a \cdot V(a) + m' \cdot e^{a'} \cdot V(a') + \&c.$$

les valeurs de e , e' , &c. doivent donc satisfaire à cette équation, après un temps quelconque.

Si l'on y substitue les expressions générales de ces quantités, que nous avons données dans l'article précédent; on aura

$$\begin{aligned} \text{Const.} = & [m \cdot V(a) \cdot (a^2 + \mu^2) + m' \cdot V(a') \cdot (a'^2 + \mu'^2) + \&c.] \cdot f^{2t} + \&c. \\ & + [m \cdot V(a) \cdot (\gamma^2 + \varphi^2) + m' \cdot V(a') \cdot (\gamma'^2 + \varphi'^2) + \&c.] \cdot t^{2'} + \&c. \\ & + m \cdot V(a) \cdot (h^2 + l^2) + m' \cdot V(a') \cdot (h'^2 + l'^2) + \&c. \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{Const.} = \\ & + [m \cdot V(a) \cdot (\gamma^2 + \varphi^2) + m' \cdot V(a') \cdot (\gamma'^2 + \varphi'^2) + \&c.] \cdot t^{2'} + \&c. \\ & + m \cdot V(a) \cdot (h^2 + l^2) + m' \cdot V(a') \cdot (h'^2 + l'^2) + \&c. \end{aligned}} \right\} (b)$$

cette équation devant avoir lieu quel que soit t , il est nécessaire que les coefficients des exponentielles & des puissances semblables de t , disparaissent d'eux-mêmes; en égalant donc à zéro, le coefficient de f^{2t} , on aura

$$0 = m \cdot V(a) \cdot (a^2 + \mu^2) + m' \cdot V(a') \cdot (a'^2 + \mu'^2) + \&c.$$

mais $m \cdot V(a)$, $m' \cdot V(a')$, &c. sont des quantités positives, & a , μ , a' , μ' , &c. sont des quantités réelles; l'équation précédente ne peut conséquemment subsister, qu'en supposant $a = 0$, $\mu = 0$, $a' = 0$, $\mu' = 0$, &c. d'où il suit que les exponentielles ne se rencontrent point dans les valeurs de e , e' , &c.

L'équation (b) donne encore, en égalant à zéro, le coefficient de $t^{2'}$,

$$0 = m \cdot V(a) \cdot (\gamma^2 + \varphi^2) + m' \cdot V(a') \cdot (\gamma'^2 + \varphi'^2) + \&c.$$

d'où l'on tire

$$\gamma = 0, \varphi = 0, \gamma' = 0, \varphi' = 0; \&c.$$

Ainsi les valeurs de e , e' , &c. ne renferment point d'arcs-

50 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
de-cercle ; elles se réduisent par conséquent aux quantités
périodiques ,

$$\sqrt{(h^2 + l^2)}, \sqrt{(h'^2 + l'^2)}, \&c.$$

& ces quantités ont entr'elles, en vertu de l'équation (b),
la relation suivante

$$\text{Const.} = m.\sqrt{(a).(h^2 + l^2)} + m'.\sqrt{(a').(h'^2 + l'^2)} + \&c.$$

de manière que dans le développement du second
membre de cette équation, en sinus & en cosinus, les
coëfficiens de chaque sinus & de chaque cosinus doivent
disparoître d'eux-mêmes.

Si l'on applique les mêmes raisonnemens aux expressions
de θ , θ' , θ'' , &c. on s'assurera qu'elles ne renferment ni
exponentielles ni arcs-de-cercle, & qu'elles se réduisent
à des quantités périodiques. En supposant comme dans
l'art. IV,

$$\theta.\sin. I = p; \theta.\cos. I = q;$$

$$\theta'.\sin. I' = p'; \theta'.\cos. I' = q'; \&c.$$

on trouvera que les quantités p , q , p' , q' , &c. ont entre
elles la relation,

$$\text{Const.} = m.\sqrt{(a).(p^2 + q^2)} + m'.\sqrt{(a').(p'^2 + q'^2)} + \&c.$$

les équations (10) & (11) de l'art. IV, donnent encore
dans la supposition de p , q , p' , q' , &c. très-petits, les
relations suivantes entre ces quantités,

$$\text{Const.} = m q.\sqrt{(a)} + m'.q'.\sqrt{(a')} + \&c.$$

$$\text{Const.} = m p.\sqrt{(a)} + m'.p'.\sqrt{(a')} + \&c.$$

De-là nous pouvons généralement conclure que les
expressions des excentricités & des inclinaisons des orbites
des Planètes, ne renferment ni arcs-de-cercle, ni expo-
nentielles; & qu'ainsi le système des Planètes est renfermé
dans des limites invariables, du moins lorsque l'on n'a
égard qu'à leur action mutuelle.



OBSERVATIONS

SUR DES MORTS SUBITES

*Occasionnées par la rupture du ventricule gauche
du Cœur.*

Par M. PORTAL.

ON ne pourroit croire, si les observations ne l'avoient appris, que le cœur, cet organe musculueux, dont les parois sont si épaisses, pût se rompre, & occasionner ainsi la mort la plus prompte : Harvée en a rapporté un exemple, dans son immortel Ouvrage sur la circulation du sang ; & les Anatomistes en ont depuis recueilli d'autres dont ils ont fait mention dans leurs Écrits.

Il suffit de lire les Ouvrages de M.^{rs} Morgagni, Senac & Lieutaud, pour se convaincre que les oreillettes & les ventricules du cœur ont donné lieu, par leur rupture, à un épanchement de sang dans le péricarde. Ce qui doit le plus surprendre, c'est qu'il est prouvé par les observations de ces grands Médecins, que ce ne sont pas les oreillettes, dont les parois sont très-minces, qui s'ouvrent toujours, mais que c'est dans les ventricules, dont les parois sont prodigieusement épaisses & fortes, que ces sortes de ruptures sont les plus fréquentes ; encore peut-on conclure qu'elles sont plus communes dans le ventricule gauche que dans le ventricule droit, quoique les parois de celui-ci soient très-souples si on les compare avec celles du ventricule gauche. Ce point de doctrine est du moins confirmé par mes observations & par celles des Anatomistes qui les ont recueillies, & que j'ai eu soin de consulter ; ce qui est bien différent des simples dilatations, qui sont plus communes dans les oreillettes que dans les

ventricules, de même qu'il est plus ordinaire de voir les oreillettes dilatées au-delà de leur calibre, que les artères, lesquelles s'ouvrent au contraire plus souvent que les veines.

Les Anatomistes ont rendu compte de toutes ces différences; mais comme ils n'ont pas également fixé leur opinion sur les ruptures du ventricule gauche, & sur les causes qui les produisent, j'ai cru devoir communiquer à l'Académie mes observations & mes remarques sur cette matière; si elles ne sont pas entièrement nouvelles, elles concourront du moins à confirmer celles que divers Auteurs ont rapportées, entr'autres M.^r Morgagni; Senac, Haller & Lieutaud.

Ce fut en 1768, que j'eus occasion de faire la première ouverture de ce genre, madame de Chabanes, qui demeuroit dans la rue des Jeûneurs, avoit joui jusqu'à l'âge de soixante ans, d'une assez bonne santé; elle commença alors de ressentir de la difficulté de respirer; cette incommodité augmenta de plus en plus, elle étoit extrême, lorsqu'elle montoit un escalier ou dans sa voiture; son pouls devenoit très-irrégulier, même intermittent, & ce n'étoit qu'après un certain temps qu'elle se remettoit dans son état naturel; ce qu'il y a de singulier, c'est que cette Dame étoit moins fatiguée par les voitures rudes, que par celles qui étoient le mieux suspendues: elle vécut avec cette incommodité jusqu'à l'âge d'environ soixante-cinq ans. Elle avoit observé que la saignée étoit son meilleur remède, aussi se faisoit-elle saigner ordinairement deux ou trois fois l'année, & quelquefois davantage. Les plus légères inquiétudes lui occasionnoient des palpitations; elle se mit un jour dans une violente colère pour une petite contrariété; les palpitations furent plus fortes que jamais, elle ne put plus respirer qu'avec une peine extrême, son visage pâlit, ses extrémités devinrent aussi froides que de la glace, & elle périt.

J'assistai à l'ouverture du cadavre, avec M.^r de Vernage

& Malouin , qui avoient été les Médecins; voici ce que l'on trouva.

Il y avoit dans le bas-ventre un médiocre épanchement d'une sérosité rougeâtre; le foie étoit engorgé & très-dur, la vésicule du fiel étoit remplie par quatre pierres; elle s'étoit rétrécie & avoit la forme d'un canal, d'un diamètre presque égal dans toute sa longueur: il n'y avoit dans le bas-ventre aucune autre altération remarquable.

Ce fut dans la poitrine qu'on vit les causes de la mort; le péricarde étoit prodigieusement distendu, & plein de sang qui s'écoula en grande partie lorsqu'on l'ouvrit; les oreillettes du cœur étoient d'une grandeur énorme, le ventricule droit étoit au moins deux fois plus ample que le gauche, & leurs parois que cette distension avoit semblé devoir rendre plus minces, étoient au contraire plus épaisses, mais mollasses, elles étoient percées de plusieurs déchirures; le ventricule gauche même, malgré la grande épaisseur de ses parois, l'étoit en trois endroits; l'une de ces ouvertures étoit à la partie antérieure du cœur, proche la base, à côté du cordon tendineux qui lie l'aorte au cœur; les deux autres étoient dans le corps du même ventricule gauche, presque parallèles à l'autre, & à un travers de doigt de distance; le ventricule droit étoit percé près la pointe, vers le bord supérieur de la cloison du cœur,

Les valvules sigmoïdes de l'aorte, étoient endurcies & hérissées de concrétions osseuses; un amas de même nature, placé derrière elles, ne leur permettoit de donner au sang qu'une issue très-étroite, & ce passage étoit encore gêné par des ossifications dont l'aorte étoit incrustée.

L'artère pulmonaire étoit ossifiée en divers endroits proche de son orifice dans le ventricule droit; le corps annulaire ligamenteux qui l'attache avec ce ventricule, & qui soutient les valvules, étoit très-dur, inégal, & si gonflé que l'ouverture étoit singulièrement rétrécie; les valvules avoient la consistance d'un cartilage, & les corpuscules de Vidusvidius, ou si l'on veut, d'Arantius, qui les termi-

noient, étoient aussi gros qu'un petit pois, au moins sept ou huit fois plus qu'ils ne le sont naturellement.

Vidusvidius a connu ces tubercules avant Arantius, auquel M. Morgagni fait honneur de la découverte: on peut voir, si l'on veut, à ce sujet, notre histoire de l'Anatomie.

Ce sont sans doute ces obstacles qui ont empêché le cœur de se vider dans la sistole; la résistance que le sang a opposée aux contractions de ses ventricules, a déterminé peu-à-peu leur dilatation, la circulation du sang dans les vaisseaux coronaires a été ralentie, le sang qu'ils contenoient s'est extravasé entre les fibres du cœur qui s'en sont abreuvées, leur tissu a été relâché, gonflé, & elles se sont déchirées par leurs propres contractions.

On a trouvé dans quelques sujets morts subitement par la rupture du cœur, & dont M. Morgagni nous a transmis l'histoire, des altérations dans le cœur, à peu-près semblables à celles dont nous venons de parler; mais je ne connois aucun exemple de rupture des deux ventricules dans la même personne. Je n'ai pas non plus connoissance qu'on ait trouvé les tubercules des valves aussi gonflés qu'ils l'étoient dans celle qui a été l'objet de cette observation: sans doute que le ramollissement extrême des parois du cœur, aura facilité leurs déchirures, dont la dernière cause aura été l'effort que le sang aura fait sur elles, ne pouvant sortir librement.

Madame la Comtesse de Nevron étoit d'un embonpoint extrême; elle éprouvoit depuis long-temps de la difficulté de respirer lorsqu'elle se livroit à quelques exercices un peu fatigans. Elle vint de Nanci à Paris sans s'arrêter; le soir de son arrivée, elle éprouva une grande difficulté de respirer, avec des douleurs de coliques assez vives. Un Médecin qui fut appelé trouva son poulx extrêmement plein & d'une inégalité singulière; cet état lui parut indiquer un vomissement prochain: il s'étoit proposé de la purger le lendemain matin avec un ou deux grains d'émétique, si la Nature ne produisoit d'elle-même auparavant quelque heureux changement.

Cet état se termina d'une manière plus tragique: M.^{me} la Comtesse de Nevron sentit vers le milieu de la nuit que sa respiration devenoit plus difficile; elle appelle du secours, on l'entend, on vole vers elle, & on la trouve expirante; son visage étoit pâle, ses mains & ses pieds étoient froids; elle étoit sans pouls, & l'on ne put entendre quelques foibles sons qu'elle proféroit: on ne la vit que pour être témoin de sa mort, qui fut très-précipitée.

Son corps conserva long-temps la chaleur, sur-tout la partie de la poitrine qui correspond au cœur, ce qui fut cause qu'on en retarda l'ouverture au-delà du temps qu'on a coutume d'attendre pour une pareille opération. Ce corps étoit tellement surchargé de graisse, qu'il étoit d'un volume énorme; il y en avoit sous la peau plus de quatre travers de doigt, les muscles en étoient comme pénétrés; leur texture avoit cependant la solidité ordinaire; l'épiploon contenoit une quantité de graisse si prodigieuse, qu'il occupoit la plus grande partie de la cavité abdominale; il y en avoit aussi beaucoup entre les lames du mésentère, autour des reins; le foie étoit un peu plus volumineux, & renient qu'il ne l'est ordinairement, & il y avoit cinq calculs biliaires dans la vésicule du fiel.

Il y avoit une si grande quantité de graisse entre les lames du médiastin, qu'elles étoient considérablement écartées, ce qui rétrécissoit la capacité de la poitrine, & donnoit lieu à la compression. Le cœur, qui étoit couvert d'une couche de graisse de plus de deux travers de doigt d'épaisseur, baignoit dans le sang, dont le péricarde étoit plein; ce sang s'étoit épanché dans le sac membraneux par une ouverture qu'on découvrit à la base du cœur, près de l'artère-aorte; le rebord ligamenteux qui fixe cette artère avec le cœur, en étoit détaché dans la partie antérieure de sa circonférence, au point qu'il en résultoit un trou dans lequel je pus facilement introduire le petit doigt; du reste, la substance du cœur étoit solide & compacte, comme elle l'est ordinairement. Les ventricules, même celui qui s'étoit

déchiré, n'étoient pas plus grands que de coutume, & il n'y avoit aucune marque d'érosion en aucun endroit de sa texture; les vaisseaux qui portent ou qui reçoivent le sang de ce viscère, n'étoient point altérés, de sorte qu'on ne pouvoit attribuer cet accident à aucun vice qui leur fût propre, ni à aucune affection contre nature des fibres musculieuses du cœur.

Malgré la grande quantité de sang épanché dans le péricarde, il y en avoit encore beaucoup dans les vaisseaux, soit dans les artères, soit dans les veines; & n'est-ce pas à un excès de ce liquide, ou à l'énorme quantité de graisse, qu'on doit attribuer la cause de cette rupture du cœur?

L'endroit où cette crevasse s'est faite, mérite d'être considéré; ce n'est pas à la pointe du cœur, qui est la partie la plus mince, & où ces sortes de ruptures se font le plus souvent, au rapport de M.^{rs} Morgagni & Senac, mais à la base, dans l'endroit où le cœur paroît le plus fort par sa structure tendineuse.

Le ventricule du cœur, dans lequel cette ouverture contre nature, s'est faite, n'étoit pas plus dilaté qu'il ne l'est ordinairement, & ses parois n'étoient point ramollies, comme M.^{rs} Senac & Morgagni l'ont trouvé dans des cœurs couverts de graisse, & qui s'étoient rompus, ce qui fait même une exception à ce qu'ils ont avancé; car ces célèbres Anatomistes ont cherché à attribuer à quelque altération dans la texture du cœur, la cause disposante de sa rupture. Ils croyoient que la graisse ramassée sur le cœur, en ramollissoit considérablement les fibres, ce qui faisoit que le sang, en le distendant pendant la diastole, terminoit par le rompre; ils ont aussi attribué quelquefois la première cause de cette rupture à un ulcère qui avoit rongé le cœur, lequel, tellement aminci, n'avoit enfin pu résister à l'impulsion du sang, ou même que l'ulcère avoit terminé par faire une ouverture complète au cœur, ce qui avoit donné lieu à une irruption du sang dans le péricarde.

Toutes

Toutes ces causes ont eu lieu , & leur existence a été confirmée par les observations que les Médecins que nous avons cités , ont rapportées & s'avamment discutées ; mais dans le cœur dont il s'agit , il n'y avoit ni ramollissement , ni aucune trace d'ulcère , il paroît au contraire qu'il jouissoit de toute sa force , & que c'est moins par un défaut de solidité dans ses parois , que par un surcroît de résistance qu'elles n'ont pu vaincre , qu'elles ont crevé , ce qui aura eu lieu lors de la contraction , ou pendant la systole du cœur.

On ne peut raisonnablement admettre que la rupture du cœur se fasse pendant la diastole , comme M.^{rs} Senac & Morgagni le croyoient , sans admettre , comme ils l'ont fait , une extension plus ou moins grande des fibres du ventricule , avant la rupture qui en augmente plus ou moins la capacité ; mais comme dans ce cas , & dans quelques autres que je pourrois citer , le ventricule où l'on a trouvé la déchirure n'étoit pas plus ample , on doit conclure que ce n'est pas par une forte extension qu'elle s'est faite.

Si cette opinion étoit fondée , le cœur s'ouvreroit toujours à la poitrine des ventricules , où la paroi est aussi mince entre quelques trousseaux du réseau musculoux , que la plus fine membrane ; or , ces observations démontrent le contraire.

Tous les trousseaux musculoux se rapprochent fortement pendant la contraction de cet organe ; les vides qu'ils laissent pendant la dilatation du cœur , disparaissent , & ils forment une paroi infiniment plus solide que celle qu'on voit dans le cadavre ; aussi arrive-t-il rarement que ce soit dans cet endroit que le cœur se déchire , ainsi qu'on peut le voir en lisant mes Observations & celles qui ont été recueillies par les Anatomistes. Les ruptures qui surviennent aux autres muscles , peuvent donner un surcroît de preuves à mon opinion ; on en a vu plusieurs se rompre à la suite de violentes convulsions , ou de leurs excessives contractions ; M. de Haller en cite des exemples mémorables.

D'ailleurs , quelles seroient les puissances qui pourroient pousser le sang dans les ventricules , avec assez de force.

pour en faire crever les parois! ce ne pourroit être que les veines-caves & les oreillettes; mais leur tissu étant encore infiniment plus foible que celui des ventricules, on ne peut leur attribuer un pareil effet, à moins qu'on ne supposât que le tissu des ventricules fut extrêmement relâché, ce qui n'avoit point lieu dans la circonstance présente.

Une Dame, âgée de soixante-cinq ans, maigre, & d'une sensibilité extrême, éprouvant depuis long-temps des palpitations de cœur, qu'on croyoit spasmodiques, faisoit un grand usage des bains tièdes; on lui conseilla de les prendre froids, & bientôt on lui dit d'y joindre de la glace, & même d'en mettre sur la tête, dans une grande vessie, ce qu'elle exécuta fidèlement. Cependant la saison étant devenue très-froide, cette Dame crut devoir continuer de pareils bains, mais ils lui furent si funestes qu'elle y tomba en syncope. On la retira promptement de l'eau pour la mettre dans son lit, on tâcha de l'échauffer par divers cordiaux: vains secours, cette Dame ne put être rappelée à la vie. J'assistai à l'ouverture du corps, qui fut faite par M. Leduc mon Prévôt; & voici ce qu'elle nous apprit d'intéressant: le péricarde étoit tellement dilaté qu'il comprimoit le poumon gauche qui étoit refoulé vers la partie supérieure de la poitrine; il étoit plein de sang, en partie liquide, & en partie grumelé; on découvrit un caillot considérable qui adhéroit à la partie postérieure & supérieure du cœur. Ce caillot ôté, on vit une ouverture d'environ huit lignes de longueur, laquelle aboutissoit dans le ventricule gauche qui étoit plein de sang; l'ouverture de l'aorte étoit très-rétrécie, les valvules étoient aussi dures qu'un cartilage, renversées vers le cœur; deux colonnes charnues longitudinales avoient été déchirées, quelques-unes de leurs extrémités tendineuses étoient adhérentes aux bords de la crevasse; ces bords étoient frangés, inégaux, comme seroient ceux d'un morceau de drap qu'on auroit déchiré par une forte extension. Il n'y

avoit aucune trace d'ulcère ; les parois du cœur avoient aussi leur solidité à peu-près naturelle ; & ce qu'il y a de remarquable , c'est qu'auprès de cette ouverture , contre nature , il y avoit une fossette bouchée par une membrane très-mince , qui n'étoit point percée. L'oreillette gauche , les vaisseaux pulmonaires & le ventricule droit étoient très-dilatés , & les parois de celui-ci étoient extrêmement minces ; il n'y avoit d'ailleurs aucune altération dans les valvules de l'artère pulmonaire , ni dans le reste de l'étendue de ce canal.

Les ossifications qui se sont formées à l'embouchure de l'aorte dans le ventricule gauche , ont été sans doute la première cause de la rupture du cœur. En rétrécissant le canal de l'aorte , elles ont opposé un obstacle à l'issue du sang , l'oreillette gauche n'a pu se vider avec la même facilité ; les veines pulmonaires ont été si fort engorgées , que l'artère pulmonaire n'a pu verser en elles le sang qu'elle avoit reçu du ventricule droit : ainsi de proche en proche il s'est fait un engorgement qui a donné lieu à la dilatation des vaisseaux pulmonaires , à celle des cavités du cœur ; & comme le ventricule droit a ses parois beaucoup plus faibles que le ventricule gauche , il est arrivé qu'elles se sont dilatées davantage que celles-ci , lesquelles au contraire se sont déchirées les premières.

Les bains d'eau à la glace auront occasionné un reflux de sang dans l'intérieur du corps ; le cœur en aura été surchargé , & le ventricule gauche ne pouvant s'en délivrer par les contractions , se sera enfin ouvert. Nous avons vu d'autres dilatations du ventricule-droit , occasionnées par des ossifications des valvules de l'aorte , ou par d'autres obstacles qui s'opposoient à l'issue du sang du ventricule gauche par l'aorte ; ce qui fait voir qu'il faut quelquefois chercher du côté gauche du cœur , les causes des altérations qu'on trouve du côté droit.

Il n'en est pas de même à l'égard des dilatations du ventricule gauche du cœur ; les causes qui les produisent

existent toujours en lui, & celles qui ont leur siège dans le ventricule droit, ne peuvent les occasionner. J'ai vu plusieurs fois des dilatations du ventricule droit dans des sujets chez lesquels, non-seulement le ventricule gauche n'étoit pas plus ample que de coutume, mais même étoit plus rétréci: j'en ai cherché la cause, & j'ai constamment trouvé un obstacle qui s'opposoit à la circulation du sang dans l'artère pulmonaire. Je puis citer, entr'autres, une observation de ce genre, que j'ai faite il y a une quinzaine d'années, dans la rue Mazarine: le sieur Masson aimoit passionnément à donner du cor de chasse; il passoit à cet exercice les matinées, & souvent une bonne partie des après-dînées. Il éprouva de la difficulté de respirer & des crachemens de sang; on lui prescrivit divers remèdes, & on lui conseilla sur-tout d'abandonner l'usage du cor de chasse. Ces conseils furent inutiles; à peine fut-il un peu mieux, qu'il reprit le même instrument; il sentit des palpitations de cœur, d'abord légères & passagères, mais elles devinrent en peu de temps très-vives & constantes. Il éprouvoit une suffocation continuelle, & se plaignoit sur-tout d'une douleur vers le sternum; la respiration devint difficile de plus en plus, son pouls d'une inégalité extrême, les jambes s'enflèrent: la situation la plus commode pour lui, étoit d'être debout ou assis sur un siège très-haut. On remarqua que lorsqu'il étoit couché, il sentoit quelque soulagement lorsqu'on lui comprimoit la poitrine légèrement à diverses reprises; malgré cela il ne pouvoit rester long-temps dans cette situation; il eut des foiblesses, ou plutôt des syncopes fréquentes; ses extrémités restèrent, les deux derniers jours de sa vie, froides comme du marbre: ce malheureux périt dans une espèce de suffocation.

Je me suis convaincu, par l'ouverture du corps, que cette mort avoit été occasionnée par la dilatation du ventricule droit du cœur, qui étoit énorme & plein de sang concret; le sang n'a pu sortir du ventricule droit aussi facilement & en égale quantité qu'il y entroit par l'oreillette

qui lui correspond, ce qui a donné lieu peu-à-peu à la dilatation de ses parois; le ventricule gauche s'est trouvé rétréci, ce qui arrive toutes les fois que les dilatations du ventricule droit proviennent de quelque embarras dans l'ouverture ou dans le trajet des vaisseaux pulmonaires.

Telles sont les observations que je m'étois proposé de donner à l'Académie, elles prouvent:

1.^o Que les ruptures du ventricule gauche du cœur sont plus fréquentes qu'on ne croit généralement:

2.^o Qu'elles peuvent survenir sans aucune altération, qui ait préalablement affoibli le tissu de ce viscère:

3.^o Qu'elles sont souvent l'effet de la contraction, & non de la dilatation du cœur, produite par l'influx du sang:

4.^o Qu'ordinairement, lorsque le ventricule gauche est dilaté, le ventricule droit l'est aussi; tandis au contraire que le ventricule droit est souvent dilaté sans que le ventricule gauche le soit, lequel même est alors souvent rétréci.

La plupart de ces considérations m'ont paru intéressantes, ce qui m'a déterminé de les présenter dans ce Mémoire; persuadé d'ailleurs que, s'il est utile de connoître les moyens industrieux que la Nature emploie pour sa conservation, il ne l'est pas moins de savoir comment elle tend à sa ruine, tant pour lui opposer les remèdes convenables lorsqu'il est possible, que pour s'en abstenir lorsqu'ils sont dangereux, ou même inutiles.

Je joindrai à ce Mémoire quelques observations sur la rupture du ventricule & de l'oreillette gauches du cœur, qui m'ont été communiquées par M. Chauffier, habile Chirurgien de Dijon; elles m'ont paru intéressantes & dignes d'être connues de l'Académie.

Le 14 Novembre 1769, M. Chauffier fut chargé de faire la visite juridique du cadavre du nommé Étienne Grappin, Laboureur de Saulon. Ce jeune homme, fort & vigoureux, conduisoit une voiture chargée de pierres; ayant voulu s'asseoir sur un des chevaux, le pied lui glissa,

il tomba, & la roue lui passa lentement sur la clavicule gauche près du sternum, & continua son trajet obliquement sur le côté gauche de la poitrine : ce malheureux resta sur la place, sans donner aucun signe de vie.

Après avoir enlevé les tégumens & les muscles, M. Chauffier trouva l'articulation sternale de la clavicule relâchée, & sur tout le côté gauche du thorax une suite de fractures qui s'étendoit obliquement de la partie antérieure à la partie postérieure.

La première côte étoit fracturée près le sternum ; mais cette fracture étoit incomplète, car il y avoit encore à la face externe quelques lames osseuses qui maintenoient la continuité de cette côte ; de sorte que l'on voyoit aisément qu'elle avoit souffert une pression graduée & très-forte. La seconde côte étoit fracturée plus obliquement en dehors ; & il y avoit au corps de cet os deux fractures distantes l'une de l'autre de près de trois pouces, ce qui étoit à peu près la largeur des jantes de la roue. Les autres vraies côtes & la première des fausses étoient également fracturées en deux endroits ; la seconde des fausses l'étoit seulement en un.

Les tégumens ne présentoient aucun vestige de contusion ; il n'y avoit pas une goutte de sang infiltrée dans le tissu cellulaire ; la plèvre étoit entière, le poulmon sans altération ; mais le péricarde étoit fort distendu, plein de sang coagulé, l'oreillette gauche étoit déchirée à la base près le ventricule ; & le déchirement étoit si considérable, que l'on pouvoit facilement porter par cette ouverture deux doigts dans le ventricule gauche.

Il paroît évident à M. Chauffier que la rupture de l'oreillette gauche a été déterminée par la pression exercée sur la crosse de l'aorte ; on ne pourra en douter, si l'on se rappelle la direction & le trajet de la roue ; si l'on considère la situation de la clavicule, le relâchement de son articulation sternale, le poids énorme de la voiture, la lenteur de la marche. Tandis que la roue cheminoit lentement sur la poitrine, la crosse de l'aorte comprimée

refusoit le passage au sang ; l'oreillette gauche devoit en regorger ; & la force contractive du cœur augmentant par la résistance qu'il éprouvoit , a déterminé la rupture dans l'endroit le plus foible de l'oreillette. C'est ainsi, ajoute ce célèbre Chirurgien , que nous voyons la matrice souffrir une rupture à son fond, par la force de sa propre contraction , toutes les fois qu'il y aura à son col ou au bassin un obstacle assez puissant pour résister à la sortie de l'enfant , &c.

Dans une suite d'expériences que M. Chauffier a faites sur l'irritabilité & la sensibilité des animaux, il a vu les cavités du cœur se dilater , se rompre presque dans l'instant , toutes les fois qu'il arrêtoit la circulation dans les grosses artères.

Si sur un animal vivant on serre par une ligature (ou ce qui est encore plus simple & plus commode) avec une pince le tronc de l'aorte, le ventricule & l'oreillette gauches se déchirent ; mais si on exerce cette pression sur le tronc de l'artère pulmonaire, le ventricule, l'oreillette droite, se distendent, se dilatent considérablement ; les contractions du cœur redoublent , chaque fibre frémit & palpite ; mais M. Chauffier n'a point vu les cavités droites souffrir une rupture.

Deux autres observations, fournies par l'ouverture des cadavres, confirmeront que tout ce qui diminue le diamètre de l'aorte, détermine la dilatation & la rupture des cavités gauches du cœur ; elles appartiennent encore à M. Chauffier.

En Janvier 1771 , un homme enfermé à la maison de force, périt subitement dans une violente dispute qu'il eut avec un de ses camarades : son cadavre servit aux démonstrations publiques d'Anatomie que M. Chauffier fait chaque année. Les parois du ventricule étoient amincies, étendues , & il y avoit à sa pointe une rupture oblongue d'environ un pouce.

Dans la dissection de la poitrine, ce Chirurgien trouva près la crosse de l'aorte une tumeur de la grosseur du poing , d'une nature presque cartilagineuse , qui enveloppoit le tronc de l'aorte , un peu au-dessous de la naissance des artères sous-clavières & carotides.

Cette tumeur avoit dans cet endroit tellement rétréci le diamètre de l'aorte , qu'à peine pouvoit-on y passer l'extrémité du petit doigt.

Depuis la répercussion d'une humeur dartreuse , une jeune fille avoit été sujette à une infinité de maux très-différens. Tantôt elle éprouvoit des douleurs vagues dans les membres , tantôt des douleurs de tête très-vives , des vertiges , des éblouissemens , mais toujours une pesanteur à la région du cœur , un état de langueur habituel , une gêne dans la respiration , souvent des oppressions , quelquefois des palpitations très-fatigantes : la suspension des règles fut regardée comme la cause de ces maux ; tous les remèdes furent inutiles. Enfin , le 4 Juillet 1774 , après trois ans de douleurs , cette fille périt tout-à-coup dans l'effort d'une toux , & en rendant quelques crachats sanglans : elle étoit alors âgée de vingt-un ans.

M. Chauffier fit l'ouverture du cadavre , & il trouva la cavité gauche de la poitrine pleine de sang , le cœur d'un volume extraordinaire ; le péricarde tellement adhérent à ce viscère , qu'il ne put l'en détacher ; l'oreillette & le ventricule gauches étoient tellement dilatés , qu'on pouvoit aisément y mettre les deux poings ; leurs parois tellement amincies , qu'à peine pouvoit-on les distinguer de la substance même du péricarde ; mais la dilatation anévrysmale ne se bornoit pas aux cavités du cœur : les veines pulmonaires étoient également distendues , & il y avoit une rupture à la veine pulmonaire qui revient du lobe gauche. Cette rupture avoit près de neuf lignes , & étoit près l'entrée de la veine dans le poulmon : l'aorte avoit son diamètre naturel ; mais les valvules sigmoïdes étoient dures , épaisses , avoient la grosseur d'une petite amande , & renfermoient dans leur tissu une substance blanche & épaisse comme du plâtre , ce qui empêchoit la liberté du passage du sang , & avoit produit par degrés le vice d'organisation que M. Chauffier observa aux cavités gauches du cœur.



OBSERVATIONS

OBSERVATION

SUR LA NATURE ET SUR LE TRAITEMENT
D'UNE MALADIE SINGULIÈRE.

Par M. P O R T A L.

S'IL n'y a qu'une seule manière de se bien porter & de vivre, il y en a une multitude d'être malade & de mourir *. Depuis long-temps les Grands Anatomistes se sont occupés à les connoître; mais il s'en faut de beaucoup que cette importante partie de la Médecine soit portée à son dernier degré de perfection.

A proportion qu'on se livre à l'étude des causes de nos maux, il semble qu'on en voit augmenter le nombre; cependant comme on ne parviendra jamais à les traiter avec succès, que lorsqu'on sera parvenu à les connoître, on comprend combien il importe pour les progrès de la Médecine, que ceux qui l'exercent, rendent publiques les observations particulières que la pratique leur fournit.

C'est ce qui m'engage de faire connoître l'histoire d'une maladie singulière qu'a éprouvée le fils de M. le Prince Giustiniani, Romain. Il étoit d'une foible constitution, cependant il étoit parvenu jusqu'à l'âge de onze ans sans éprouver de grandes maladies. C'est à cette époque qu'il commença à ressentir quelques dérangemens dans les fonctions de l'estomac; il n'eut d'abord que de légères envies de vomir, quelques heures après le repas; mais bientôt il éprouva, après avoir mangé, de violentes douleurs dans la région de l'estomac; ces douleurs étoient suivies de

* *Multas rerum Natura mortis vias aperuit, & multis itineribus fasces decurrunt. Et hæc conditio miserrima humani generis, quod nascimur uno modo, multis morimur.* Annæi Senecæ controvers. lib. VII, contr. I.

mouvemens convulsifs : il maigrit & dépérit de jour en jour.

On consulta les Médecins les plus célèbres de Rome , & plusieurs autres Médecins étrangers qui avoient de la réputation ; on fit divers remèdes , mais sans succès ; ce qui déterminâ les parens du jeune Prince, de le conduire à Paris pour l'y faire traiter.

Je fus appelé pour lui donner mes soins : voici quel étoit son état.

Environ deux heures après qu'il avoit pris quelque nourriture , il commençoit à éprouver une douleur obscure dans le bas-ventre vers la région de l'estomac ; cette douleur se prolongeoit du côté gauche sous les fausses côtes ; la respiration devenoit gênée de plus en plus ; ses forces diminuoient , & dans peu il étoit obligé de s'asseoir accablé de fatigue. Après quelques instans il sentoit la respiration devenir plus difficile , son visage rougissoit , ses yeux se gonfloient , devenoient saillans & très-fixes ; il éprouvoit un violent resserrement au gosier , ce qui le forçoit à sortir la langue hors de la bouche , à diverses reprises , plus ou moins vite , suivant le degré d'étouffement qu'il éprouvoit : sa langue étoit alors d'un rouge violet & d'une épaisseur singulière ; chaque expiration étoit accompagnée d'un cri plaintif , & qu'on entendoit de très-loin.

Le malade logeoit alors sur le Jardin du Palais-Royal , d'où l'on entendoit ses cris , qui attiroient tous les jours sous ses fenêtres une multitude de personnes.

Dans cet état , il faisoit des efforts continuels pour se relever de son siège ; mais à peine s'en étoit-il un peu éloigné , qu'il étoit forcé de se laisser tomber dans son fauteuil. Deux personnes l'aideroient dans ce cruel exercice pour l'empêcher de se blesser ; il se relevoit & s'abaissoit environ vingt fois par minute ; ce qui duroit depuis trois quarts-d'heure , jusqu'à une heure & demie.

M. le Prince Giustiniani avoit alors environ vingt ans , & il y en avoit neuf qu'il étoit dans un état à peu-près

pareil, & toujours environ deux heures après qu'il avoit mangé.

Cet état se terminoit par deux ou trois violentes expirations ; le malade quittoit alors son siège & pouvoit rejoindre la compagnie ; mais on juge bien qu'il étoit d'une foiblesse extrême, soit pour le moral, soit pour le physique. Il étoit d'une maigreur singulière ; son teint étoit couperosé, il dormoit beaucoup, & sa foiblesse l'obligeoit de rester longtemps au lit ; il ne pouvoit soutenir que de très-petites promenades, quoiqu'il aimât mieux se mouvoir, que de rester très-peu de temps debout sans marcher.

Les fonctions de son esprit étoient très-retardées pour son âge, mais on voyoit que cet état de foiblesse dans l'esprit tenoit à la foiblesse du physique : les facultés de l'ame peuvent-elles se développer quand le corps souffre un dépérissement continuel ?

J'ai vu M. le Prince Giustiniani dans l'état que je viens d'exposer, & comme il étoit très-ancien, & que le malade avoit d'ailleurs été traité par des Médecins d'un grand nom, j'ai hésité d'entreprendre une pareille cure ; cependant la singularité de cette maladie, & la triste situation du malade, m'ont inspiré le plus vif intérêt.

Je me suis fait rendre un compte exact des divers traitemens qui avoient été faits, & l'on pense bien que dans l'espace de neuf ans, ce malade qui avoit consulté beaucoup de Médecins, avoit fait un grand nombre de remèdes ; il étoit important que je les connusse : souvent rien ne conduit mieux un Médecin à la découverte d'un bon remède, que la connoissance de ceux qui n'ont pas réussi, ou même qui ont été contraires.

Quelques Médecins, persuadés que l'estomac du jeune malade manquoit de ressorts, lui avoient fait prendre divers remèdes chauds. D'autres, qui avoient attribué la cause de la maladie à un excès d'irritation & de sensibilité dans cet organe, avoient donné des remèdes contraires aux premiers. Enfin il y avoit eu des Médecins qui avoient

cru pouvoir attribuer à des vers dans les voies alimentaires, la cause de la maladie, & qui avoient prescrit les remèdes qu'ils croyoient utiles d'après cette indication. Les erreurs de ces Médecins me conduisirent à de nouvelles recherches.

Je ne pouvois croire qu'un estomac trop relâché pût donner lieu à des vomissemens qui ne s'opèrent que par de fortes contractions de ce viscère. Je ne pouvois non plus admettre pour unique cause de cette étrange maladie, un excès de sensibilité & d'irritabilité d'estomac, quand je savois que le malade gardoit les alimens deux heures, quelquefois davantage, sans éprouver la plus petite douleur. Enfin étoit-il croyable que des vers pussent régulièrement, depuis plusieurs années, exciter les mêmes symptômes, à une heure fixe, après le repas, & que le malade n'en ressentît plus ensuite aucune atteinte?

Je crus devoir attribuer à une autre cause la maladie du jeune Prince, mais la difficulté étoit de la découvrir. Je craignois de me livrer à des conjectures; le peu de succès des Médecins qui avoient été déjà consultés, devoient me les faire craindre: je crus pouvoir trouver dans le tact des viscères abdominaux, un moyen plus assuré. En effet, je reconnus que la région épigastrique étoit dure & gonflée, qu'il y avoit aussi de la résistance dans les hypochondres, sur-tout dans le gauche. On sentoit, en portant les doigts autour des fausses côtes gauches, une tumeur qui les débordoit d'un travers de doigt; on la sentoit principalement vers l'extrémité antérieure & inférieure de la dernière fausse côte gauche.

Cette tumeur n'étoit point dure au tact, elle obéissoit au doigt, comme si elle eût été formée par une pâte molle; elle étoit plus apparente pendant l'inspiration, & lorsque le malade avoit pris quelques alimens. Je présurai qu'elle avoit son siège dans la rate, dont le sang ramassé en trop grande quantité, augmentoit la capacité de ses diverses cellules.

J'avois déjà trouvé plusieurs rates gonflées de cette sorte, sans aucune autre altération apparente de la structure, dans des sujets qui avoient éprouvé pendant long-temps des vomissemens, & qui avoient terminé par mourir dans le marasme. Je savois, d'après M. Lieutaud, que l'estomac étoit ordinairement d'autant plus ample que la rate étoit petite, ou d'autant plus rétréci que la rate étoit volumineuse : je savois, par des expériences faites sur des animaux vivans, que lorsque leur estomac est plein d'alimens, leur rate est rétrécie & presque vide de sang ; & je ne doutois pas que la même chose n'eût lieu dans le corps humain, soit d'après la position de la rate entre les fausses côtes gauche, & la grosse tubérosité de l'estomac, soit d'après les observations de M. Lieutaud, déjà citées. J'avois encore vu plus d'une fois (après le grand Baillou) dans des sujets pléthoriques, sur-tout chez les hommes hémorroïdaires & chez les filles qui vont être dans l'âge de puberté, qu'il y avoit un gonflement dans le côté gauche, qui étoit plus apparent après le repas, souvent suivi de vomissemens. J'avois attribué cette tumeur à l'excès de sang dans la rate, occasionné par la compression de ses vaisseaux veineux : Morgagni a trouvé la rate d'un volume monstrueux, dans des sujets, dont la veine splénique étoit comprimée par des tumeurs, par le pancréas lui-même, devenu squirreux.

Ces observations, qu'un examen réfléchi du malade rappela à ma mémoire, me portèrent à croire que dans le jeune malade, l'estomac, pressé & comprimé par la rate, étoit rétréci ; que les alimens ne pouvoient le gonfler, même le distendre suffisamment, qu'ils ne pouvoient aussi en sortir qu'avec peine, ce qui en rendoit le passage douloureux & difficile dans le duodenum, & produisoit les accidens ci-dessus énoncés. J'étois d'autant plus en droit de le croire, que le Prince étoit soulagé lorsqu'il avoit passé le temps de la première digestion ; d'ailleurs, il étoit d'une si grande sensibilité, que je pensai que celle de l'estomac devoit être extrême, & que peut-être même

cette sensibilité donnoit lieu à une crispation des parties internes, capable de rétrécir les veines destinées à rapporter le sang de la rate, d'où provenoit son gonflement; je dirigeai mon traitement sur ces indications.

Je conseillai au malade de faire un grand usage des remèdes relâchans, pour parvenir à celui des fondans. Il prit en conséquence une vingtaine de bains tièdes, de suite, chaque jour un de deux heures; il but pendant deux ou trois semaines beaucoup d'eau de veau, d'eau de poulet, des émulsions.

On ajouta ensuite à ces boissons des sucS dépurés des plantes chicoracées, à petites doses; mais comme le malade les vomissoit souvent, soit parce qu'ils fatiguoient l'estomac par leur poids, soit parce qu'ils ne pouvoient pas facilement passer par le pyllore, je fus obligé d'en faire suspendre l'usage, & je me bornai ensuite à prescrire au malade, dans de l'eau commune, trois ou quatre fois par jour, un demi-gros, & même un gros de terre foliée, de tartre cristallisé. Ce fut le fondant qu'il supporta le mieux; cependant, comme il fut quelquefois suivi du vomissement, lors même qu'on l'avoit donné à des doses très-inférieures à d'autres, qui avoient fort bien passé, je pensai qu'il falloit attribuer cette variation dans les vomissemens, à celle de l'irritation de l'estomac, & que si on parvenoit à l'émousser, on diminueroit les vomissemens. Je crus alors qu'il falloit associer les calmans aux fondans, & je prescrivis des pilules faites avec cinq grains d'*assa fetida*, quatre grains de camphre & un grain de musc.

Le malade prenoit trois fois par jour ces pilules, après qu'il avoit pris un demi-gros de terre foliée de tartre dans trois onces d'eau de menthe simple. On ajoutoit aux pilules du soir un ou deux grains de celle de cynoglosse.

En énervant ainsi la sensibilité de l'estomac, la terre foliée du tartre n'étoit point rejetée par le vomissement, & jouissoit, comme fondant, de toute son énergie. De

cette manière, le malade parvint, pour la première fois, à prendre des remèdes sans les vomir; & comme il importoit de lui donner l'aliment que son estomac supportoit le mieux, je le mis à l'usage du chocolat, qu'il prenoit deux ou trois fois par jour, ce qui fut continué environ six semaines. Alors le chocolat passant parfaitement bien, & le malade n'éprouvant plus aucune espèce d'accident, il fut question de le mettre peu-à-peu à l'usage des alimens ordinaires.

Je crus devoir changer & augmenter sa nourriture, par degrés; d'abord, on joignit les œufs au chocolat pour en faire une crème; ensuite je permis au malade quelques légumes herbacés, tels que les épinards & la chicorée: enfin, on passa successivement à l'usage des viandes hachées, bouillies & enfin rôties. M. le Prince Giustiniani parvint ainsi à prendre des alimens solides, dont il n'avoit point fait usage depuis tant d'années.

Je ne puis dépeindre quelle fut la joie qu'il ressentit le premier jour qu'il put digérer, sans accident, les alimens qu'il avoit pris pour sa subsistance; il se défioit de son bonheur: tous les jours les mêmes craintes se renouveloient, & ce ne fut qu'après un assez long espace de temps, que ses digestions ne furent plus troublées par de cruelles inquiétudes.

Je ne puis m'empêcher d'observer ici, que les alimens les plus doux lui parurent d'abord très-forts au goût, & que son palais ne pouvoit supporter l'impression de ceux qui avoient un peu plus de saveur. Cette sensation s'est éteinte par des degrés bien dignes de remarque; semblable en cela à ceux qui voient le jour pour la première fois, après une opération de la cataracte, d'abord la plus faible lumière les blesse; peu-à-peu ils en souffrent une plus vive; enfin, ils la supportent, & elle leur devient nécessaire comme à tous les autres hommes.

La région épigastrique, & les hypocondres, sur-tout le

gauche, qui étoient enorgorgés depuis si long-temps, devinrent plus souples : la rate avoit perdu de son volume contre nature, & étoit, pour ainu dire, rentrée dans ses bornes : l'estomac pouvoit plus aisément se dilater, & garder des alimens, ce qui s'est maintenu à peu-près dans le même état.

Cependant, on a remarqué deux ou trois fois, que les régions supérieures de l'abdomen commençoient à s'enorgorger de nouveau, ce qui a obligé de reprendre l'usage des remèdes que je viens d'indiquer. J'ai conseillé au malade les eaux de Vichy, à la dose de deux verres tous les matins, pendant une vingtaine de jours, & lorsque j'ai cru nécessaire de le purger, ce qui a eu lieu deux ou trois fois, j'ai préféré l'huile de *palma christi* aux autres purgatifs qu'il ne pouvoit supporter.

C'est par ce traitement heureux que M. le Prince Giustiniani est parvenu à digérer, avec facilité, tous les alimens dont on use ordinairement; aussi s'est-il remis à vue-d'œil. Dans l'espace de quelques mois il a repris de l'embonpoint & des forces; son esprit s'est singulièrement développé; & il étoit si content de l'heureux changement qu'il éprouvoit, qu'il ne vouloit plus abandonner l'usage des remèdes que je lui avois prescrits. Cependant je les lui fis diminuer par degrés, & lorsque je me fus bien assuré qu'ils lui étoient inutiles, je les lui fis cesser, en lui recommandant d'y recourir à l'automne & au printemps, pendant l'espace de quelques années; ce qu'il a fait avec succès.

M. le Prince Giustiniani jouit aujourd'hui de la meilleure santé, & fait le bonheur & l'ornement d'une illustre famille.

Depuis cette époque, j'ai eu occasion de me convaincre que diverses maladies, qu'on avoit attribuées à l'estomac, venoient de la dilatation, contre nature, de la rate ou des veines qui en rapportent le sang dans le tronc de la veine-porte, soit que ces causes existassent séparément ou à la fois.

Cette dilatation variqueuse de la rate ou de ses veines, arrive après la cessation de quelques hémorragies critiques, ou lorsque la Nature ne peut les opérer. Elle est plus
commune

commune qu'on ne croit, dans les jeunes personnes, surtout dans celles du sexe.

Chez elles, le tissu spongieux de la rate est si mou qu'elle se gonfle facilement par la seule stagnation du sang: dans les adultes, rarement c'est la rate elle-même qui se dilate par cette cause; mais cet état alors a lieu dans les veines qui sont plus souples, ce qui est ordinairement d'autant plus fâcheux qu'on le méconnoît; & comme plusieurs de ses rameaux veineux entourent en quelque manière le pylore, ils ne peuvent se gonfler sans le rétrécir, ce qui donne lieu aux accidens les plus graves, & dont on ne connoît souvent la cause que par l'ouverture du corps.

Les tuméfactions de la rate sont d'autant plus dangereuses, qu'elles se forment lentement, & qu'il y a de la dureté dans la partie gonflée; alors la stagnation du sang en est plutôt l'effet que la cause, & les remèdes différens qu'on est obligé de prescrire, n'ont jamais un effet aussi prompt, & rarement aussi efficace.

Cette question mérite d'être approfondie; je me propose de la traiter d'une manière plus étendue, dans un autre *Mémoire*.

O B S E R V A T I O N S

D E M E R C U R E ,

Faites à l'École Royale-militaire.

Par M. D'AGELET. (a)

LE quart-de-cercle mural de 7 pieds $\frac{1}{2}$ de rayon , fait par M. Bird, en 1775, pour le compte de M. Bergeret, par les soins de M. de la Lande, m'ayant été confié en 1778, je n'ai cessé d'en faire usage pour le bien de l'Astronomie. Un nouveau catalogue des Étoiles boréales a été le principal objet de mon travail, & j'ai déjà plusieurs milliers d'observations; mais je n'ai pas négligé celles des Planètes, & j'en avois déjà huit cents, lorsqu'au mois de Mars 1782, j'eus l'honneur de présenter à l'Académie mon Journal d'observations. M. de la Lande en a rapporté beaucoup dans le quatrième volume de son Astronomie, en 1781, & dans le huitième volume de ses Éphémérides, en 1783; en voici quelques-unes de Mercure, elles sont rares, c'est ce qui me détermine à les publier dès-à-présent: M. de Lambre, habile Astronome, déjà très-connu de l'Académie, a bien voulu en faire les réductions, ainsi que de celles qui ont déjà paru dans les Éphémérides.

La latitude de mon observatoire (b) est $48^{\text{d}} 51' 5''$, il est à 7,"6 de temps à l'occident de l'Observatoire royal.

(a) M. d'Agelet étant parti pour faire le tour du Monde, au mois de Juillet 1785, il a laissé ses Registres d'observations à M. de la Lande, avec qui il observoit depuis 1768, c'est-à-dire dès l'âge de quinze ans,

& cet Académicien s'est chargé de les publier.

(b) Cet observatoire a été démoli en 1786, mais on l'a reconstruit un peu plus près du grand corps de bâtiment de l'École Militaire.

ANNÉES. M O I S & JOURS.	TEMPS MOYEN réduit à l'Observatoire.	LONGITUDE OBSERVÉE.	LATITUDE OBSERVÉE.
	H. M. S.	S. D. M. S.	D. M. S.
1779.			
Juin 3	22. 26. 26	1. 20. 40. 9	3. 49. 6 A.
1780.			
Janv. 14	22. 31. 32	9. 1. 14. 59	2. 26. 37 A.
21	22. 27. 10	9. 7. 31. 30	1. 7. 35 A.
Mai 27	22. 26. 6	1. 14. 21. 59	2. 53. 48 A.
28	22. 26. 32	1. 15. 46. 11	2. 47. 8 A.
29	22. 28. 11	1. 17. 13. 15	2. 39. 56 A.
Juin 2	22. 36. 45	1. 23. 27. 54	2. 5. 59 A.
8	22. 56. 0	2. 4. 8. 36	1. 3. 49 A.
9	23. 0. 0	2. 6. 4. 11	0. 52. 43 A.
Juillet 29	1. 51. 20	5. 4. 5. 6	1. 1. 54 A.
30	1. 51. 0	5. 5. 6. 55	1. 13. 7 A.
Sept. 12	22. 49. 53	5. 3. 18. 5	0. 33. 45 B.
Oct. 8	0. 49. 55	8. 3. 11. 42	2. 0. 50 A.
1781.			
Mars 7	1. 3. 46	0. 1. 46. 14	0. 17. 36 B.
10	1. 9. 28	0. 6. 49. 9	0. 55. 48 B.
13	1. 12. 49	0. 11. 13. 3	1. 35. 12 B.
14	1. 13. 19	0. 12. 30. 31	1. 47. 49 B.
15	1. 13. 24	0. 13. 41. 11	2. 0. 31 B.
16	1. 13. 9	0. 14. 45. 49	2. 12. 24 B.
17	1. 12. 28	0. 15. 43. 9	2. 23. 53 B.
18	1. 11. 21	0. 16. 33. 19	2. 34. 30 B.
Juillet 5	1. 50. 35	4. 8. 51. 13	0. 48. 4 B.
Août 25	22. 51. 0	4. 15. 28. 47	0. 40. 50 A.



M É M O I R E

*Sur le premier Drap de Laine superfine du crû
de la France.*

Par M. D A U B E N T O N.

Relû
le 9 Juin
1784.

JUSQU'À PRÉSENT on n'a pu faire des Draps fins qu'avec la laine achetée chez les Espagnols; mais cette Nation qui a déjà établi assez de Manufactures pour employer toutes les Soies, ne manquera pas de garder toutes ses Laines, dès que ses Fabriques de draps pourront les consommer en entier: alors il ne se feroit plus de draps fins en France, & nous serions obligés de les tirer de l'Espagne.

M.^{rs} de Trudaine ayant prévu ce grand inconvénient pour le Commerce, me firent l'honneur de me consulter en 1766, afin de savoir s'il seroit possible d'améliorer les laines de France, au point de suppléer aux laines étrangères, dans nos Manufactures de draps fins. Les observations que j'avois faites depuis long-temps sur les races métissées des animaux domestiques, me firent penser que par un bon choix des béliers & des brebis pour leurs alliances, on pourroit rendre leurs laines plus fines ou plus longues. D'après cette considération, M.^{rs} de Trudaine me proposèrent de faire les expériences nécessaires pour cet objet; je m'en chargeai avec d'autant plus d'espérance de succès, que le climat de la France me paroissoit plus favorable aux bêtes à laine, que celui de l'Espagne ou de l'Angleterre, parce qu'il y a moins de chaleurs en France qu'en Espagne, & moins de brouillards qu'en Angleterre.

M.^{rs} de Trudaine obtinrent de M. de l'Averdy, alors Contrôleur général des finances, tout ce qui étoit nécessaire pour mes expériences. Le Gouvernement fit venir

successivement des béliers & des brebis de Roussillon, de Flandre, d'Angleterre, de Maroc, du Tibet & d'Espagne. Je mis toutes ces races de bêtes à laine dans la bergerie que j'ai établie près de la ville de Montbard, dans un canton un peu montueux, & par conséquent favorable à la production des laines superfines qui étoient mon principal objet. Je ne construisis point d'étables, je tins tous ces animaux en plein air nuit & jour pendant toute l'année, sans aucun abri : cette expérience eut un entier succès, dont je rendis compte à l'Académie, en 1769, dans une Assemblée publique.

J'alliai les béliers dont la laine étoit la plus fine, avec des brebis à laine jarreuse, qui avoient autant de poil que de laine, pour juger par ces extrêmes, de l'effet de la laine du bélier sur celle de la brebis : je fus très-surpris de voir sortir de ce mélange un bélier à laine superfine. Cette grande amélioration me donna d'autant plus d'espérance pour le succès de mon entreprise, qu'elle avoit été produite par un bélier de Roussillon ; car je n'avois point alors de béliers d'Espagne.

En 1776, il me vint des béliers & des brebis d'Espagne ; alors j'eus sept races de bêtes à laine très-distinctes, y compris la race de l'Auxois, qui est le pays où ma bergerie est située. J'ai perpétué jusqu'à présent toutes ces races sans mélange, pour savoir ce qu'elles deviendroient dans ma bergerie : j'ai aussi allié ces sept races entr'elles, pour avoir d'autres races métissées, & pour connoître à quel degré elles influeroient les unes sur les autres, relativement à l'amélioration des laines.

Par ces expériences, suivies avec les plus grandes précautions pour qu'il n'y eût point d'équivoque, j'ai amené toutes les races de ma bergerie au degré de finesse de la laine d'Espagne, sans tirer de nouveaux béliers de ce pays ni de Roussillon. On peut voir les preuves réelles de ces faits, sur les troupeaux de ma bergerie, & sur un petit

troupeau que j'ai fait venir à la ménagerie de l'École vétérinaire d'Alfort près de Charenton.

J'ai trouvé de la difficulté à me convaincre moi-même de cette belle amélioration : il y a des degrés de finesse dans les laines, qu'il est impossible de distinguer au doigt ni à l'œil ; lorsque j'y fus parvenu, je ne pouvois plus savoir si j'améliorois ou si je détériorois les laines par de nouveaux mélanges de races. Alors j'apportai des échantillons de ces laines à Paris, & après avoir consulté les meilleurs connoisseurs en ce genre, je les trouvai aussi incertains que moi, & j'en conclus que ni les gens qui vendent la laine d'Espagne, ni ceux qui l'achètent, ni les Manufacturiers qui l'emploient, n'en peuvent pas distinguer les différens degrés de finesse avant d'en avoir fait du drap.

Cependant il falloit nécessairement que je misse de la précision dans les résultats de mes expériences : pour y parvenir, j'imaginai de mesurer le diamètre des filamens de la laine, par un micromètre appliqué au microscope. Ce moyen me réussit parfaitement, il me fit voir clairement les progrès de l'amélioration des laines : ce moyen est aussi le seul qui puisse éclairer, à l'inspection de la laine, le Manufacturier, sur le degré de finesse que doit avoir le drap qu'il va fabriquer : mais le microscope n'étant pas entre les mains de tout le monde, j'ai indiqué aux propriétaires de troupeaux & aux bergers, une manière fort aisée de reconnoître les différens degrés de la finesse des laines : le détail de ces procédés est dans les Mémoires de l'Académie de 1777, & dans l'Instruction des Bergers, que j'ai publiée en 1782.

Après m'être assuré que mes laines étoient parvenues au degré de superfin, il falloit encore les éprouver dans la fabrication du drap, & comparer celui qui en seroit fait, avec le drap de laine d'Espagne. L'année dernière, j'ai envoyé à M. l'Entrepreneur de la Manufacture royale de draps de Château-du-parc près de Châteauroux en

Berri, huit cents vingt-huit livres de mes laines lavées à dos : avant d'en faire le prix, il en a fait des draps de différentes couleurs; après ces épreuves, il s'est engagé à les payer au plus haut prix des laines d'Espagne transportées en France, & à un moindre terme pour l'échéance, parce qu'il a reconnu dans les laines que j'ai améliorées, plus de force & de nerf, avec la même finesse à l'œil, la même douceur au toucher; parce que non-seulement elles se sont tirées aussi fin à la filature, mais qu'elles ont souffert un tors beaucoup plus considérable sans se casser; & parce que les Ouvriers ont trouvé que la chaîne des draps fabriqués avec ces laines, étoit plus nerveuse & plus forte qu'avec les laines d'Espagne. Quoique les miennes aient été filées & tissées dans le fort de l'hiver dernier, les draps ont pris un foulage très-ferme, & sont devenus plus forts que les draps de laine d'Espagne, faits en France: ils ont plus de rapport avec ceux que les Anglois fabriquent. Le Manufacturier s'est empressé de faire de ces draps forts avec les laines que je lui ai envoyées, parce qu'il croit qu'ils seront plus durables, qu'ils résisteront mieux à la pluie, & qu'ils auront un meilleur débit dans le commerce du Nord. à présent il va travailler à faire avec ces laines, des draps souples & moelleux comme ceux que nous faisons avec les laines d'Espagne.

La fabrique du premier drap de laine superfine, du crû de la France, est un événement important pour les Manufactures & pour le Commerce. Les moyens que j'ai donnés pour faire croître des laines super fines, d'après de longues expériences, dans plusieurs Mémoires & dans l'Instruction pour les Bergers, sont faciles & peu dispendieux; si nous les mettons en exécution, nous pourrons faire des draps fins avec nos laines. La durée de cette amélioration est déjà prouvée par seize ans d'expériences sur les laines de Roussillon, & par huit ans sur les laines d'Espagne.

Il y a en France plusieurs exemples de l'amélioration des laines à un grand degré de finesse: les propriétaires

de troupeaux , qui ont acquis des béliers dont la laine étoit plus fine que celle des brebis du pays , ont eu la satisfaction de voir leurs laines se perfectionner & augmenter de prix : des béliers & des brebis d'Espagne se sont déjà perpétués pendant nombre d'années dans plusieurs de nos provinces , sans avoir dégénéré. Je suis très-convaincu par ma propre expérience & par beaucoup d'autres , que tous les pays montueux de la France peuvent produire des laines superfines , & que nous aurons des laines très-longues dans les pâturages abondans de nos plaines.

J'ai vu avec plaisir les sages réglemens que l'Administration provinciale de Berri a faits pour l'établissement d'une école de Bergerie & de Parcage , & je me suis empressé de donner un de mes bergers pour en être le maître ; j'enverrai aussi des béliers de ma bergerie , qui m'ont été demandés pour cette province.

Les bêtes à laine étrangères ne sont pas nécessaires pour multiplier en France les laines superfines & les laines longues : des béliers choisis dans le Roussillon & dans la Flandre en produiront bientôt , si nous prenons de l'émulation , comme les Anglois , pour faire valoir nos troupeaux , & si le Gouvernement la favorise. Peut-être le besoin nous rendroit-il encore plus actifs : si l'Étranger refusoit de nous vendre des laines superfines , nous ferions promptement des efforts pour faire croître ces laines en France , plutôt que de renoncer à la fabrication & au commerce des draps fins.

L'heureux succès des épreuves que j'ai faites avec soin sur les troupeaux & sur les pâturages , pendant dix-huit ans , m'encourage à les continuer avec la même exactitude dans tout ce qui peut contribuer à l'amélioration des bêtes à laine. Je publierai incessamment une instruction sur la culture & l'emploi des Pâturages.



ADDITION

ADDITION AU MÉMOIRE

SUR LE

PREMIER DRAP DE LAINE SUPERFINE

DU CRÛ DE LA FRANCE.

Par M. DAUBENTON.

LORSQUE j'ai lû à l'Académie un Mémoire sur le premier Drap de laine superfine du crû de la France, on n'avoit encore fabriqué que du drap fort avec les laines que j'ai améliorées: la mauvaise saison de l'hiver n'avoit pas permis de les filer assez fin, & de les fouler assez pour avoir des draps souples. On vient de faire de ces draps avec mes laines, à la Manufacture royale du Château-du-Parc; le Manufacturier a jugé qu'ils étoient aussi doux que ceux qui sont faits avec la plus belle laine d'Espagne, & il a remarqué dans chacune des opérations successives de la fabrique, que la laine améliorée avoit un nerf particulier, c'est-à-dire, plus fort & plus sensible que celui de la laine d'Espagne. On avoit déjà observé la même qualité de laine, en fabriquant le drap fort dont il s'agit dans le Mémoire précédent.

Lu
le 28 Août
1784.

Ces observations donnent lieu de présumer que les laines qui seront améliorées dans l'intérieur de la France, pourront être, non-seulement aussi fines, mais encore plus fortes & plus nerveuses que les laines super fines d'Espagne, & que cette force sera d'autant moindre avec la même finesse, que les troupeaux se trouveront dans les provinces de France les plus méridionales: cette présomption est fondée sur mes propres expériences, & de plus, sur le produit de la grande importation de bêtes à laine, qui fut faite, dans le quinzième siècle, d'Espagne en Angleterre.

Les Anglois distribuèrent mille béliers & deux mille

Mém. 1784.

L

brebis de Castille , dans leurs provinces , chez différens particuliers ; c'est-là l'époque principale de l'amélioration des laines angloises. Quel a été le produit de cette importation ? qu'est devenue la laine superfine de Castille , dans les provinces d'Angleterre ? elle a dégénéré de sa qualité de superfine , mais elle a acquis une autre qualité ; elle s'est accrue en longueur , sur un sol frais & fertile , dont les pâturages abondans sont entretenus par l'humidité des brouillards.

En considérant l'état actuel des laines de France , nous voyons que les plus fines se trouvent naturellement dans des lieux élevés , tels que le Roussillon , qui est au pied des Pyrénées , la Bourgogne près de la source de la Seine , le Berri près des sources de l'Indre & du Théols : au contraire , les plus longues laines sont dans les plaines des provinces les plus basses , sur-tout dans la Flandre. Ce fut dans ce pays & dans le Brabant , qu'il y eut , au quatorzième siècle , une récolte de laine si abondante & si avantageuse aux habitans , que leur Souverain , Philippe-le-Bon , Duc de Bourgogne , voulut , dit-on , en perpétuer la mémoire , par l'institution de l'ordre de la Toison d'or.

On dit que dans le dernier siècle , on introduisit en Flandre une nouvelle race de bêtes à laine , que les Hollandois avoient tirée des grandes Indes , & établie sur les bords du Texel. Cette race est encore aujourd'hui fort abondante en laine longue ; à en juger par les individus que j'ai disséqués , elle m'a paru différer des autres races , par la conformation , car j'y ai trouvé sept vertèbres dans les lombes , tandis que je n'en ai vu que six dans les individus des autres races. Cette conformation annonce que la race des bêtes à laine de Flandre , est susceptible d'une grande amélioration pour la taille de l'animal , & pour la quantité & la longueur de sa laine ; il est à croire qu'elle surpasseroit les meilleures races angloises , quoiqu'il y ait déjà quelques-uns de leurs individus , dont la laine a jusqu'à vingt-deux pouces de longueur.

La Nature se modifie de mille manières dans les animaux domestiques, par les alliances; nous en voyons tous les jours des exemples aussi incontestables qu'évidens. Les Naturalistes conviennent que tous les chiens sont de même race, on en a de bonnes preuves; cependant le grand danois est de très-haute taille, en comparaison des chiens les plus petits; le poil du lévrier est court, tandis que celui du chien-loup est beaucoup plus long; le mâtin a un poil gros & fort, au contraire celui du chien-bouffe est fin & souple: toutes ces différentes races d'une même espèce, viennent principalement des alliances de différens individus. L'espèce des moutons doit être sujette aux mêmes variétés; nous avons déjà beaucoup de races de ces animaux, nous en ferons autant que nous le voudrons, comme il s'en est fait & comme il s'en fait tous les jours parmi les bœufs, les chèvres, les cochons, les lapins, les chats, &c. c'est une loi générale dans la Nature; tous les caractères des animaux qui ne sont pas essentiels à leur espèce, peuvent changer, & former, pour ainsi dire, une infinité de races.

Ces races se maintiennent aisément si l'on a soin d'allier leurs individus bien caractérisés, sans aucun mélange d'autres races: nous avons des exemples toujours subsistans de cette succession, dans les races soignées des chiens de chasse, & même dans des races peu soignées, telles que les cochons de Siam, les chiens de bergers, les chats d'Espagne, &c. une preuve encore plus convaincante, c'est mon expérience sur les races de moutons de Roussillon & d'Espagne, que j'ai maintenues pendant plusieurs années à une grande distance des pays dont elles sont originaires, & dans un climat différent.

L'intérêt que M. de Calonne, Contrôleur général des finances, a pris à mon *Mémoire sur le premier drap de laine superfine, du crû de la France*; & son empressement à le mettre sous les yeux du Roi, & à le faire imprimer pour le répandre promptement dans le Public, prouvent que

84 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

ce Ministre projette de favoriser l'amélioration des laines. Sur ce qu'il m'a fait l'honneur de me dire à ce sujet; je suis persuadé qu'il discutera avec autant de discernement que d'attention, les meilleurs moyens de faire cette amélioration, & qu'ils seront exécutés avec cette sagesse & cette prudence d'administration, si nécessaires pour faire réussir, dans un grand royaume, des pratiques d'agriculture nouvelles & importantes.

M. le Comte de Vergennes est aussi convaincu de la nécessité pressante d'améliorer les laines de France, pour le bien du Commerce; ce Ministre veut y contribuer lui-même, en faisant améliorer dans ses terres, des troupeaux qui seront soignés par un berger formé dans ma bergerie.

*M É M O I R E**SUR L'EXPRESSION ANALYTIQUE**DE LA**GÉNÉRATION DES SURFACES COURBES.**Par M. M O N G E.*

D'APRÈS les premières notions de l'application de l'Analyse à la Géométrie, l'on sait qu'une équation algébrique quelconque à deux variables, exprime la relation qu'ont entr'elles les coordonnées d'une certaine courbe; que les constantes qui entrent dans cette équation, sont des fonctions des paramètres de la courbe, c'est-à-dire, des droites qui doivent servir à sa construction; & que lorsqu'on assigne à ces constantes des valeurs particulières, la courbe à laquelle appartient l'équation, est absolument déterminée. Mais si l'on donne à ces constantes successivement différentes valeurs, la courbe, sans changer de caractère, change de forme & de position, en sorte que si l'on regarde les paramètres comme susceptibles de toutes les valeurs possibles, l'équation dans laquelle les constantes ont alors des valeurs arbitraires, n'appartient plus à une courbe particulière; elle exprime le caractère dont on vient de parler, c'est-à-dire, une propriété commune à toutes les courbes d'une même famille, & pour lesquelles ces paramètres sont indifférens: il en est de même des équations à trois variables pour les surfaces courbes.

On peut exprimer de deux manières, que des paramètres sont arbitraires, 1.^o en les représentant par des caractères d'un genre particulier, comme on représente les quantités constantes par les premières lettres de l'alphabet, & les variables par les dernières; 2.^o en différenciant l'équation algébrique successivement autant de fois qu'il y a

de paramètres, & éliminant ensuite ces paramètres à l'aide des équations différentielles : l'équation aux différences ordinaires, à laquelle on arrive par ce moyen, exprime la propriété dont jouissent toutes les courbes ou toutes les surfaces de la même famille, indépendamment des paramètres qui ont disparu par la différentiation, & qui par conséquent sont indifférens.

Pareillement, si l'on conçoit qu'une surface courbe soit engendrée par le mouvement déterminé d'une certaine courbe, & que cette courbe soit donnée, c'est-à-dire, que l'on connoisse comment deux de ses coordonnées sont fonctions de la troisième, l'équation de cette surface sera parfaitement déterminée; mais elle contiendra les fonctions dont on vient de parler, puisque par-tout, à la place des deux coordonnées de la courbe génératrice, on aura dû mettre leurs expressions par le moyen de la troisième. Si l'on suppose donc que ces fonctions viennent à varier de forme, c'est-à-dire, que la courbe génératrice change de nature, la surface, sans changer de caractère, variera de forme & de position dans l'espace; en sorte que si l'on regarde les fonctions comme susceptibles de toutes les formes possibles, l'équation ne sera plus celle d'une surface particulière, elle exprimera une propriété commune à toutes les surfaces engendrées de la même manière, & pour lesquelles la courbe génératrice est indifférente.

On peut de même exprimer de deux manières, qu'une fonction est arbitraire, 1.^o en la représentant par un caractère particulier; 2.^o en différenciant l'équation algébrique par rapport à chacune des variables principales, & éliminant ensuite les fonctions par le moyen des équations différentielles: l'équation aux différences partielles, à laquelle on est alors conduit, énonce la manière dont la surface est engendrée, sans rien statuer sur la nature de la courbe qui a servi à cette génération, & dont il ne reste aucune trace dans l'équation.

J'ai déjà donné, dans différens Mémoires, les expressions des générations de plusieurs surfaces courbes; par exemple, 1.^o l'équation

$$b \frac{dz}{dx} - a \frac{dz}{dy} = \frac{ab}{\beta},$$

dont l'intégrale est

$$ax - \beta z = \varphi(ax - by),$$

exprime que la surface est cylindrique, c'est-à-dire, qu'elle est engendrée par le mouvement d'une base quelconque, & qui est indifférente, le long d'une droite, dont les équations sont

$$ax - by = 0,$$

$$ax - \beta z = 0.$$

2.^o L'équation

$$y \frac{dz}{dx} - x \frac{dz}{dy} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$z = \varphi(x^2 + y^2),$$

exprime qu'une surface est engendrée par la révolution d'une courbe quelconque autour de l'axe des z , sans rien statuer sur la nature de la courbe génératrice, qui est indifférente.

3.^o L'équation

$$\frac{ddz}{dx^2} \cdot \frac{ddz}{dy^2} = \left(\frac{ddz}{dx dy} \right)^2,$$

dont l'intégrale est le résultat de l'élimination de V des deux équations suivantes,

$$y - \varphi V = (x - V) \varphi' V,$$

$$z - \psi V = (x - V) \psi' V,$$

ou de ces deux-ci,

$$z = x \varphi V + y \psi V + V,$$

$$x \varphi' V + y \psi' V + 1 = 0,$$

énonce qu'une surface est développable, c'est-à-dire qu'elle est engendrée par le mouvement d'une droite qui ne cesse pas d'être tangente à une même courbe à double courbure quelconque, courbe qui peut être tout ce qu'on voudra, puisqu'il n'en est pas question.

4.^o L'équation qui exprime qu'une surface est engendrée par le mouvement d'une droite quelconque, sans rien dire de particulier sur les trois courbes qui ont dirigé son mouvement, est

$$m^3 \frac{d^3 z}{d x^3} - 3 m^2 \frac{d^2 z}{d x^2 d y} + 3 m \frac{d^2 z}{d x d y^2} - \frac{d^3 z}{d y^3} = 0,$$

en faisant pour abrégé,

$$m^2 \frac{d d z}{d x^2} - 2 m \frac{d d z}{d x d y} + \frac{d d z}{d y^2} = 0,$$

& son intégrale est le résultat de l'élimination de l'arbitraire z' des deux équations

$$z = x \phi z' + z',$$

$$y = x \psi z' + \pi z'.$$

Dans les deux premiers exemples, la ligne génératrice est indifférente, & c'est la loi de son mouvement qui est énoncée par l'équation aux différences partielles; dans les deux autres, au contraire, les lignes génératrices sont constamment des droites, ce sont les courbes qui dirigent leurs mouvemens, qui sont arbitraires, & l'équation différentielle énonce comment le mouvement est dirigé.

Je me propose dans ce Mémoire, de trouver l'équation qui exprime qu'une surface est engendrée d'une manière quelconque, par une courbe constante de forme & variable de position dans l'espace, sans dire rien de particulier ni sur la nature de la courbe génératrice, ni sur celles qui dirigent son mouvement; mais avant que d'entrer dans cette généralité, je vais commencer par quelques cas particuliers, plus faciles à suivre.

I.

Exprimer qu'une surface courbe est engendrée par la circonférence d'un cercle dont le rayon est constant, & dont le plan est toujours normal à la courbe parcourue par son centre

Tout étant rapporté à trois plans rectangulaires, soient x, y, z les trois coordonnées de la surface demandée, a le rayon du cercle générateur; & x', y', z' les trois coordonnées du centre. Si les équations de la courbe parcourue par le centre, sont représentées par $y = \phi z$ & $x = \psi z$, on aura $y' = \phi z'$ & $x' = \psi z'$. Cela posé, puisque le rayon du cercle est $= a$, on aura

$$(A) \quad (z - z')^2 + (y - \phi z')^2 + (x - \psi z')^2 = a^2,$$

équation dans laquelle z' doit être déterminé par la considération que le plan du cercle est normal à la courbe parcourue par le centre. Or cette considération comporte que la distance du point de la surface au point de la courbe, ne varie pas lorsque z' varie; il faut donc que la différentielle de la valeur de a , prise en ne faisant varier que z' , soit nulle; donc on aura pour déterminer z' ,

$$(B) \quad z - z' + (y - \phi z')\phi' z' + (x - \psi z')\psi' z' = 0.$$

Les deux équations (A) & (B) comprennent la solution de la question, en sorte que si la courbe parcourue par le centre, étoit donnée, c'est-à-dire, que l'on connût les formes des fonctions ϕ & ψ , en éliminant z' de ces deux équations, on auroit en x, y, z , celle de la surface demandée. Mais si l'on veut avoir l'équation de la surface, indépendamment de la courbe parcourue par le centre du cercle générateur, il faut regarder les fonctions ϕ & ψ comme arbitraires, & les faire disparaître par la différenciation.

Dans le cas présent, cette opération est très-facile, car en vertu de l'équation (B), la différentielle de la première,

prise en ne faisant varier que z' , étant nulle, il faut différencier l'équation (A) par rapport à x , puis par rapport à y , & regarder z' comme constant dans les deux cas; donc si l'on fait, pour abréger, $dz = p dx + q dy$, $ddz = r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2$, & $1 + p^2 + q^2 = k^2$, les deux différentielles de l'équation (A), seront

$$(C) \quad (z - z')p + x - \psi z' = 0,$$

$$(D) \quad (z - z')q + y - \phi z' = 0,$$

qui donnent immédiatement

$$(E) \quad (z - z')p + x = \pi \{ (z - z')q + y \},$$

π étant une nouvelle fonction arbitraire. Si l'on substitue dans (A) les valeurs de $x - \psi z'$ & de $y - \phi z'$ que donnent les équations (C) & (D), on aura

$$z - z' = \frac{a}{k},$$

& l'équation E devient

$$(F) \quad \frac{ap}{k} + x = \pi \left\{ \frac{aq}{k} + y \right\},$$

qui est délivrée de l'indéterminée z' , & qui ne contient plus qu'une fonction arbitraire.

Si l'on fait évanouir cette fonction à la manière ordinaire, c'est-à-dire, en différenciant par rapport à x , puis par rapport à y , on trouve pour équation aux différences partielles secondes,

$$(G) \quad a^2(rt - s^2) + ak[(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t] + k^4 = 0.$$

C'est cette équation qui exprime qu'une surface est engendrée par la circonférence d'un cercle constant de rayon, & dont le plan est toujours normal à la courbe parcourue par le centre, sans statuer rien de particulier sur la nature de cette courbe.

II.

On pourroit arriver directement à l'équation (E) par les considérations géométriques; en effet, la surface dont il s'agit, jouit de cette propriété, que pour tous les points placés sur la circonférence d'un même cercle générateur, les normales passent par un même point qui est le centre de ce cercle, ce qui n'a pas lieu pour des points placés sur des circonférences différentes; donc la surface est telle, que si sur la normale on prend un point distant de la surface d'une quantité égale au rayon, ce point sera constant ou variable: constant si le point de la surface par lequel on mène la normale, se meut sur la circonférence d'un même cercle: & variable si le point de la surface passe d'un cercle à un autre; donc les coordonnées du point de la normale, varient ensemble & sont constantes ensemble; donc elles sont fonctions l'une de l'autre: il ne s'agit donc plus que de trouver les expressions de ces coordonnées.

Or, les coordonnées rectangulaires d'une surface courbe, étant x, y, z ; & celles de la normale, rapportées aux mêmes plans, étant x', y', z' , les équations des projections de la normale sur les trois plans rectangulaires, sont

$$(z - z')p + x - x' = 0,$$

$$(z - z')q + y - y' = 0,$$

$$(y - y')p - (x - x')q = 0;$$

donc si l'on prend sur cette normale une quantité $= a$, l'amplitude de cette quantité sera

dans le sens des x $\frac{ap}{k},$

dans le sens des y $\frac{aq}{k},$

dans le sens des z $-\frac{a}{k};$

& parce que les coordonnées du centre sont égales à celles du point de la surface, augmentées respectivement des

amplitudes que l'on vient de trouver, il s'ensuit que les coordonnées seront

$$\text{dans le sens des } x \quad x + \frac{ap}{k},$$

$$\text{dans le sens des } y \quad y + \frac{aq}{k},$$

$$\text{dans le sens des } z \quad z - \frac{a}{k};$$

posant donc que deux de ces coordonnées sont fonctions l'une de l'autre, on aura trois équations, dont l'une sera l'équation (F) , & qui seront chacune indifféremment l'intégrale complète de l'équation (G) , qu'elles produiront également par la différenciation.

I I I.

Enfin on pourroit encore obtenir immédiatement l'équation (G) ; car pour peu que l'on soit accoutumé aux considérations géométriques, on voit évidemment que dans la surface dont il s'agit, le rayon du cercle générateur est un des deux rayons de courbure de la surface, & que ce rayon est constant. Or, l'expression des rayons de courbures d'une surface courbe donnée par M. Euler (*Mémoires de Berlin*, 1760), est, en nommant R le rayon,

$$R^2(rt - s^2) + Rk[(1 + q^2)r - 2pqs + (1 - p^2)t] + k^2 = 0;$$

donc pour énoncer la propriété de la surface, il faut faire dans cette équation, $R = a$, ce qui donne l'équation (G) .

I V.

La manière ordinaire de faire évanouir une fonction arbitraire, est, comme nous venons de le pratiquer, de différencier successivement l'équation, en regardant x , puis y , comme seule variable, ce qui donne deux nouvelles équations, dans lesquelles entrent la fonction arbitraire, & la différentielle qui est une autre fonction sur laquelle on ne doit

pareillement rien statuer; d'éliminer ces deux fonctions des deux équations différentielles & de la proposée, & le résultat est l'équation aux différences partielles qui énonce la même chose que l'équation intégrale: cette méthode a l'inconvénient d'introduire, par la différenciation, une fonction de plus à éliminer, ce qui augmente le nombre des équations & le travail de l'élimination. Si au lieu de différencier l'équation, & par rapport à x , & par rapport à y , on la différencie une seule fois, en regardant comme constante la quantité qui est sous la fonction, 1.^o la différenciation devient plus facile, parce que la fonction devient elle-même une constante arbitraire; 2.^o l'on n'a qu'une seule fonction à éliminer de la proposée, par le moyen de la différentielle; mais lorsqu'on regarde comme constante la quantité qui est sous la fonction, c'est-à-dire, lorsqu'on regarde la différentielle comme nulle, les quantités dx & dy cessent d'être arbitraires, & l'on établit entr'elles un rapport qu'il faut introduire dans le calcul, & substituer par-tout dans la différentielle à la place de $\frac{dx}{dy}$.

Par exemple, si l'on a une équation en x, y, z , & $\varphi \omega$, ω étant donnée en x, y, z , & qu'on différencie cette équation, en regardant ω comme constante, la différentielle fera

$$Mdx + Ndy + Pdz = 0,$$

ou à cause de

$$dz = p dx + q dy,$$

$$Mdx + Ndy + P(p dx + q dy) = 0;$$

mais regarder ω comme constante, c'est supposer

$$\left(\frac{d\omega}{dx}\right) dx + \left(\frac{d\omega}{dy}\right) dy = 0,$$

ou
$$\frac{dx}{dy} = - \frac{\frac{d\omega}{dy}}{\frac{d\omega}{dx}};$$

donc il faut substituer cette valeur de $\frac{dx}{dy}$, ce qui donne

$$(M + Pp) \frac{du}{dy} - (N + Pq) \frac{du}{dx} = 0,$$

que l'on trouve également par l'autre méthode, & de laquelle on éliminera la fonction ϕu , par le moyen de la proposée.

On voit donc que si l'on représente par m la valeur de $\frac{dx}{dy}$, qu'on obtient en égalant à zéro la différentielle de la quantité qui est sous la fonction, la différenciation dont il s'agit s'exécute précisément comme une différenciation ordinaire, avec cela seulement de particulier, que par-tout, à la place d'une différentielle simple dV , il faut mettre $m \frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy}$; ainsi, la différentielle de x sera m , celle de y sera 1, celle de z sera $mp + q$; enfin, celle de V^a sera $aV^{a-1} (m \frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy})$, & ainsi des autres.

Il suit de-là, que pour faire évanouir une fonction arbitraire d'une équation, il faut 1.^o différencier cette équation, en regardant comme constante la quantité qui est sous la fonction, & effectuer cette différenciation comme pour les différences ordinaires, avec cette condition, que par-tout, à la place d'une différentielle simple quelconque dV , il faut mettre $m \frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy}$; 2.^o éliminer la fonction de la proposée, par le moyen de la différentielle.

V.

Si, comme dans les recherches de la nature de celles dont il s'agit dans ce Mémoire, la quantité qui est sous la fonction n'est pas connue immédiatement, & qu'elle soit donnée par une seconde équation, dans laquelle elle

soit encore sous des fonctions arbitraires; la quantité m sera regardée comme une autre indéterminée, dont on aura la valeur, en différenciant la seconde équation, d'une manière analogue, ce qui produira l'équation nécessaire pour l'éliminer.

Si les équations proposées contiennent plusieurs fonctions arbitraires de la même quantité, il faudra différencier chaque équation autant de fois qu'il y a de fonctions, en représentant par m' la différentielle de m , par m'' celle de m' , . . . & ainsi de suite, & éliminer les fonctions, ainsi que les indéterminées m, m', m'', \dots &c.

Enfin, si les équations, outre les fonctions arbitraires ϕ, ψ, \dots contiennent encore leurs différentielles ϕ', ψ', \dots , on opérera, comme l'on vient de dire, & on éliminera autant de fonctions arbitraires & d'indéterminées que le comportera le nombre des équations qu'on aura obtenues; puis on différenciera l'équation résultante, en regardant comme seule variable chacune des indéterminées qui resteront, ce qui produira des équations nouvelles, en nombre suffisant pour les éliminer.

Avant que de faire usage de ce procédé, je vais l'éclaircir par des applications à quelques cas connus.

V I.

Soit proposé de faire évanouir les trois fonctions arbitraires, & l'indéterminée z' des deux équations

$$z = x \phi z' + z',$$

$$y = x \psi z' + \pi z',$$

qui expriment une surface engendrée d'une manière quelconque, par le mouvement d'une droite.

La première, différenciée trois fois de suite, donne immédiatement

$$(1) \quad mp + q = m \phi z';$$

$$(2) \quad m'p + m^2r + 2ms + t = m' \phi z';$$

$$(3) \quad m''p + 3m'(mr + s) + m^3 \frac{d^2z}{dx^2} + 3m^2 \frac{d^2z}{dx^2 dy} + 3m \frac{d^3z}{dx dy^2} + \frac{d^4z}{dy^4} = m'' \phi z';$$

mais la seconde, par de semblables différenciations, donne aussi directement

$$(4) \quad 1 = m \psi z';$$

$$(5) \quad 0 = m' \psi z';$$

$$(6) \quad 0 = m'' \psi z';$$

introduisant les valeurs $m' = 0$, $m'' = 0$, que donnent les équations (5) & (6) dans les équations (3) & (4), on a

$$m^2r + 2ms + t = 0,$$

$$m^3 \frac{d^2z}{dx^2} + 3m^2 \frac{d^3z}{dx^2 dy} + 3m \frac{d^4z}{dx dy^2} + \frac{d^5z}{dy^5} = 0,$$

qui, par l'élimination de m , produisent l'équation aux différences partielles des surfaces généralement engendrées par le mouvement d'une ligne droite, & dont l'intégrale finie & complète est représentée par les deux proposées.

V I I.

Soit proposé de faire évanouir les deux fonctions arbitraires & la quantité V des deux équations

$$z - \psi V = (x - V) \psi' V,$$

$$y - \phi V = (x - V) \phi' V,$$

qui expriment qu'une surface est développable, d'après la considération qu'elle est engendrée par le mouvement d'une droite qui est toujours tangente à une même courbe à double courbure.

La

La première, différenciée deux fois de suite, donne

$$(1) \quad mp + q = m \psi' V;$$

$$(2) \quad m'p + m^2r + 2ms + t = m' \psi' V.$$

Mais la seconde, différenciée de la même manière, donne

$$(3) \quad 1 = m \phi' V;$$

$$(4) \quad 0 = m' \phi' V.$$

Substituant dans la seconde, la valeur $m' = 0$, que donne la quatrième, on a

$$m^2r + 2ms + t = 0;$$

équation délivrée des quantités $V, \phi V, \phi' V, \psi V, \psi' V$ & m' , & de laquelle il est impossible d'éliminer un plus grand nombre d'indéterminées, par le moyen des six équations qu'on a employées. Actuellement pour en éliminer m , je le différencie en regardant m comme seule variable, ce qui donne la nouvelle équation

$$mr + s = 0,$$

& par conséquent $ms + t = 0,$

d'où l'on conclut, en chassant m ,

$$rt = s^2,$$

équation des surfaces développables, que j'ai déjà donnée.

Ces deux équations suffisent pour faire entendre la méthode que j'emploierai dans les recherches suivantes; & il est facile d'apercevoir qu'en la retournant, on peut l'appliquer utilement à l'intégration des équations aux différences partielles: nous aurons occasion d'en donner quelques exemples.

V I L

Exprimer qu'une surface courbe est engendrée par le mouvement de la circonférence d'un cercle dont le rayon

Mém. 1784.

N

est variable d'une manière quelconque, & dont le plan est toujours normal à la courbe parcourue par son centre.

Cette question ne diffère de celle de l'article 1, que parce que le rayon du cercle générateur, au lieu d'être constant, est une certaine fonction de l'ordonnée du centre; si donc on représente cette fonction par π , & que l'on mette $\pi z'$, au lieu de a , dans les équations (A) & (B) de l'article 1, les équations

$$(A) \quad (z - z')^2 + (y - \phi z')^2 + (x - \psi z')^2 = (\pi z')^2,$$

$$(B) \quad z - z' + (y - \phi z') \phi' z' + (x - \psi z') \psi' z' = 0,$$

qu'on obtiendra, contiendront l'expression demandée; en sorte que si l'on connoissoit la courbe parcourue par le centre, & la grandeur du rayon d'après la position du centre, ce qui détermineroit les formes des fonctions ϕ , ψ & π , on élimineroit z' de ces deux équations, & on auroit en x , y & z , celle de la surface engendrée. Mais si l'on veut simplement exprimer la génération, indépendamment de la courbe parcourue par le centre, & de la loi du rayon du cercle générateur, il faut regarder ces trois fonctions comme arbitraires, & les éliminer par la différenciation.

Pour cela, je différencie la première, en regardant z' comme constant, ce qui donne

$$(1) \quad (z - z') (mp + q) + (y - \phi z') + m(x - \psi z') = 0,$$

dans laquelle la fonction π est évanouie. Je la différencie une seconde fois, & faisant, pour abréger,

$$m^2 r + 2ms + t = M, \text{ \& } r + m^2 + (mp + q)^2 = V,$$

j'obtiens

$$(2) \quad m' \{ (z - z') p + x - \psi z' \} + (z - z') M + V = 0,$$

dans laquelle la fonction ϕ est évanouie. Enfin je la diffé-

renvoie une troisième fois, & faisant, pour abrégér,

$$m' \frac{d^2 z}{dx^2} + 3m'' \frac{d^2 z}{dx dy} + 3m' \frac{d^2 z}{dx dy^2} + \frac{d^2 z}{dy^2} = N,$$

je trouve

$$m' \{ (z - z')p + x - \psi z' \} + 3m'' \{ (mp + q)p + m + (z - z') \\ (mr + s) \} + 3 (mp + q) M + (z - z') N = 0;$$

de laquelle éliminant $x - \psi z'$ par le moyen de la précédente, je tire

$$(3) \{ (z - z') \{ - m'' M + 3m'' (mr + s) + m' N \} \\ - m'' V + 3m'' \{ (mp + q)p + m \} + 3m' (mp + q) M \} = 0,$$

& parce que chaque différenciation a fait disparoître une arbitraire, cette équation comporte l'équation (A), ainsi que les différentielles.

Je passe actuellement à l'équation (B) qui donne par la première différenciation

$$(4) \quad mp + q + \phi' z' + m \psi' z' = 0;$$

par la seconde,

$$(5) \quad m' (p + \psi' z') + M = 0;$$

& par la troisième,

$$m'' (p + \psi' z') + 3m'' (mr + s) + N = 0,$$

de laquelle & de la précédente, éliminant $p + \psi' z'$, on obtient

$$(6) \quad m'' M + 3m'' (mr + s) - m' N = 0;$$

ces trois différenciations n'ont fait disparoître que deux nouvelles arbitraires, c'est-à-dire, $\phi' z'$ & $\psi' z'$; mais l'équation (6) faisant évanouir z' dans l'équation (3) qui devient alors

$$(7) \quad - m'' V + 3m'' \{ (mp + q)p + m \} \\ + 3m' (mp + q) M \} = 0;$$

N ij

il s'ensuit que toute la solution de la question est contenue dans les équations (6) & (7), desquelles, éliminant m'' , on tire

$$3 m' \{ M[(mp + q)p + m] - V(mr + s) \} + 3 M^2 (mp + q) = NV,$$

équation dans laquelle la quantité m' est absolument arbitraire, & ne peut être déterminée par rien. Pour la faire évanouir, je différencie l'équation, en regardant m' comme seule variable, ce qui donne

$$M[(mp + q)p + m] - V(mr + s) = 0, \\ \& \text{ par conséquent}$$

$$3 M^2 (mp + q) = NV.$$

& en éliminant m de ces deux équations, on aura l'équation aux troisièmes différences partielles, demandée.

Donc, en substituant pour M , N & V , les quantités qu'elles représentent, l'équation demandée est le résultat de l'élimination de m des deux équations suivantes :

$$k^2 \{ m^3 \frac{d^2 z}{dx^2} + 3 m^2 \frac{d^2 z}{dx dy} + 3 m \frac{d^2 z}{dy^2} + \frac{d^2 z}{dy^2} \} = \\ 3 (m^2 r + 2 m s + t) \{ p(mr + s) + q(ms + t) \} \\ m^2 \{ s(1 + p^2) - pqr \} + m \{ t(1 + p') \} \\ - r(1 + q^2) - s(1 + q^2) + pqt \} = 0.$$

V I I L.

On peut encore résoudre la même question par une autre considération : il est en effet évident que sur la surface dont il s'agit, la courbe génératrice est une ligne de moindre ou plus grande courbure; cette surface est donc telle que pour une même ligne de plus grande ou de moindre courbure, le rayon de cette courbure est constant, & qu'il est variable quand on passe d'une de ces lignes à une autre. Il faut donc exprimer que le rayon de courbure est fonction du paramètre par lequel les lignes de cette

courbure différent les unes des autres; ainsi en représentant ce paramètre par a , & le rayon de courbure par R , le caractère de la surface demandée, est exprimé par l'équation $R = Fa$, F étant une fonction arbitraire.

Or j'ai fait voir dans le Mémoire sur les Déblais & les Remblais, en 1781, que les équations des deux lignes de moindre ou de plus grande courbure d'une surface courbe, sont les racines de l'équation

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx^2}{dy^2} \{s(1+p^2) - pqr\} + \frac{dx}{dy} \{t(1+p^2) \\ - r(1+q^2)\} - \{s(1+q^2) - pqt\} \end{aligned} \right\} = 0,$$

& que les valeurs des deux rayons de courbure, sont celles de la suivante,

$$\left. \begin{aligned} R^2 \{rt - s^2\} + Rk \{r(1+q^2) - 2pqs\} \\ + t(1+p^2)\} + k^2 \end{aligned} \right\} = 0$$

Soit fait, pour abréger,

$$r(1+q^2) - pqs = \alpha,$$

$$t(1+p^2) - pqs = \beta,$$

$$s(1+p^2) - pqr = \gamma,$$

$$s(1+q^2) - pqt = \delta,$$

ces deux équations deviennent

$$(A) \quad \gamma \frac{dx^2}{dy^2} - (\alpha - \beta) \frac{dx}{dy} - \delta = 0;$$

$$(B) \quad R^2 (\alpha\beta - \gamma\delta) + Rk^3 (\alpha + \beta) + k^6 = 0;$$

dont les racines sont

$$(C) \quad \frac{dx}{dy} = \frac{\alpha - \beta + \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4\gamma\delta}}{2\gamma},$$

$$(D) \quad R = k^3 \left\{ \frac{-\alpha - \beta + \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4\gamma\delta}}{2(\alpha\beta - \gamma\delta)} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

sur quoi il faut remarquer que pour une certaine ligne de moindre ou de plus grande courbure, & pour le rayon de cette courbure, les lignes sont les mêmes, tandis que ces lignes seroient différens, si pour la ligne d'une de ces courbures, on considéroit le rayon de l'autre.

Cela posé, si l'on intégroît l'équation (C), la constante arbitraire que l'on introduiroit pour compléter cette intégrale, seroit constante pour toute l'étendue d'une même ligne de courbure, & elle changeroit de valeur en passant d'une de ces lignes à une autre: cette constante arbitraire est donc le paramètre a , par lequel diffèrent les lignes consécutives de moindre ou de plus grande courbure, & dont le rayon de courbure doit être fonction arbitraire. On doit donc avoir $R = Fa$, ou

$$\frac{dx}{ds} \frac{dR}{dy} = \frac{dx}{dy} \frac{dR}{ds},$$

& parce que l'équation (C) donne

$$\frac{da}{ds} = 2\gamma,$$

&

$$\frac{da}{dy} = -a + \beta - \sqrt{(a - \beta)^2 + 4\gamma^2},$$

l'équation de la surface demandée sera

$$(E) \quad 2\gamma \frac{dR}{dy} = \{-a + \beta - \sqrt{(a - \beta)^2 + 4\gamma^2}\} \frac{dR}{ds},$$

qui, si l'on substitue pour R la valeur, prise dans l'équation (D), & si l'on exécute les différenciations indiquées, donnera le même résultat que les équations de l'article précédent.

IX.

Si l'on considère que la quantité $\frac{dx}{dy}$, qui est dans l'équation (A), est ce que nous avons représenté par m ,

dans la manière de différencier de l'article IV, c'est-à-dire, en regardant a comme constante, & que le rayon de courbure R , qui entre dans (B), est une fonction de cette même quantité a , ces deux équations pourront être mises sous la forme

$$m^2 \gamma - (a - \beta)m - \delta = 0,$$

$$(Fa)^2(a\beta - \gamma\delta) + k^3 Fa(a + \beta) + k^4 = 0,$$

& comprendront l'intégrale première de l'équation aux différences partielles du troisième ordre, que nous venons de trouver, puisqu'elles ne sont que du second ordre, & qu'elles contiennent une fonction arbitraire; mais parce que ces équations ne renferment plus le radical, elles sont plus générales que l'équation aux différences troisièmes; elles expriment en effet, que pour une même ligne de moindre ou de plus grande courbure, l'une ou l'autre des deux rayons de courbure, indistinctement est constant, tandis que dans la surface dont il s'agit, pour une même ligne de moindre ou de plus grande courbure, c'est le rayon de cette même courbure qui ne varie pas, & non celui de l'autre.

Pour sauver l'ambiguïté, c'est dans les équations (C) & (D) qu'il faut mettre m à la place de $\frac{d^2}{ds^2}$, & Fa pour R , ce qui donne

$$2\gamma m = a - \beta + \sqrt{(a - \beta)^2 + 4\gamma\delta},$$

$$2(a\beta - \gamma\delta)Fa = k^3 \{-a - \beta + \sqrt{(a - \beta)^2 + 4\gamma\delta}\},$$

pour intégrale première & complète de l'équation de la surface.

Si l'on donnoit au radical des signes différens dans les deux équations, elles exprimeroient une autre génération de surface, que nous aurons occasion de traiter.

X.

Actuellement, pour intégrer ces équations, j'élimine le radical, ce qui ne rétablit pas l'ambiguïté, & donne

$$(a\beta - \gamma\delta) Fa = (\gamma m - a) k^3,$$

& combinant cette équation avec les deux premières de l'article précédent, j'obtiens les deux équations

$$Fa(m\gamma + \beta) = -k^3,$$

$$\& Fa(ma + \delta) = -mk^3,$$

qui expriment la même chose que les proposées, & qu'il s'agit d'intégrer: pour cela, je remarque que les quantités a, β, γ, δ , sont des différentielles partielles, & que l'on a

$$a = k^3 \frac{d \cdot \frac{p}{k}}{d \cdot x};$$

$$\beta = k^3 \frac{d \cdot \frac{q}{k}}{d \cdot y};$$

$$\gamma = k^3 \frac{d \cdot \frac{q}{k}}{d \cdot x};$$

$$\delta = k^3 \frac{d \cdot \frac{p}{k}}{d \cdot y};$$

Substituant ces valeurs dans les deux précédentes, elles deviennent

$$Fa \left(m \frac{d \cdot \frac{q}{k}}{d \cdot x} + \frac{d \cdot \frac{q}{k}}{d \cdot y} \right) = -1,$$

$$Fa \left(m \frac{d \cdot \frac{p}{k}}{d \cdot x} + \frac{d \cdot \frac{p}{k}}{d \cdot y} \right) = -m,$$

qui

qui sont des différentielles exactes, prises en regardant a comme constante; on aura donc en intégrant

$$Fa \frac{q}{k} = -y + fa,$$

$$Fa \frac{p}{k} = -x + fa,$$

dans lesquelles f & f' sont des fonctions arbitraires, introduites pour compléter les intégrales, & ces deux équations sont l'intégrale seconde & complète de l'équation aux troisièmes différences. Enfin, substituant pour k la valeur $\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$, ces deux équations donnent pour p & q les valeurs suivantes,

$$p = \frac{x - fa}{\sqrt{(Fa)^2 - (x - fa)^2 - (y - fa)^2}},$$

$$q = \frac{y - fa}{\sqrt{(Fa)^2 - (x - fa)^2 - (y - fa)^2}},$$

& par conséquent

$$dz = \frac{(x - fa) dx + (y - fa) dy}{\sqrt{(Fa)^2 - (x - fa)^2 - (y - fa)^2}},$$

qui est une différentielle exacte, prise en regardant a comme constante, & dont l'intégrale est

$$(z - a)^2 + (y - fa)^2 + (x - fa)^2 = (Fa)^2,$$

a devant être éliminé par l'équation suivante,

$$z - a + (y - fa) f' a + (x - fa) f' a = Fa F' a,$$

qui exprime que la différentielle de la première, prise en ne faisant varier que a , doit être nulle. Ainsi, ces deux équations sont l'intégrale finie & complète de l'équation aux différences partielles, qui énonce qu'une surface est engendrée par la circonférence d'un cercle variable de rayon, & dont le plan est toujours normal à la courbe, parcourue par son centre.

X I.

Des deux équations intégrales que nous venons de trouver, la première est celle d'une sphère, dont les coordonnées du centre a , fa , fa , & le rayon Fa , sont fonctions d'un même paramètre; la seconde dit que la différentielle de la première, prise en ne faisant varier que ce paramètre, doit être nulle; leur système appartient donc à la surface qui enveloppe une suite de sphères variables de rayon & de position dans l'espace, c'est-à-dire, que la surface dont il s'agit peut aussi être regardée comme formée par les intersections successives de la surface d'une sphère mobile & variable de rayon, résultat qu'il étoit facile d'observer *a priori*.

Si ces deux équations intégrales ne coïncident pas avec les équations (A) & (B) de l'article VII, quoiqu'elles expriment la même chose, c'est que dans celles-ci l'indéterminée z' est l'ordonnée du centre du cercle générateur, tandis que dans les autres l'indéterminée a est l'ordonnée du centre de la sphère mobile & perpétuellement touchée, ce qui est différent; mais elles rentrent les unes dans les autres par une simple transformation, & elles donnent le même résultat par la différenciation.

Nous sommes entrés dans un grand détail sur cette surface, 1.^o pour faire une application de la méthode de différencier & d'intégrer, que nous avons donnée; 2.^o parce que cette surface est celle qui, quoique flexible, doit garder la forme, si on la suppose remplie par un fluide élastique comprimé, comme l'a démontré M. Meusnier.

X I I.

Exprimer qu'une surface est engendrée par la circonférence d'un cercle variable de rayon, & qui se meut d'une manière quelconque dans l'espace.

Soient, comme précédemment, x, y, z , les coordonnées rectangulaires de la surface courbe, & x', y', z' , celles

du centre du cercle générateur ; si les équations de la courbe parcourue par le centre , sont $y = \phi z$ & $x = \psi z$, on aura $y' = \phi z'$ & $x' = \psi z'$, en sorte que si l'on représente par $\pi z'$ le rayon variable du cercle, on aura pour première équation

$$(A) (z - z')^2 + (y - \phi z')^2 + (x - \psi z')^2 = (\pi z')^2,$$

dans laquelle z' doit être déterminé par la loi du mouvement du plan.

Soient de plus $y = f z$ & $x = f z$, les équations de la courbe à laquelle le plan du cercle^g générateur est toujours normal ; & x'' , y'' , z'' , les coordonnées du point où cette courbe est coupée par le plan , on aura $y'' = f z''$, $x'' = f z''$; & l'équation qui exprime que le plan est normal à cette courbe , sera , comme dans l'article I,

$$z - z'' + (y - f z'') f' z'' + (x - f z'') f' z'' = 0;$$

& parce que la quantité z'' est fonction de z' , cette équation peut se mettre sous la forme

$$(B) z - z' + (y - \phi z') \pi z' + (x - \psi z') \pi z' = 0.$$

Les deux équations (A) & (B) comprennent l'expression demandée, en sorte que si l'on connoissoit la loi du mouvement du centre, & le rayon du cercle générateur, ce qui détermineroit les formes des cinq fonctions, on élimineroit z' de ces deux équations, & l'on auroit en x , y , z , l'équation de la surface demandée; mais si l'on veut simplement exprimer le caractère de cette espèce de génération, il faut regarder ces cinq fonctions comme arbitraires, & les faire disparoître par des différenciations poussées aux cinquièmes différences, ce qui n'a d'autre difficulté que la longueur du calcul.

X I I I.

Exprimer qu'une surface courbe est engendrée par une courbe plane quelconque, qui se meut de manière que

son plan soit normal aux courbes parcourues par tous ses points.

On peut encore définir autrement cette surface. Concevons qu'un plan se meuve comme s'il se développoit de dessus une surface développable, & que sur ce plan soit tracée une courbe quelconque fixe dans le plan, elle engendrera, par son mouvement, une surface de la nature de celles dont il s'agit ici.

Soient x, y, z , les coordonnées rectangulaires de la surface, $y = \phi z$, $x = \psi z$, les équations d'une des courbes auxquelles le plan est toujours normal; si x', y', z' , sont les coordonnées du point où cette courbe est coupée par le plan, on aura $y' = \phi z'$ & $x' = \psi z'$, & l'équation qui exprimera que le plan est normal à la courbe, sera, comme dans l'article I.^{er}

$$(A) \quad z - z' + (y - \phi z') \phi' z' + (x - \psi z') \psi' z' = 0,$$

ce qui détermine la valeur de z' en x, y & z .

Actuellement, le caractère de la surface est que si le point que l'on considère sur cette surface se meut parallèlement à l'élément correspondant de la courbe normale, c'est-à-dire, perpendiculairement au plan, la distance à la courbe normale

$\sqrt{[z - z']^2 + (y - \phi z')^2 + (x - \psi z')^2}$, est invariable: or, ce point se meut suivant cette condition, si l'on a $\frac{dz}{dz'} = \frac{\psi' z'}{\phi' z'}$; il faut donc qu'en donnant à $\frac{dz}{dz'}$ la valeur $\frac{\psi' z'}{\phi' z'}$, la différentielle du radical soit nulle, ce, qui exécuté à la manière de l'article IV, & en vertu de l'équation (A), donne

$$(B) \quad p \psi' z' + q \phi' z' = 1.$$

Les deux équations (A) & (B) renferment la solution de la question.

La première, différenciée deux fois de suite, en regardant z' comme constante, donne

$$mp + q + \phi' z' + m \psi' z' = 0,$$

$$m'(p + \psi' z') + m^2 r + 2ms + t = 0;$$

la seconde, différenciée deux fois de la même manière, donne

$$(mr + s)\psi' z' + (m's + t)\phi' z' = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} &+ \psi' z' \left(m^2 \frac{d^3 z}{dx^3} + 2m \frac{d^3 z}{dx^2 dy} + \frac{d^3 z}{dx dy^2} \right) \\ &+ \phi' z' \left(m^2 \frac{d^3 z}{dx^2 dy} + 2m \frac{d^3 z}{dx dy^2} + \frac{d^3 z}{dy^3} \right) \end{aligned} \right\} = 0.$$

Si de l'équation (B) & des quatre différentielles, on élimine les trois indéterminées ϕ' , ψ' , m' , on trouve que l'équation aux troisièmes différences partielles, qui exprime la propriété de la surface, est le résultat de l'élimination de m des deux équations suivantes,

$$\left. \begin{aligned} &(ms + t) \left[m^2 \frac{d^3 z}{dx^3} + 2m \frac{d^3 z}{dx^2 dy} + \frac{d^3 z}{dx dy^2} + \frac{(rt - s^2)(mq - p)}{k^2} \right] \\ &- (mr + s) \left[m^2 \frac{d^3 z}{dx^2 dy} + 2m \frac{d^3 z}{dx dy^2} + \frac{d^3 z}{dy^3} - \frac{(rt - s^2)(mq - p)m}{k^2} \right] \end{aligned} \right\} = 0,$$

$$m^2 [s(1 + p^2) - pqr] + m [t(1 + p^2) - r(1 + q^2)] - [s(1 + q^2) - pqt] = 0.$$

X I V.

La considération que nous avons employée pour résoudre la question, nous a conduit directement aux différences premières. Pour avoir la même expression en quantités finies, des deux équations aux différences premières,

$$p\psi' z' + q\phi' z' = 1,$$

$$mp + q + \phi' z' + m\psi' z' = 0;$$

110 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
je tire les valeurs suivantes de p & de q ,

$$p = \frac{1 + (\phi' z')^2 + m \phi' z' \psi' z'}{\psi' z' - m \phi' z'}$$

$$q = \frac{-m[1 + (\psi' z')^2] - \phi' z' \psi' z'}{\psi' z' - m \phi' z'};$$

qui, substituées dans $d z = p dx + q dy$, donnent

$$\frac{m \phi' z'}{\psi' z'} [d z + \phi' z' dy + \psi' z' dx - dy \frac{1 + (\phi' z')^2 + (\psi' z')^2}{\phi' z'}]$$

$$= d z + \phi' z' dy + \psi' z' dx - dx \frac{1 + (\phi' z')^2 + (\psi' z')^2}{\psi' z'}.$$

dont l'intégrale, prise en regardant z' comme constante, est

$$z + y \phi' z' + x \psi' z' - y \frac{1 + (\phi' z')^2 + (\psi' z')^2}{\phi' z'}$$

$$= \pi [z + y \phi' z' + x \psi' z' - x \frac{1 + (\phi' z')^2 + (\psi' z')^2}{\psi' z'}],$$

dans laquelle π est une fonction arbitraire, & z' doit être telle, que la différentielle de cette équation, prise en regardant z' comme seule variable, soit nulle; ce qui signifie que la surface que l'on considère est perpétuellement enveloppée par une surface cylindrique à base quelconque, mais constante, & qui se meut de manière que sa base soit toujours normale aux courbes que parcourent tous ses points; résultat qu'on pouvoit observer *a priori*, & qui auroit donné directement l'expression en quantités finies, que nous venons de trouver.

X V.

On peut encore arriver au même résultat par une troisième considération. En effet, sur la surface demandée, la courbe génératrice est la ligne d'une des courbures, tandis que les courbes parcourues par chacun de ses points, sont des lignes de l'autre courbure; or pour chacune de ces dernières lignes, le rayon de leur courbure est constant, puisqu'il est toujours celui qui convient à un même point

de la génératrice, & il varie lorsque l'on passe d'une de ces lignes à une autre; donc la surface est telle, que pour la même ligne de courbure, le rayon de l'autre courbure est constant: donc cette surface est celle dont il étoit question à la fin de l'article IX, & dont l'équation est pareillement comprise dans celle-ci:

$$m^2 \gamma - (\alpha - \beta) m - \delta = 0,$$

$$(Fa)^2 (\alpha\beta - \gamma\delta) + k^3 Fa (\alpha + \beta) + k^6 = 0,$$

Si l'on veut avoir son équation particulière, il faut extraire les racines de ces deux équations, & donner au radical commun des signes différens; ce qui donne

$$2\gamma m = \alpha - \beta + \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4\gamma\delta},$$

$$2(\alpha\beta - \gamma\delta) Fa = -k^3 \{ \alpha + \beta + \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4\gamma\delta} \};$$

équations qui ne diffèrent de celles de l'article IX, que par les signes du radical qui sont contraires; & qui par la différenciation donnent la même équation aux différences troisièmes que nous avons trouvées, article XIII.

X V I.

Enfin la partie de cette surface comprise entre deux positions consécutives de la courbe génératrice, étant une petite portion de surface cylindrique coupée perpendiculairement à la direction de ses arêtes rectilignes, il s'ensuit que cette surface peut être exécutée commodément en fuseaux d'étoffe, de telle manière qu'un des fils de la chaîne de l'étoffe parcoure le fuseau dans toute sa longueur. Toutes les autres surfaces courbes peuvent être exécutées de cette manière, mais les courbes sur lesquelles doivent être faites les coutures, sont compliquées, & celle-ci est la seule où les courbes soient simples & directement données par la génération. Les surfaces développables, & celles de révolution ne jouissent de cette

propriété, que parce qu'elles sont des cas particuliers de celle dont il s'agit.

Passons maintenant au cas général.

X V I I.

Exprimer qu'une surface courbe est engendrée par le mouvement d'une courbe quelconque, plane ou à double courbure, constante de forme, & variable de position d'une manière quelconque dans l'espace.

Tout étant rapporté à trois plans fixes dans l'espace, & rectangulaires, par les coordonnées x, y, z , supposons qu'à l'origine du mouvement de la courbe génératrice, ou, ce qui revient au même, que pour un certain instant quelconque de son mouvement, la position de cette courbe par rapport aux trois plans soit connue, en sorte qu'on ait à cette époque les équations des projections de la courbe, & qu'elles soient $y = \phi z$ & $x = \psi z$. Supposons ensuite que trois autres plans rectangulaires, confondus dans ce moment avec les trois plans fixes, soient entraînés par la courbe dans son mouvement, de manière qu'elle ne change jamais de position par rapport à eux, & que dans le cours du mouvement, quelque part que l'on prenne la courbe génératrice, les projections sur ces plans mobiles soient toujours les mêmes, & que par conséquent les équations de ces projections en coordonnées perpendiculaires à ces plans mobiles, & rapportées à leur intersection comme origine, soient constamment les mêmes, indépendamment de la position de la courbe; il est évident que si l'on appelle u, v, w , les coordonnées mobiles qui, à l'origine du mouvement, étoient respectivement x, y, z , les équations des projections de la courbe sur les plans mobiles dans un instant quelconque, seront $v = \phi w$ & $u = \psi w$; dans lesquelles les quantités u, v, w sont des fonctions de x, y, z , & d'une indéterminée qui exprime la distance à l'origine du mouvement; en sorte que si l'on connoissoit la loi du mouvement des plans mobiles, & qu'on

qu'on fût par conséquent en état, pour un instant quelconque du mouvement, de trouver leurs équations rapportées aux plans fixes, on trouveroit les valeurs des quantités u , v , w , & éliminant l'indéterminée des deux dernières équations, on auroit en x , y , z , celle de la surface demandée.

Posons donc que l'on connoisse la courbe que décrit le point d'intersection commune des trois plans mobiles, & que les projections de cette courbe sur les trois plans fixes, aient pour équations $y = \varpi z$ & $x = \pi z$. Considérant ensuite la génératrice dans un instant quelconque de son mouvement, soit z' l'ordonnée parallèle aux z de son origine mobile; les autres coordonnées de cette origine seront

$\pi z'$ dans le sens des x ,

& $\varpi z'$ dans le sens des y .

Cela posé, les équations des trois plans mobiles, lorsque leur intersection se trouve au point dont l'ordonnée est z' , sont de la forme

$$a (z - z') + b (y - \varpi z') + c (x - \pi z') = 0,$$

$$a' (z - z') + b' (y - \varpi z') + c' (x - \pi z') = 0,$$

$$a'' (z - z') + b'' (y - \varpi z') + c'' (x - \pi z') = 0;$$

dans lesquelles les coefficients doivent avoir les valeurs déterminées d'après la loi du mouvement des plans. Or, de ces neuf coefficients, il n'y en a que six qui soient nécessaires pour la détermination des plans; nous pouvons donc établir entr'eux trois conditions arbitraires; & choisissant celles qui sont de nature à simplifier les expressions, nous poserons les trois équations suivantes:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1,$$

$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1;$$

de plus, les trois plans étant rectangulaires, on aura entre les coefficients les trois équations suivantes :

$$aa' + bb' + cc' = 0,$$

$$a''a + b''b + c''c = 0,$$

$$a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0;$$

donc de ces neuf quantités il n'y en a que trois qu'il soit nécessaire de déterminer d'après la loi du mouvement de la courbe génératrice.

Posons que les trois coefficients déterminés de cette manière, soient a, b', c'' , les valeurs des six autres, conclues des six équations précédentes, en faisant, pour abréger,

$$1 + a + b' + c'' = M,$$

$$1 + a - b' - c'' = N,$$

$$1 - a + b' - c'' = P,$$

$$1 - a - b' + c'' = Q.$$

seront

$$2b = \sqrt{NP} + \sqrt{MQ},$$

$$2a' = \sqrt{NP} - \sqrt{MQ},$$

$$2a'' = \sqrt{NQ} + \sqrt{MP},$$

$$2c = \sqrt{NQ} - \sqrt{MP},$$

$$2c' = \sqrt{PQ} + \sqrt{MN},$$

$$2b'' = \sqrt{PQ} - \sqrt{MN};$$

& parce que, d'après la loi du mouvement, étant donnée z' , on doit toujours être en état de trouver les trois quantités a, b', c'' , il s'ensuit que ces quantités sont des fonctions de z' , que nous pourrons représenter par les équations $a = \alpha z', b' = \beta z', c'' = \gamma z'$, α, β, γ étant des caractères de fonctions; & que les six autres quantités, ainsi que M, N, P, Q , seront d'autres fonctions de z' , déduites de celles-ci.

Actuellement, si du point de la surface, dont les coordonnées sont x, y, z , on abaisse des perpendiculaires sur les trois plans mobiles, leurs valeurs seront

$$- \{a(z - z') + b(y - \varpi z') + c(x - \pi z')\},$$

$$- \{a'(z - z') + b'(y - \varpi z') + c'(x - \pi z')\},$$

$$- \{a''(z - z') + b''(y - \varpi z') + c''(x - \pi z')\};$$

ces trois quantités sont celles que nous avons représentées au commencement de cet article par u, v, w , c'est-à-dire, par $w, \phi w, \psi w$. Donc si l'on substitue dans ces quantités les valeurs des coefficients que nous avons trouvées précédemment, la solution de la question sera comprise dans les trois équations suivantes :

$$a z'(z - z') + \frac{1}{2} [V(NP) + V(MQ)] (y - \varpi z')$$

$$+ \frac{1}{2} [V(NQ) - V(MP)] (x - \pi z') = -v,$$

$$\frac{1}{2} [V(NP) - V(MQ)] (z - z') + \beta z' (y - \varpi z')$$

$$+ \frac{1}{2} [V(PQ) + V(MN)] (x - \pi z') = \phi(-w),$$

$$\frac{1}{2} [V(NQ) + V(MP)] (z - z') + \frac{1}{2} [V(PQ) - V(MN)] (y - \varpi z') + \gamma z' (x - \pi z') = \psi(-w),$$

en sorte que lorsque l'on connoîtra la loi du mouvement de la courbe génératrice, & par conséquent les formes des sept fonctions, $a, \beta, \gamma, \varpi, \pi, \phi$ & ψ , en éliminant z' & w de ces trois équations, on aura en x, y, z , celle de la surface demandée. Mais si l'on veut simplement énoncer la génération de cette surface, sans statuer rien de particulier ni sur la courbe génératrice ni sur la loi de son mouvement, il faut regarder ces sept fonctions comme arbitraires, & les éliminer par la différenciation, ce qui conduira à une équation aux différences partielles du septième ordre.

En supposant qu'une surface courbe, constante de forme & déterminée, se meuve d'une manière quelconque dans l'espace, exprimer qu'une autre surface l'enveloppe perpétuellement dans toutes ses positions, indépendamment de la loi du mouvement.

Conservons tout ce qui est dans l'article précédent, & supposons de plus, qu'à l'origine du mouvement, l'équation donnée de la surface mobile, soit représentée par

$$\varphi(z, y, x) = 0;$$

que par conséquent son équation rapportée aux trois plans rectangulaires mobiles avec la surface, soit perpétuellement

$$\varphi(w, v, u) = 0.$$

Il est évident que les points de la surface cherchée, sont ceux de la surface mobile, dont les coordonnées x, y, z , rapportées aux plans fixes, ne varient pas lorsque la quantité z' , qui détermine la position de la surface mobile, varie; donc on aura l'équation demandée, en éliminant u, v, w, z' , des cinq équations suivantes:

$$\begin{aligned} & a z' (z - z') + \frac{1}{2} [V(NP) + V(MQ)] (y - \pi z') \\ & \mp \frac{1}{2} [V(NQ) - V(MP)] (x - \pi z') = -w, \\ & \frac{1}{2} [V(NP) - V(MQ)] (z - z') + \beta z' (y - \pi z') \\ & \mp \frac{1}{2} [V(PQ) + V(MN)] (x - \pi z') = -v, \\ & \frac{1}{2} [V(NQ) + V(MP)] (z - z')^{\frac{1}{2}} + [V(PQ) \\ & \mp V(MN)] (y - \pi z') + \gamma z' (x - \pi z') = -u, \end{aligned}$$

$$\varphi(w, v, u) = 0,$$

$$\frac{d\varphi(w, v, u)}{dz'} = 0;$$

en sorte que la forme de la fonction ϕ étant donnée, ce qui réduit toutes ces équations aux deux dernières, si l'on différencie ces deux équations par le procédé donné au commencement de ce Mémoire, & qu'on élimine les cinq fonctions $\alpha, \beta, \gamma, \pi, \varpi$, considérées comme arbitraires, & l'indéterminée z' , on aura une équation aux différences partielles du cinquième ordre, qui énoncera les propriétés de la surface qui enveloppe la surface donnée & mobile, dans toutes ses positions, sans rien dire de particulier sur la loi suivant laquelle ces positions changent.

On voit donc que quelque compliquée que soit l'équation d'une surface, constante de forme & variable de position dans l'espace, l'équation aux différences partielles de la surface qui l'enveloppe perpétuellement, ne peut jamais être que du cinquième ordre. Dans certains cas particuliers, l'ordre de cette équation peut être considérablement abaissé; on sait, par exemple, que lorsque la surface mobile est un plan, l'équation de la surface perpétuellement touchée, n'est que du second ordre, c'est celle des surfaces développables; & nous avons vu dans ce Mémoire, que lorsque la surface mobile est une sphère, l'équation de la surface qui l'enveloppe est encore du second ordre.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur cette matière, qui se complique trop, eu égard à son utilité.



M É M O I R E *

SUR LE CALCUL INTÉGRAL

DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES.

Par M. M O N G E.

TOUT ce que je me propose de dire sur cet objet, étant fondé sur le procédé que j'ai exposé dans le Mémoire précédent, pour faire disparaître, au moyen de la différenciation, les fonctions arbitraires qui sont comprises dans une équation intégrale, je vais reprendre ici ce procédé, pour le développer avec plus de clarté, & l'appliquer ensuite à l'intégration des équations aux différences partielles.

Je commencerai d'abord par les équations linéaires du premier ordre; je passerai ensuite & par degrés à celles des ordres supérieurs, & je terminerai ce Mémoire par quelques considérations sur les équations élevées.

* Ce Mémoire a été fait à l'occasion d'une proposition que j'énonçai à l'Académie, & qui fut contestée: il étoit achevé lorsqu'on me fit voir que l'idée principale, & qui faisoit l'objet de la contestation, étoit entièrement dans un Mémoire de M. de la Grange, imprimé dans le volume de l'Académie de Berlin, pour l'année 1779, où à la vérité, ce célèbre Géomètre l'applique simplement aux équations du premier ordre. Je crois être le premier qui ait dit quelque chose d'analogue dans un Mémoire présenté à l'Académie en 1771, imprimé dans le volume des Savans Étrangers, pour l'année 1773, en démontrant, &

par des considérations géométriques, & par des opérations analytiques, la proposition suivante.

L'intégrale de l'équation aux différences partielles $Mp + Nq = 0$, dans laquelle les coefficients M, N , sont fonctions des trois variables x, y, z , est la même, soit que l'on regarde dans ces coefficients la quantité z comme variable, soit qu'on la regarde comme constante.

On y verra que cette proposition, dont j'étois dès-lors fortement occupé, est le germe de ce qui fait l'objet du Mémoire actuel, & qu'elle a dû me conduire aux résultats que je présente.

I.

Soit proposé de faire disparaître la fonction arbitraire ϕ de l'équation $V = \phi U$.

Cette équation exprime évidemment que les deux quantités V & U sont constantes ensemble, & variables ensemble; ou, pour mieux dire, elle exprime seulement que ces deux quantités sont constantes ensemble, car si U venoit à varier, l'équation ne détermineroit pas la variation qui en résulteroit dans V . Il suit de-là, que si l'on fait U égale à une certaine constante quelconque a , on aura V égale à une autre constante b , sans qu'il y ait aucune relation entre a & b , puisque dans l'équation $b = \phi a$, qui pour lors a lieu, la fonction ϕ est arbitraire: la proposée exprime donc que les deux équations

$$U = a,$$

$$V = \phi a = b,$$

ont lieu en même temps, indépendamment de la constante arbitraire a , ou, ce qui revient au même, elle est le résultat de l'élimination de a entre ces deux équations: elle ne comporte pas que chacune de ces équations aient lieu en particulier, mais elle signifie qu'elles ont lieu simultanément, c'est-à-dire, que si l'une est supposée, l'autre s'ensuit nécessairement, & elle ne signifie que cela. Si donc on différencie aux différences ordinaires ces deux équations, ce qui fait en effet disparaître l'indéterminée a , & donne

$$dU = 0,$$

$$dV = 0,$$

ou

$$(A) \quad \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) dy = 0,$$

$$(B) \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) dy = 0,$$

on aura deux équations dans lesquelles on aura introduit une nouvelle indéterminée $\frac{dy}{dx}$, & dont le système représentera la proposée, & exprimera la même chose qu'elle. Ainsi, énoncer la proposée, c'est prononcer que les deux équations (A) & (B) ont lieu simultanément, ou indépendamment de la valeur arbitraire de $\frac{dy}{dx}$; ce n'est pas dire que l'une ait lieu, ni que l'autre ait lieu, c'est poser qu'elles ont lieu ensemble, c'est dire que les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$, qu'elles donnent, sont égales entr'elles, sans rien statuer d'ailleurs sur cette valeur, qui peut être tout ce qu'on voudra. Donc, si l'on élimine de ces deux équations la quantité $\frac{dy}{dx}$, le résultat

$$(C) \left(\frac{dU}{dx} \right) \left(\frac{dV}{dy} \right) - \left(\frac{dU}{dy} \right) \left(\frac{dV}{dx} \right) = 0,$$

énoncera la même chose que la proposée. C'est ce résultat nécessaire, exprimé en quantités différentielles, & délivré de la fonction arbitraire ϕ , que l'on nomme *l'équation aux différences partielles de la proposée*, & dont celle-ci se nomme *l'intégrale complète*.

Les deux équations (A) & (B) ne sont pas nécessaires; tout autre système, qui, par l'élimination d'une indéterminée ω , donneroit pour résultat l'équation (C), seroit également propre à la représenter, pourvu que l'on comprît bien que les deux équations de ce système n'auroient pas lieu séparément, & que l'une fût destinée à éliminer ω de l'autre; mais ce nouveau système, quelle que fût sa forme, exprimeroit précisément la même chose que les deux équations (A) & (B), prises simultanément, & indépendamment de la valeur de $\frac{dy}{dx}$.

I I.

Il suit de-là, que pour faire disparoître une fonction arbitraire d'une équation intégrale, de quelque manière que cette fonction entre dans l'équation, il faut 1.^o égaler à zéro la différentielle ordinaire de la quantité qui est sous la fonction, ce qui produira une première équation; 2.^o différencier aux différences ordinaires l'équation, en regardant la fonction comme une constante, ce qui donnera une seconde équation; 3.^o éliminer, entre ces deux équations & la proposée, la fonction & l'indéterminée $\frac{dy}{dx}$, & l'équation résultante sera la différentielle demandée.

Si l'équation contenoit, non-seulement la fonction arbitraire ϕ , mais encore les coëfficiens de ses différentielles successives ϕ' , ϕ'' , $\phi''' \dots$ &c, ce que nous venons de dire ne seroit pas suffisant; mais dans ce cas, en faisant disparoître les fonctions arbitraires, on est conduit à des équations aux différences mêlées, entières & partielles, dont nous ne nous proposons pas de parler dans ce Mémoire.

I I I.

Pour intégrer une équation aux différences partielles linéaires & du premier ordre, il faut faire l'opération inverse. Supposons que l'on fasse pour abréger,

$$dz = p dx + q dy,$$

de manière que p & q représentent les différences partielles du premier ordre; & soit proposé d'intégrer l'équation générale

$$Mp + Nq + L = 0.$$

dans laquelle M , N , L , soient données d'une manière quelconque en x , y , z . Cette équation exprime une simple relation entre p & q , & ne peut suffire pour les déterminer toutes deux en x , y , z : si donc on élimine ou p

ou q , au moyen de l'équation $dz = p dx + q dy$, les équations

$$M dz + L dx = q (M dy - N dx),$$

$$N dz + L dy = p (M dy - N dx),$$

qu'on obtiendra, ne devront déterminer ni p ni q , c'est-à-dire, qu'elles devront avoir lieu chacune en particulier, indépendamment des valeurs de ces deux quantités; donc, leurs membres seront simultanément égaux à zéro, donc, on aura en même temps les trois équations

$$M dz + L dx = 0,$$

$$N dz + L dy = 0,$$

$$M dy - N dx = 0,$$

dont deux quelconques comportent la troisième. Ainsi, énoncer la proposée, c'est prononcer que deux quelconques de ces trois équations ont lieu, indépendamment de la valeur de la quantité $\frac{dy}{dx}$, introduite par l'élimination: ce n'est pas dire qu'aucunes d'elles ait lieu, c'est dire que deux d'entr'elles ont lieu ensemble.

Ces équations aux différences ordinaires ne sont point nécessaires; tout autre système de deux équations, qui, par l'élimination d'une indéterminée ω , reproduiroient, comme les précédentes, la proposée, exprimeroit la même chose, & en feroit une autre traduction exacte.

Actuellement, soient

$$V = a,$$

$$U = b,$$

les intégrales complètes de deux de ces trois équations aux différences ordinaires, a & b étant les constantes arbitraires introduites par l'intégration; ces deux équations, qui, comme leurs différentielles, doivent avoir lieu simultanément,

comme elles, représenteront la proposée : or, elles expriment, non pas que les deux quantités V & U sont constantes chacune en particulier, mais qu'elles sont constantes en même temps; c'est-à-dire, qu'elles varient ensemble, & sont constantes ensemble; ou autrement, qu'elles sont fonctions l'une de l'autre, sans rien statuer d'ailleurs sur la forme de cette fonction. Donc, si l'on indique par ϕ une fonction arbitraire, l'équation

$$V = \phi U$$

énoncera la même chose que la proposée, & sera son intégrale complète.

I V.

On voit donc d'abord que lorsque les trois équations

$$Mdz + Ldx = 0,$$

$$Ndz + Ldy = 0,$$

$$Mdy - Ndx = 0,$$

seront intégrables, on aura immédiatement l'intégrale de la proposée. Cette intégrale seroit possible, quand même il n'y auroit qu'une de ces équations que l'on pût intégrer dans l'état où elle est, parce qu'au moyen de cette équation intégrée, on chasseroit d'une des deux autres la variable, dont la différentielle n'est pas employée, ce qui en feroit une équation aux différences ordinaires à deux variables, dont l'intégrale seroit possible : mais lors même qu'aucune de ces trois équations ne pourra s'intégrer, en multipliant l'une d'entr'elles par un facteur indéterminé, & ajoutant le produit à une des deux autres, on aura une équation à trois variables, qui tiendra lieu d'une des trois premières; & si l'on peut déterminer le facteur, de manière que la condition d'intégrabilité soit satisfaite, on aura une équation dont l'intégrale rendra possible celles des deux autres. Nous allons éclaircir cela par des exemples.

Q ij

EXEMPLE I. Soit proposé d'intégrer l'équation

$$py - qx = 0,$$

qui est celle des surfaces de révolution autour de l'axe des z : les trois équations aux différences ordinaires se réduisent, dans ce cas, aux deux suivantes,

$$dz = 0,$$

$$ydy + xdx = 0;$$

leurs intégrales sont

$$z = a,$$

$$x^2 + y^2 = b.$$

Donc, l'intégrale complète de la proposée est

$$z = \varphi(x^2 + y^2),$$

ce qu'on savoit déjà.

V I.

EXEMPLE II. Soit proposé d'intégrer l'équation

$$p(y - Bz) - q(x - Az) + Ay - Bx = 0,$$

dans laquelle les quantités A & B sont des constantes; les trois équations aux différences ordinaires sont

$$(y - Bz) dz + (Ay - Bx) dx = 0,$$

$$- (x - Az) dz + (Ay - Bx) dy = 0,$$

$$(y - Bz) dy + (x - Az) dx = 0,$$

dont aucune n'est intégrable immédiatement.

Mais si l'on multiplie la première par A , la seconde par B , & qu'on les ajoute, on aura

$$Adx + Bdy + dz = 0;$$

si l'on multiplie de même la première par x , la seconde par y , & qu'on les ajoute, on aura

$$x dx + y dy + z dz = 0:$$

les intégrales de ces deux dernières équations sont

$$Ax + By + z = a,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = b.$$

Donc, en faisant $a = \phi b$, on aura pour intégrale complète de la proposée

$$Ax + By + z = \phi (x^2 + y^2 + z^2).$$

Cette équation, qui énonce la même chose que les deux précédentes prises simultanément, exprime que la surface à laquelle elle appartient, est le lieu des intersections d'une suite de plans parallèles par une suite de surfaces de sphères concentriques, & dont le centre commun est à l'origine des coordonnées; donc, elle est celle des surfaces de révolution autour d'un axe incliné mené par l'origine.

V I I.

EXEMPLE III. S'il s'agit d'intégrer l'équation

$$px + qz + y = 0;$$

des trois équations aux différences ordinaires

$$x dz + y dx = 0,$$

$$z dz + y dy = 0,$$

$$x dy - z dx = 0,$$

que l'on obtient, il n'y a que la seconde qui soit intégrable immédiatement, & son intégrale est

$$z^2 + y^2 = a^2;$$

mais si l'on substitue dans la première la valeur de y , que fournit cette intégrale, on a

$$x dz + dx \sqrt{a^2 - z^2} = 0;$$

qui ne renferme plus que deux variables , & dont l'intégrale est

$$x^a e^{\text{arc fin. } \frac{z}{a}} = b;$$

faisant donc $b = \phi a$, & mettant pour a la valeur $\sqrt{(z^2 + y^2)}$, l'intégrale complète de la proposée sera

$$x^{\sqrt{(z^2 + y^2)}} e^{\text{arc fin. } \frac{z}{\sqrt{(z^2 + y^2)}}} = \phi(x^2 + y^2).$$

Si au lieu de substituer la valeur de y dans la première, on eût mis celle de z dans la troisième, en opérant de la même manière, on auroit trouvé l'intégrale complète sous cette autre forme,

$$x^{\sqrt{(z^2 + y^2)}} \phi(z^2 + y^2) = e^{\text{arc fin. } \frac{y}{\sqrt{(z^2 + y^2)}}}.$$

Ces exemples suffisent pour faire sentir l'esprit de la méthode dont il s'agit dans ce Mémoire, & nous aurons occasion dans la suite d'en faire d'autres applications.

De l'Intégration des Équations aux différences partielles linéaires & du second ordre.

Nous supposerons que l'on fasse dans la suite

$$dp = r dx + s dy,$$

$$dq = s dx + t dy,$$

de manière que les quantités r, s, t représentent les trois différences partielles du second ordre.

V I I I.

Soit l'équation linéaire générale

$$Ar + Bs + Ct + D = 0,$$

dans laquelle A, B, C, D soient données d'une manière quelconque en x, y, z, p, q . Cette équation exprime une

simple relation entre les trois quantités r, s, t , & ne peut suffire pour déterminer les valeurs de chacune d'elles en x, y, z, p, q . Si donc, à l'aide des deux équations $dp = rdx + sdy$, $dq = sdx + tdy$, qui ne disent rien de nouveau, on élimine deux de ces trois quantités, les trois équations

$$Bdpdy + Cdqdy - Cdpdx + Ddy^2 = -r \\ \{Ady^2 - Bdx dy + Cdx^2\},$$

$$Adpdy + Cdqdx + Ddxdy = . \quad s \\ \{Ady^2 - Bdx dy + Cdx^2\},$$

$$Adpdx - Adqdy + Bdqdx + Ddx^2 = -t \\ \{Ady^2 - Bdx dy - Cdx^2\},$$

que l'on obtient, ne doivent pas déterminer les valeurs de r, s, t ; & parce qu'elles ont lieu, il faut que ce soit indépendamment de ces valeurs, c'est-à-dire, que chacun des membres de ces équations doit être par lui-même égal à zéro, ou que l'on a en même temps

$$Ady^2 - Bdx dy + Cdx^2 = 0,$$

$$Adpdy + Cdqdx + Ddxdy = 0,$$

$$Bdpdy + C(dqdy - dpdx) + Ddy^2 = 0,$$

$$A(dpdx - dqdy) + Bdqdx + Ddx^2 = 0;$$

de ces quatre équations, il n'y en a que deux de nécessaires, car deux quelconques étant posées, les deux autres s'ensuivent.

Ainsi énoncer la proposée, c'est prononcer que deux quelconques de ces quatre équations ont lieu en même temps, indépendamment de la valeur de $\frac{dy}{dx}$ qui leur est commune, & qu'on a introduite dans la proposée pour en obtenir ces deux équations. Donc en raisonnant ici

comme dans l'article III, si les intégrales complètes de deux quelconques de ces équations, sont

$$V = a,$$

$$U = b;$$

a & b étant les constantes arbitraires introduites par l'intégration, l'intégrale première de la proposée, sera

$$V = \phi U;$$

& si cette équation est encore linéaire, on l'intégrera en quantités finies, par la méthode que nous avons expliquée plus haut.

I X.

Les équations aux différences ordinaires de l'article précédent, étant toutes les quatre élevées au second degré, il est évident que dans la première que l'on intégrera, la constante arbitraire sera pareillement élevée au second degré, & que cette constante aura deux valeurs que nous représenterons par

$$V = a,$$

$$V' = a'.$$

Quant à la seconde qu'on se propose d'intégrer, il se présente naturellement deux cas; ou cette équation, en vertu de l'intégrale de la première, s'abaissera au premier degré, ou elle restera du second; ces deux cas donnent des résultats qu'il ne faut pas confondre. Nous allons d'abord traiter le premier, nous analyserons ensuite le second.

X.

Si la seconde équation aux différences ordinaires, devient linéaire, en vertu de l'intégrale de la première, il n'y aura aucune nouvelle ambiguïté introduite de sa part; mais parce que l'intégrale de la première en présente une, il s'ensuit que, selon la solution qu'on emploiera, l'intégrale

l'intégrale de la seconde sera $U = b$ ou $U' = b'$; que par conséquent l'intégrale première de la proposée, sera indifféremment

$$V = \phi U,$$

$$\text{ou } V' = \psi U,$$

& que l'intégrale commune de ces deux dernières équations, sera l'intégrale finie & complète de la proposée.

Ces deux équations sont aussi celles qu'on trouveroit en faisant disparaître de l'intégrale finie, par la différenciation, ou l'une ou l'autre des deux fonctions arbitraires ϕ & ψ , qui la complètent.

X I.

Toutes les fois que les quantités V & V' seront exprimées en x, y, z , & qu'elles seront délivrées des différences partielles p & q , elles seront aussi les quantités qui entreront sous les deux fonctions arbitraires de l'intégrale finie; & parce que des quatre équations aux différences ordinaires, il n'y a que la première qui ne contienne pas les différences de p & de q , il s'ensuit qu'on ne pourra avoir immédiatement ces deux quantités, que par l'intégration de cette première équation. Lorsque les quantités V & V' contiendront les différences partielles p & q , les deux équations $V = \phi U$ & $V' = \psi U$, n'en seront pas moins les intégrales premières de la proposée, mais il est évident que ces quantités changeront de forme pour entrer dans l'intégrale finie.

Avant que d'aller plus loin, éclaircissons ce qui précède par des exemples connus.

X I I.

EXEMPLE I. Soit proposé d'intégrer l'équation du second ordre,

$$Ar + Bs + Ct + D = 0,$$

dans laquelle les quantités A, B, C, D , sont des constantes;

Mém. 1784.

R

les deux équations principales aux différences ordinaires, seront

$$A dy^2 - B dx dy + C dx^2 = 0,$$

$$A p dy + C q dx + D dx dy = 0.$$

Si, pour abrégé, l'on exprime par k & k' les deux valeurs de k que fournit l'équation algébrique

$$Ak^2 - Bk + C = 0,$$

la première de ces deux équations donnera les deux solutions suivantes :

$$dy - k dx = 0,$$

$$dy - k' dx = 0,$$

dont les intégrales seront

$$y - kx = a,$$

$$y - k'x = a';$$

& l'on voit d'abord que les deux quantités qui seront sous les deux fonctions arbitraires de l'intégrale finie, seront

$$y - kx \text{ \& } y - k'x.$$

Actuellement, si l'on emploie la première de ces solutions, & qu'on l'introduise dans l'autre équation aux différences ordinaires, elle deviendra

$$Ak dp + C dq + D k dx = 0,$$

dont l'intégrale est

$$Ak p + C q + D k x = b;$$

donc une des intégrales premières de la proposée, est

$$Ak p + C q + D k x = \varphi'(y - kx).$$

En employant la seconde solution, au lieu de la première, on auroit eu pour autre intégrale

$$Ak'p + Cq + Dk'x = \psi'(y - k'x).$$

Chacune de ces intégrales premières étant linéaire, on peut encore l'intégrer par le procédé de l'article III; en

effet, les deux équations aux différences ordinaires, que l'on obtient, sont

$$Akdz - Cdx = 0;$$

$$Akdz + Dkxdx - \phi'(y - kx)dx = 0;$$

l'intégrale de la première, à cause de $kK = \frac{C}{A}$, est

$$y - Kx = a';$$

la seconde, en éliminant y , devient

$$Akdz + Dkxdx - \phi'\{a' + x(K - k)\}dx = 0,$$

dont l'intégrale est

$$Akdz + \frac{1}{2}Dkx^2 - \phi\{a' + x(K + k)\} = b.$$

Enfin faisant $b = \phi a'$, & mettant pour a' la valeur, on trouve pour intégrale complète de la proposée

$$Az + \frac{1}{2}Dx^2 = \phi(y - kx) + \psi(y - Kx).$$

XIII.

EXEMPLE II. Soit proposée l'équation

$$q^2r - 2pqs + p^2t = 0,$$

qui est celle des surfaces engendrées par une droite qui se meut d'une manière quelconque, mais toujours parallèlement au plan des x & y . Les équations aux différences ordinaires sont, pour ce cas,

$$q^2dy^2 + 2pqdx dy + p^2dx^2 = 0,$$

$$q^2dpdy + p^2dydx = 0;$$

la première donne $(qdy + pdx)^2 = 0$, ou $dz^2 = 0$, ou $z = a$; & parce que les deux racines de cette équation sont égales, il s'ensuit que les deux fonctions qui compléteront l'intégrale finie, seront composées de la même quantité z .

Quant à la seconde, puisqu'on a par la première

$$qdy + pdx = 0,$$

elle devient

$$pdq - qdp = 0,$$

R ij

132 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
dont l'intégrale est

$$q = bp;$$

donc l'intégrale première de la proposée, est

$$q = p\phi z,$$

ce qu'on savoit déjà.

En suivant le procédé de l'article III, pour arriver à l'intégrale finie, les deux équations aux différences ordinaires, sont

$$dz = 0,$$

$$dx + dy\phi z = 0;$$

l'intégrale de la première est $z = a$, comme ci-dessus; et de la seconde, puisque z est constant, est $x + y\phi z =$ donc l'intégrale finie de la proposée est

$$x + y\phi z = \psi z,$$

ce qu'on savoit encore.

X I V.

Ces deux exemples prouvent suffisamment que qu'on trouve parmi les quatre équations aux différences ordinaires l'article VIII, il s'en trouvera deux immédiatement intégrables, ou que quand on en pourra composer deux autres qui seront intégrables & qui tiendront lieu de deux premières, on aura toujours au moins l'intégrale première de la proposée. Mais pour exprimer analytiquement cette intégrale, il n'est pas même nécessaire que les équations aux différences ordinaires, soient toutes deux actuellement intégrables; il suffira souvent qu'il y en ait une, comme on va le voir dans l'exemple suivant qui nous a été proposé comme devant se refuser à cette méthode.

X V.

EXEMPLE III. Posons qu'il faille intégrer l'équa

$$r - t - \frac{2p}{x} = 0,$$

dont l'intégrale finie, trouvée par M. Euler, est

$$z = \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x+y) - x\varphi'(x+y) \\ + \psi(x-y) - x\psi'(x-y), \end{array} \right.$$

& dont les Géomètres ont coutume de dire qu'elle n'a point d'intégrale première.

Les équations aux différences ordinaires que la méthode donne pour ce cas, sont

$$\begin{aligned} dx^2 - dy^2 &= 0, \\ dpdy - dqdx &= \frac{2pdx dy}{x}; \end{aligned}$$

la première a deux racines inégales, $dx + dy = 0$, & $dx - dy = 0$, dont les intégrales complètes sont $x + y = a$, & $x - y = a'$: elle indique donc d'abord que les deux fonctions arbitraires qui complètent l'intégrale finie, sont composées des quantités différentes $(x + y)$, & $(x - y)$.

Prenons ensuite une de ces racines, par exemple, $dx - dy = 0$, l'autre équation devient par-là

$$dp - dq = \frac{2pdx}{x},$$

& c'est cette équation qu'il faudroit intégrer pour arriver à l'intégrale première de la proposée.

On a objecté que cette équation étoit impossible, parce qu'étant à trois variables, elle ne satisfait pas à l'équation de condition, pour l'intégrabilité. Nous répondons que cette équation, considérée seule, n'a pas lieu, & qu'elle est étrangère à la question; elle n'a lieu que conjointement avec l'autre $dx - dy = 0$, & on doit la regarder comme provenant d'une troisième qui auroit été réduite par le moyen de la première $dx - dy = 0$, & dont l'intégrale seroit possible. En effet, on peut ajouter à cette équation la quantité $a(dx - dy)$, qui est nulle, en vertu de l'autre, puis ajouter & retrancher la quantité $k(dx + dy)$, & cette équation devient

$$dp - dq = \left(\frac{p}{x} + k\right) (dx + dy) - k(dx + dy) + \omega(dx - dy),$$

dans laquelle, si une des deux quantités k & ω contient une indéterminée, la substitution de l'équation $dx - dy = 0$ sera faite. L'autre quantité pourra ensuite être déterminée de manière à rendre possible l'intégrale du second membre.

Soient donc $k = \psi''(x - y)$ & $\omega = -2x\psi'''(x - y)$, l'intégrale de cette équation sera alors

$$(A) \quad p - q = \psi'(x - y) - 2x\psi''(x - y) + \int \left[\frac{p}{x} + \psi''(x - y) \right] (dx + dy),$$

& ce sera une des intégrales premières de la proposée, intégrale que les Géomètres ont méconnue.

La quantité qui est sous le signe d'intégration ne pouvant être qu'une fonction de $(x + y)$, il s'ensuit que cette intégrale peut être représentée par le système des deux équations simultanées

$$p - q = \psi'(x - y) - 2x\psi''(x - y) + \phi'(x + y), \\ \phi''(x + y) = \frac{p}{x} + \psi''(x - y),$$

dont l'une est destinée à déterminer la forme de la fonction surabondante.

Au lieu d'employer la racine $dx - dy = 0$, on auroit pu se servir de l'autre $dx + dy = 0$, & en opérant d'une manière analogue on auroit trouvé l'autre intégrale première

$$(B) \quad p + q = \phi'(x + y) - 2x\phi''(x + y) + \int \left[\frac{p}{x} + \phi''(x + y) \right] (dx - dy),$$

que l'on peut de même représenter par le système des équations simultanées

$$p + q = \phi'(x + y) - 2x\phi''(x + y) + \psi'(x - y), \\ \psi''(x - y) = \frac{p}{x} + \phi''(x + y).$$

XVI.

Les deux intégrales premières (A) & (B), que l'on vient de trouver, n'étant pas linéaires, ne peuvent pas être traitées par la méthode dont il s'agit dans ce Mémoire : mais si au lieu de l'une d'elles, on prend les deux équations simultanées qui la représentent, on en tirera pour p & pour q des valeurs qui, substituées dans $dz = p dx + q dy$, donneront une équation aux différences ordinaires, dont l'intégrale sera, en quantités finies, celle de la proposée. Par exemple, les deux équations simultanées qui représentent l'équation (A), donnent

$$p = x [\phi''(x+y) - \psi''(x-y)],$$

$$q = x [\phi''(x+y) - \psi''(x-y)] - \psi'(x-y) + 2x\psi''(x-y) - \phi'(x+y).$$

& par conséquent

$$dz = x\phi''(x+y)(dx+dy) - dy\phi'(x+y) - x\psi''(dx-dy) - dy\psi'(x-y);$$

qui, en ajoutant & retranchant

$$dx\phi'(x+y) + dx\psi'(x-y),$$

devient la différentielle exacte de l'équation

$$z = \left\{ \begin{array}{l} \phi(x+y) - x\phi'(x+y) \\ + \psi(x-y) - x\psi'(x-y) \end{array} \right\}$$

intégrale finie & complète de la proposée.

XVII.

Nous disons que les deux équations (A) & (B) sont les intégrales premières de l'équation aux différences secondes, 1.^o parce qu'elles ne contiennent plus de différences partielles du second ordre, & qu'elles renferment chacune une fonction arbitraire, qui rend leur généralité aussi grande que celle de la proposée; 2.^o parce que c'est à l'une ou à

l'autre de ces deux équations que l'on arrive, lorsqu'a
avoir différencié, aux différences premières, l'intégrale
finie, on élimine ou l'une ou l'autre des deux fonctions
arbitraires & sa différentielle. En effet, si l'on différencie
l'intégrale finie successivement, par rapport à x &
par rapport à y , on a les deux équations

$$p = -x [\phi''(x+y) + \psi''(x-y)]$$

&

$$q = -x [\phi''(x+y) - \psi''(x-y)]$$

+ $\phi'(x+y) - \psi'(x-y)$

qui, prises simultanément, expriment la même chose
l'intégrale finie. Si l'on en élimine ϕ'' on trouve

$$p - q = -\phi'(x+y) + \psi'(x-y) - 2x\psi''(x-y)$$

qui n'est pas la différentielle première que l'on demande.
Il ne suffit pas, pour employer la première des deux équations
simultanées, d'en faire usage pour chasser ϕ'' , il
encore par son moyen chasser ϕ' ; ainsi, la dernière équation
ne tient encore lieu que de l'une des deux précédentes
qui l'ont produite, & il faut la combiner avec une d'elles
pour que leur système représente exactement l'intégrale
finie: or, on ne peut éliminer la fonction ϕ' plus simplement
qu'en prenant sa valeur dans celle de p , où elle est
élevée qu'à un seul ordre de différentielles, ce qui donne

$$\phi'(x+y) = -\int \left[\frac{p}{x} + \psi''(x-y) \right] (dx + dy)$$

& substituant dans la dernière équation, on a, comme
ci-dessus,

$$(A) \quad p - q = \psi'(x-y) - 2x\psi''(x-y) + \int \left[\frac{p}{x} + \psi''(x-y) \right] (dx + dy)$$

équation qui tient lieu seule de l'intégrale finie, en exprimant
la même chose qu'elle, & qui, étant aux différences
partielles.

partielles premières, & contenant d'ailleurs une fonction arbitraire de moins, en est la différentielle première.

En éliminant de la même manière la fonction ψ , on auroit trouvé l'équation (B) , qui est l'autre différentielle première : chacune de ces équations (A) & (B) , différenciée par rapport à x , puis par rapport à y , produit également, par l'élimination de la fonction arbitraire qui reste, l'équation aux différences secondes,

$$r - s - \frac{z^2 p}{x} = 0.$$

XVIII.

On a reproché que ces expressions étoient abusives, & l'on a dit que les deux équations (A) & (B) renfermant des intégrations qui ne sont qu'indiquées, ne peuvent être regardées comme des intégrales actuellement obtenues ; mais l'objet de la question étoit de délivrer les proposées des différences partielles du second ordre, & d'arriver à une équation unique qui exprimât la même chose, & qui ne contiât aucune trace des manières différentes dont p & q peuvent varier ; nous l'avons fait. D'ailleurs, il n'y a aucun Géomètre qui ne regarde l'équation

$$z = \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x + y) - x\varphi'(x + y) \\ + \psi(x - y) - x\psi'(x - y), \end{array} \right.$$

comme l'intégrale finie de la proposée ; cependant cette équation est une véritable différentielle aux différences ordinaires ; on peut la mettre sous la forme suivante :

$$\frac{z}{x^2} =: \left\{ \frac{d \left[\frac{\varphi(x + y) + \psi(x - y)}{x} \right]}{dx} \right\},$$

qui n'est pas simplement équivalente, mais qui est absolument la même, puisqu'il n'y a qu'à exécuter les opérations indiquées dans l'une, pour avoir l'autre. On peut de même écrire les deux intégrales premières (A) & (B) , sous les formes différentielles ordinaires,

$$dp - dq = \frac{p}{s} (dx + dy) - 2x\psi'''(x - y) (dx - dy),$$

$$dp + dq = \frac{p}{s} (dx - dy) - 2x\phi'''(x + y) (dx + dy);$$

& chacune de ces équations sera l'intégrale première de l'équation aux différences secondes, de la même manière que la différentielle précédente en est l'intégrale seconde complète; c'est même parce que ces deux intégrales premières sont exprimées en différentielles ordinaires, ou parce qu'elles comportent une intégration qu'on ne peut qu'indiquer, que l'intégrale finie conserve la forme différentielle.

Nous avons donc donné à nos expressions la valeur que leur donnent tous les autres Géomètres; c'est donc en parlant comme eux, qu'on doit dire que l'équation proposée aux différences secondes partielles, a, de même que toutes celles dont l'intégrale seconde est possible, ses deux intégrales premières, par chacune desquelles on passe également, soit en allant par l'intégration des différences secondes à l'intégrale finie, soit en retournant par la différenciation de celle-ci aux différences secondes.

X I X.

Nous ferons remarquer cependant, que c'est seulement ce qu'exprime l'une ou l'autre des équations (A) & (B), qui est nécessaire: leurs formes ne sont pas uniques, & l'on conçoit qu'en exécutant, au moins en partie, les intégrations indiquées, on peut arriver à des résultats équivalens & de formes différentes.

X X.

La manière dont nous avons trouvé les intégrales premières (A) & (B), *article XV*, supposoit que la forme de l'intégrale finie étoit connue: nous n'avons pas indiqué comment on pouvoit trouver les valeurs de k & de ω , indépendamment de la connoissance de cette forme; nous

allons l'exposer ici pour donner un exemple de conduite dans l'emploi de la méthode dont il s'agit.

Les deux équations simultanées aux différences ordinaires, & qui représentent la proposée, sont, en employant la première racine,

$$\begin{aligned} dx - dy &= 0 \\ dp - dq &= \frac{2p dx}{x}; \end{aligned}$$

le premier membre de la seconde est déjà une différentielle complète, il reste à faire en sorte que l'intégrale du second membre soit possible. Or nous savons que les fonctions arbitraires qui entreront dans l'intégrale finie, seront composées des quantités différentes $x + y = a$, & $x - y = a'$; donc si l'on prend dans ces deux dernières équations les valeurs de x & de dx , ou a , a' & da , pour les substituer dans le second membre de l'équation à intégrer, elle deviendra, à cause de $da' = 0$,

$$dp - dq = \frac{2p}{a + a'} da,$$

équation qui seule ne représente pas encore la proposée, parce qu'il ne suffit pas de faire usage de l'équation $da' = 0$; pour l'employer, il faut de plus introduire une fonction arbitraire de a' ; ainsi la proposée n'est encore représentée que par le système des équations simultanées

$$\begin{aligned} da' &= 0, \\ dp - dq &= \frac{2p}{a + a'} da. \end{aligned}$$

Mais si l'on suppose que la quantité ω contienne une fonction arbitraire de a' , l'équation

$$(a) \quad dp - dq = \frac{2p}{a + a'} da + \omega da'$$

seule, pourra représenter la proposée, & le fera en effet lorsqu'on aura déterminé ω , de manière à ne rien dire de trop général: or, l'intégrale du second membre de cette

équation ne pouvant être qu'une fonction de a & de a' , que nous indiquerons par V , l'intégrale de l'équation sera

$$p - q = V,$$

V devant être telle que l'on ait

$$\frac{dV}{da} = \frac{2p}{a+a'};$$

& ces deux équations simultanées tiendront encore lieu de la proposée, lorsqu'on aura déterminé V , de manière qu'elle n'ait que la généralité nécessaire à cet effet.

Ces deux dernières équations donnent

$$(b) \quad p = \frac{a+a'}{2} \frac{dV}{da},$$

$$(c) \quad q = \frac{a+a'}{2} \frac{dV}{da} - V.$$

Différenciant la première par rapport à x , la seconde par rapport à y , on a, à cause de $da + da' = 2dx$,

$$r = \frac{dV}{da} + \frac{a+a'}{2} \frac{ddV}{dx da},$$

$$t = -\frac{dV}{dy} + \frac{a+a'}{2} \frac{ddV}{dy da}.$$

Substituant ces valeurs dans la proposée $r - t - \frac{2p}{x} = 0$,

on a

$$\frac{a+a'}{2} \left(\frac{ddV}{dx da} - \frac{ddV}{dy da} \right) + \frac{dV}{dy} - \frac{dV}{da} = 0,$$

équation à laquelle V doit satisfaire, pour que les équations (b) & (c), prises simultanément, énoncent la même chose que la proposée.

Si l'on transforme les différences partielles de V , prises par rapport à x & y , en différences prises par rapport à a & a' , cette équation de condition devient

$$(a + a') \frac{ddV}{da da'} - \frac{dV}{da} = 0,$$

dont l'intégrale première est,

$$\frac{dV}{da} = (a + a') \psi''' a' = 2x \psi''' (x - y);$$

or, c'est cette quantité $\frac{dV}{da}$ que nous avons représentée par ω dans l'équation (a); donc en substituant cette valeur, l'équation (a) deviendra

$$dp - dq = \frac{p}{x} (dx + dy) + 2x \psi''' (x - y),$$

qui coïncide avec une de celles de l'article XVIII, & dont l'intégrale, qui est l'équation (A), est une des intégrales premières de la proposée, & énonce seule la même chose qu'elle.

Ou bien intégrant encore l'équation,

$$\frac{dV}{da} = (a + a') \psi''' a',$$

on a

$$V = (a + a') \psi'' a' - \psi' a' + \phi' a,$$

dans laquelle ϕ est une fonction arbitraire, & qui donne, en différenciant par rapport à a ,

$$\frac{dV}{da} = \psi'' a' + \phi'' a.$$

Actuellement que les quantités V & $\frac{dV}{da}$ sont déterminées, si on substitue leurs valeurs dans (b) & (c), on aura

$$p = \frac{a + a'}{2} (\phi'' a + \psi'' a'),$$

$$q = \frac{a + a'}{2} (\phi'' a + \psi'' a') - (a + a') \psi'' a' + \psi' a' - \phi' a,$$

qui, en mettant pour a & a' leurs valeurs, deviennent

$$p = x [\phi'' (x + y) + \psi'' (x - y)],$$

$$q = x [\phi'' (x + y) - \psi'' (x - y)] + \psi' (x - y) - \phi' (x + y);$$

équations qui sont les mêmes que celles de l'article XVI, & qu'on intégrera en quantités finies de la même manière.

X X I.

Nous n'avons tant insisté sur cet exemple, que pour mettre en état de tirer les conclusions suivantes.

1.^o Lorsque des deux équations aux différences ordinaires

$$A \, d \, y^2 - B \, dx \, dy + C \, dx^2 = 0,$$

$$A \, dp \, dy + C \, dq \, dx + D \, dx \, dy = 0,$$

que nous avons données, *article VIII*, & auxquelles on est conduit par la méthode de ce Mémoire, on peut en déduire une autre en dx, dy, dz , intégrable, de manière que les deux solutions de cette intégrale soient

$$V = a, \, V' = a';$$

il n'est pas nécessaire que l'autre équation soit aussi intégrable, ni même qu'elle le devienne en vertu de la précédente, pour que l'on puisse exprimer l'intégrale première de la proposée : cela est nécessaire seulement pour que cette intégrale première soit exprimée par une équation unique, & par conséquent de la forme $U = \phi V, U' = \psi V'$, V & V' étant en x, y, z . Mais, lors même que la seconde équation aux différences ordinaires ne sera pas intégrable, l'intégrale première pourra souvent être représentée, comme dans l'exemple précédent, par le système de deux équations simultanées qu'on pourra encore espérer d'intégrer en quantités finies, mais par d'autres méthodes, parce qu'elles ne seront pas linéaires par rapport à p & à q .

2.^o On ne pourra avoir en x, y, z , les quantités dont doivent être composées les deux fonctions arbitraires de l'intégrale finie, que quand des deux équations aux différences ordinaires il sera possible d'en déduire une autre en dx, dy, dz , qui soit intégrable. Si l'on ne peut former d'équations intégrables qu'en dx, dy, dz, dp, dq , il faudra

en avoir deux pour que les deux intégrales premières puissent être exprimées chacune par une équation unique de la forme

$$U = \phi V,$$

dans laquelle U & V soient toutes deux composées de x, y, z, p, q ; mais, dans ce cas même, il ne sera pas nécessaire d'en avoir deux pour que les intégrales premières soient expressibles analytiquement, & souvent lorsqu'une seule des équations aux différences ordinaires sera intégrable, il sera possible de représenter chacune des intégrales premières par le système de deux équations simultanées, dont l'une sera destinée, dans certains cas, à éliminer une indéterminée, & dans d'autres, à déterminer la forme d'une fonction surabondante. Nous aurons, un peu plus loin, l'occasion d'éclaircir cela par un exemple.

Nous ne nous permettrons plus qu'une seule remarque, qu'il est nécessaire de faire pour ne pas tomber dans de grandes erreurs.

XXII.

Lorsque des deux équations aux différences ordinaires intégrables, & qui sont d'abord toutes deux du second degré, l'une ne s'abaisse pas au premier degré en vertu de l'intégrale de l'autre; leurs intégrales ont chacune deux solutions,

$$\left. \begin{array}{l} V = a \\ V' = a' \end{array} \right\} \text{ pour la première,}$$

$$\left. \begin{array}{l} U = b \\ U' = b' \end{array} \right\} \text{ pour la seconde,}$$

qui donneroient quatre combinaisons, deux à deux, & par conséquent quatre équations qu'on pourroit d'abord regarder comme les intégrales premières de la proposée. De ces quatre équations, il n'y en a que deux qui appartiennent à la proposée, & qui la représentent chacune complètement; les deux autres sont, pour ainsi dire, étrangères à la question,

& l'on n'a de moyen pour distinguer les combinaisons qui conviennent à l'objet, que de différencier & de reconnaître par-là celles qui satisfont à la proposée. Nous en avons déjà donné un exemple dans le Mémoire précédent, ~~sur~~ l'expression analytique de la génération des surfaces courbes, où nous avons fait voir, *articles IX & XV*, que deux surfaces courbes, dont les générations sont très-différentes, & qui n'ont ni les mêmes équations aux différences partielles, ni les mêmes équations en quantités finies, sont cependant toutes deux représentées par le même système de deux équations simultanées aux différences ordinaires du second degré. Cela arrive toutes les fois que la propriété de la surface est qu'il y ait une certaine relation entre deux quantités qui sont les racines inégales d'une même équation algébrique : si, dans cette relation, c'est toujours la même racine qui est employée, on a une première surface; mais si les différentes racines sont mêlées, on a d'autres surfaces très-distinctes, & dont les équations ne sont pas les mêmes. Nous allons en apporter un autre exemple.

X X I I I.

EXEMPLE II. Soit proposé d'intégrer l'équation
 $(D) (1 + q^2)r - 2pq s + (1 + p^2)t = 0,$
 qui est celle de la surface dont l'aire est un *minimum*, & que M. le Chevalier de Borda a publiée dans les Mémoires de l'Académie. Cette équation exprime cette propriété, remarquée par M. Meunier, que les deux rayons de courbure sont par-tout égaux entr'eux & dirigés en sens contraire. En effet, si l'on fait pour abrégér

$$r(1 + q^2) - pqs = \alpha,$$

$$t(1 + p^2) - pqs = \beta,$$

$$s(1 + p^2) - pqr = \gamma,$$

$$s(1 + q^2) - pqt = \delta,$$

$$1 + p^2 + q^2 = k;$$

l'expression

l'expression des deux rayons de courbure d'une surface courbe, donnée par M. Euler, est,

$$R = k^3 \left\{ \frac{-\alpha - \beta + [\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4\gamma\delta}]}{2(\alpha\beta - \gamma\delta)} \right\};$$

or, pour exprimer que les deux rayons de courbure sont égaux entr'eux & de signes contraires, il faut faire

$$\alpha + \beta = 0,$$

ou

$$(1 + q^2)r - 2pq s + (1 + p^2)t = 0,$$

qui est la proposée. Mais pour exprimer que les deux rayons de courbure sont égaux & de mêmes signes, il faut élever à zéro le radical, ce qui donne

$$(E) \quad [(1 + q^2)r - 2pq s + (1 + p^2)t]^2 \\ - 4(rt - s^2)(1 + p^2 + q^2) = 0;$$

équation qui est très-différente de la précédente, & qui cependant sera représentée par le même système d'équations aux différences ordinaires simultanées, comme nous allons le voir.

XXIV.

Si l'on applique à la proposée (D), ce que nous avons dit, *article VIII*, les équations aux différences ordinaires simultanées qui la représenteront, seront

$$(1 + q^2)dy^2 + 2pq dx dy + (1 + p^2)dx^2 = 0, \\ (1 + q^2)dp dy + (1 + p^2)dq dx = 0;$$

& par conséquent

$$(1 + q^2)dp^2 - 2pq dp dq + (1 + p^2)dq^2 = 0.$$

De ces trois équations, deux quelconques comportent la troisième; la dernière s'intègre facilement par le moyen que nous avons donné pour les équations élevées, dans

les Mémoires de l'Académie, année 1783, & son intégrale est

$$(1 + q^2) a^2 - 2apq + 1 + p^2 = 0,$$

a étant la constante arbitraire; ce qui donne les deux solutions suivantes,

$$(F) \quad a = \frac{pq + \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2},$$

$$(G) \quad a' = \frac{pq - \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2}.$$

Cela posé, selon que ce sera l'une ou l'autre de ces deux solutions, que l'on combinera avec une des solutions de l'autre équation, ce sera l'une ou l'autre des deux surfaces dont nous venons de parler, que l'on exprimera. Par exemple, si l'on prend la première équation aux différences ordinaires, qui a de même les deux racines,

$$(H) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-pq + \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2},$$

$$(J) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-pq - \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2},$$

& que l'on combine ensemble celles où les signes du radical sont les mêmes, on aura les deux équations simultanées (F) , (H) , ou (G) , (J) , qui appartiendront à la surface dont l'aire est un *minimum*; elles seront de la même généralité que la proposée (D) , & elles exprimeront ensemble exactement la même chose qu'elle. Mais si l'on combine les solutions où les signes du radical sont différens, chacun des systèmes d'équations simultanées (F) , (J) , ou (G) , (H) , appartiendra à l'autre surface, & représentera exactement l'équation (E) , comme on peut s'en assurer par la différenciation.

X X V.

Il pouvoit donc se faire que l'on prît l'un de ces derniers

systèmes, parce qu'ils présentent des facilités de calcul, & l'on auroit eu les deux équations simultanées

$$(F) \quad a = \frac{pq + \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2},$$

$$(J) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-pq - \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2};$$

de ces deux équations on auroit tiré $dy + a dx = 0$, dont l'intégrale $y + ax = b$ auroit donné, en faisant $b = \phi a$,

$$y + x \left[\frac{pq + \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2} \right] = \phi \left[\frac{pq + \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2} \right],$$

pour intégrale première; & parce que l'équation (F) donne $a q - p = \sqrt{(-1 - a^2)}$, qui, étant elle-même linéaire, s'intègre par notre méthode, & produit $z + x \sqrt{(-1 - a^2)} = \downarrow a$, on auroit pu regarder l'intégrale de la proposée (D), comme étant le résultat de l'élimination de a entre les deux équations

$$y + ax = \phi a,$$

$$z + x \sqrt{(-1 - a^2)} = \downarrow a,$$

ce qui n'auroit pas été vrai. Ce résultat est l'intégrale finie & complète de l'équation (E), & appartient à la surface dont les deux rayons de courbure sont par-tout égaux & dans le même sens. Voilà l'erreur contre laquelle nous avons voulu prémunir, & qu'on peut éviter avant que d'intégrer, en recherchant, par la différenciation, quel est le système d'équations simultanées qui reproduit la proposée.

XXV L

Pour avoir l'intégrale de l'équation (D), il faut donc employer simultanément les solutions dans lesquelles le radical a le même signe, par exemple, les deux équations suivantes;

T ij

$$(F) \quad a = \frac{pq + \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2},$$

$$(H) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-pq + \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2}.$$

Si l'on fait, pour abrégér, $a' = \frac{pq - \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2}$
la dernière équation devient

$$dy + a'dx = 0,$$

dans laquelle a' n'est pas constant, & dont l'intégral peut être représentée que par les deux équations simulta

$$y + a'x = \pi a' + \phi a,$$

$$\pi' a' = x;$$

donc l'intégrale première de l'équation (D), qui appar à la surface dont l'aire est *minimum*, est comprise les deux équations

$$\begin{aligned} y + x \frac{pq - \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2} &= \pi \left\{ \frac{pq - \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2} \right. \\ &\quad \left. + \phi \left\{ \frac{pq + \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. \pi' \left\{ \frac{pq - \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2} \right\} \right\} - x = 0, \end{aligned}$$

dont l'une est destinée à déterminer la forme de la section surabondante.

En prenant le système des deux équations (G), (J) en opérant de la même manière, on auroit eu pour l'intégrale première les deux équations simultanées

$$y + ax = \pi a + \psi a',$$

$$\pi' a = x.$$

Actuellement, pour arriver à l'intégrale finie, il faut

tirer, de ces deux intégrales premières, les valeurs de p & de q , & les substituer dans l'équation

$$dz = p dx + q dy,$$

& l'intégrale de cette équation seroit l'intégrale demandée. Cette opération ne peut pas s'exécuter, mais nous pouvons en faire l'équivalent. En effet, les deux équations (F), (G), donnent

$$(a - a')p = a\sqrt{-1 - a'^2} + a'\sqrt{-1 - a^2},$$

$$(a - a')q = \sqrt{-1 - a'^2} + \sqrt{-1 - a^2},$$

& par conséquent,

$$(a - a')dz = (a dx + dy)\sqrt{-1 - a'^2} + (a' dx + dy)\sqrt{-1 - a^2}.$$

Mais les deux intégrales premières donnent

$$dy + a' dx = \phi' a da,$$

$$dy + a dx = \psi' a' da';$$

donc on a en même temps

$$(a - a') dx = \psi' a' da' - \phi' a da,$$

$$(a - a') dy = a\phi' a da - a'\psi' a' da';$$

$$(a - a') dz = \psi' a' da' \sqrt{-1 - a'^2} + \phi' a da \sqrt{-1 - a^2};$$

donc enfin l'intégrale seconde de l'équation (D), est le résultat de l'élimination des deux indéterminées a & a' , entre les trois équations suivantes,

$$x = \int \frac{\psi' a' da' - \phi' a da}{a - a'},$$

$$y = \int \frac{a\phi' a da - a'\psi' a' da'}{a - a'},$$

$$z = \int \frac{\psi' a' da' \sqrt{-1 - a'^2} + \phi' a da \sqrt{-1 - a^2}}{a - a'};$$

& en effet, si, en différenciant ce système d'équations simultanées, on fait disparaître les deux fonctions arbitraires, & si on élimine les deux indéterminées a & a' , ce qui est alors possible, on reproduit l'équation (D).

X X V I I.

Nous n'abusons pas des termes en disant que le système de ces trois équations simultanées représente l'intégrale seconde de la proposée (D), parce que, dans ce système, il n'est plus question d'aucunes différences partielles, ni du premier ordre, ni du second, & qu'elles sont suppléées par deux fonctions arbitraires. Quant aux intégrations aux différences ordinaires qui restent à faire, & qu'on ne peut qu'indiquer, elles tiennent à la nature des choses, & elles viennent de ce que la génération de la surface que l'on considère est transcendante. Pour éclaircir ce que nous entendons par-là, il faut se rappeler que toute équation aux différences partielles est l'expression de la génération d'une surface courbe, indépendamment des courbes qui servent à cette génération & dont il n'est pas question dans l'équation. Toutes les fois que la génération pourra s'exprimer algébriquement, les fonctions arbitraires entreront d'une manière algébrique dans l'intégrale finie de l'équation aux différences partielles; & les équations particulières des surfaces comprises dans cette génération, ne pourront devenir transcendantes que quand les courbes génératrices, & les fonctions dont ces courbes déterminent la forme, ne seront pas algébriques. Ainsi, par exemple, une surface de révolution ne peut jamais être transcendante, par cela seul qu'elle est de révolution, & elle ne peut le devenir que quand la courbe génératrice n'est pas algébrique. Mais lorsque cette génération sera elle-même transcendante; les fonctions arbitraires entreront aussi d'une manière transcendante dans l'intégrale finie, & il sera impossible d'exprimer cette intégrale autrement que par des différences ordinaires, ou, ce qui revient au même, sans employer

des intégrations indiquées; & les équations particulières des surfaces comprises dans cette génération, ne pourront devenir algébriques que dans les cas très-rares, où les transcendantes introduites par la génération, seront détruites par celles qu'introduiront les courbes génératrices.

XXVIII.

Quoique les intégrales finies des équations des deux surfaces courbes que nous venons de considérer, ne puissent être représentées chacune en particulier que par le système de deux équations simultanées pour la première, & de trois pour la seconde; néanmoins on peut, sans les distinguer, les intégrer par notre méthode, & obtenir une équation unique & finie qui les exprime toutes deux ensemble.

En effet, reprenons les deux équations aux différences ordinaires de l'article XXIV,

$$(1 + q^2) dq^2 + 2pq dx dy + (1 + p^2) dx^2 = 0,$$

$$(1 + q^2) dp^2 - 2pq dp dq + (1 + p^2) dq^2 = 0,$$

qui, prises simultanément, appartiennent à ces deux surfaces. L'intégrale de la seconde, comme nous l'avons déjà dit, est

$$(1 + q^2) a^2 - 2apq + 1 + p^2 = 0.$$

La première peut être mise sous la forme suivante,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0;$$

& son intégrale peut être représentée par

$$\int \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = b,$$

constante arbitraire. Les deux racines de cette équation étant égales, on peut déjà conclure que les deux fonctions qui compléteront l'intégrale finie seront composées de la même quantité b . Donc en faisant $a = \phi b$, l'intégrale première sera

$$(1 + q^2) [\phi \int \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}]^2 - 2pq \phi \int \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} + 1 + p^2 = 0.$$

Actuellement, pour intégrer encore une fois cette équation, nous conservons la quantité a , pour abrégé, & nous la mettons sous cette forme,

$$aq - p = \sqrt{(-1 - a^2)},$$

qui, étant linéaire, se traite par la méthode de l'article III, & donne pour équation aux différences ordinaires,

$$dz + dx\sqrt{(-1 - a^2)} = 0,$$

$$dy + a dx = 0,$$

$$adz - dy\sqrt{(-1 - a^2)} = 0.$$

Si de deux de ces trois équations on élimine la quantité a , on aura encore

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0,$$

qui tiendra lieu d'une d'entr'elles; & si on combine cette dernière avec une des autres, par exemple, avec la seconde, ces deux équations comprendront toute la question.

Or, de ces deux équations, la première donne, comme ci-dessus,

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = b,$$

& l'intégrale de la seconde, puisque a est constante, est $y + ax = c$, constante arbitraire. Donc, l'intégrale en quantités finies, commune aux deux surfaces, est

$$y + ax = \sqrt{b},$$

qui, à cause de $a = \sqrt{b}$, peut être mise sous la forme symétrique

$$y\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} + x\sqrt{ax^2 + dy^2 + dz^2} + 1 = 0.$$

X X I X.

Pour nous assurer que cette équation est l'intégrale commune aux deux surfaces, dont les deux rayons de courbure

courbure sont par-tout égaux entr'eux, sans distinction de sens, il faut faire évanouir les deux fonctions ϕ & ψ , ce qui se fait commodément par le procédé de l'article I.^{er} Pour cela, mettons-la sous la forme

$$y + x\phi = \psi;$$

& nous aurons les deux équations aux différences ordinaires

$$dy + dx\phi = 0,$$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0,$$

ou

$$(1 + q^2)dy^2 + 2pqdx dy + (1 + p^2)dx^2 = 0;$$

& éliminant $\frac{dy}{dx}$ entre la première & la troisième, on aura pour différentielle première

$$(K) (1 + q^2)\phi^2 - 2pq\phi + 1 + p^2 = 0.$$

Le même procédé donnera encore les deux équations aux différences ordinaires

$$(L) q(sdx + tdy)\phi^2 - \left\{ p\phi(sdx + tdy) \right\} + p(rdx + sdy) = 0,$$

$$(M) (1 + q^2)dx^2 + 2pqdx dy + 1 + p^2 = 0;$$

& éliminant les deux quantités ϕ & $\frac{dy}{dx}$ entre les trois équations (K), (L), (M), la résultante sera composée des deux facteurs suivans :

$$(D) (1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0;$$

$$(E) [(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t]^2 - 4(1 + p^2 + q^2)(rt - s^2) = 0.$$

Le premier est la proposée de l'article XXIII, c'est-à-dire, l'équation de la surface, dont les deux rayons de courbure sont par-tout égaux entr'eux, & en sens contraire, ou

dont l'aire est un *minimum* : le second est l'équation de la surface pour laquelle les rayons de courbure sont égaux, & dans le même sens.

Cette distinction nécessaire des racines des équations aux différences ordinaires, n'est pas une suite de la méthode que nous proposons, elle tient à la nature même des choses : il faudroit donc pareillement l'observer dans tout autre procédé d'intégration, & nous ne croyons pas qu'il y en ait qui fournisse pour cela des moyens aussi simples & aussi naturels.

X X X.

On nous a encore proposé d'intégrer l'équation

$$r - t + 2bq = 0,$$

qu'on a coutume de regarder comme n'ayant point d'intégrales premières; nous allons intégrer la suivante,

$$(A) \quad Ar + Bs + Ct + Dp + Eq + F = 0,$$

dont elle est un cas particulier, & dans laquelle tous les coefficients sont supposés constans. Dans ce cas, les équations aux différences ordinaires de l'article VIII, deviennent

$$A dy^2 - B dx dy + C dx^2 = 0,$$

$$A dp dy + C dq dx + dx dy (Dp + Eq + F) = 0.$$

Les racines de la première sont

$$dy - k dx = 0, \text{ \& } dy - k' dx = 0;$$

k & k' étant les racines de l'équation algébrique

$$A k^2 - B k + C = 0.$$

En employant la première racine, la seconde équation devient

$$A(dp + k' dq) + dx(Dp + Eq + F) = 0;$$

& si l'on fait

$$dy - k dx = da, \quad dy - k' dx = dd,$$

ce qui donne $dx = \frac{dd - da}{k - k'}$, & $dy = \frac{kdd - k'da}{k - k'}$;

cette équation, à cause de l'hypothèse $da = 0$, devient

$$A(dp + k'dq) + \frac{d}{k - k'}(Dp + Eq + F) = 0,$$

dont l'intégrale est représentée par le système des deux équations simultanées

$$\begin{aligned} A(p + k'q) + \psi' a &= \phi a, \\ (k - k')\psi'' a &= Dp + Eq + F: \end{aligned}$$

c'est le système de ces deux équations, dont l'une est destinée à déterminer la forme de la fonction surabondante, qui est l'intégrale première complète de la proposée. Actuellement, si de ces deux équations on tire les valeurs de p , & de q , & qu'on les substitue dans $dz = pdx + qdy$, en employant pour dx & dy les valeurs trouvées plus haut; on a en intégrant

$$\left. \begin{aligned} z(Dk - E) - a'F + A(k - k')^2 \psi' a \\ + (Dk - E)\psi' a - (Dk' - E)\phi a \\ + \int[(Dk - E)\phi' a da - (Dk' - E)\psi' a da] \end{aligned} \right\} = 0,$$

qui est l'intégrale complète de l'équation (A).

Il suit de-là, que l'intégrale complète de l'équation $r + 2bq = 0$, est

$$z = \phi a + \psi' a - \frac{2}{b}\psi' a - \int(\phi' a da + \psi' a da),$$

dans laquelle on a fait, pour abrégier,

$$y - x = a, \text{ \& \> } y + x = a'.$$

De l'intégration des équations aux différences partielles linéaires du troisième ordre.

X X X I.

Soit fait pour abrégier

$$dr = \alpha dx + \beta dy, \quad \text{U ij}$$

$$ds = \beta dx + \gamma dy,$$

$$dt = \gamma dx + \epsilon dy,$$

de manière que $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$, soient les quatre différences partielles du troisième ordre; & soit proposé d'intégrer l'équation linéaire générale

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + D\epsilon + E = 0,$$

dans laquelle les coefficients A, B, C, D, E , soient donnés, d'une manière quelconque, en x, y, z, p, q, r, s, t . Si de cette équation & des trois précédentes, on élimine trois des quatre quantités $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$, les trois dernières, par exemple, on aura

$$\left. \begin{aligned} \alpha (A dy^3 - B dy^2 dx + C dy dx^2 - D dx^3) \\ + dy^2 (B dr + C ds + D dt) \\ - dx dy (C dr + D ds) \\ + dx^2 D dr \\ + E dy^3 \end{aligned} \right\} = 0,$$

Cette équation devant avoir lieu indépendamment de α , qui ne peut être déterminé, donne les deux équations aux différences ordinaires

$$\begin{aligned} A dy^3 - B dy^2 dx + C dy dx^2 - D dx^3 &= 0, \\ dy^2 (B dr + C ds + D dt) - dx dy (C dr + D ds) \\ + D dx^2 dr + E dy^3 &= 0. \end{aligned}$$

Cela posé, si ces deux équations sont immédiatement intégrables, ou si on peut en déduire deux autres qui le soient, ou si l'une le devient en vertu de l'intégrale de l'autre. . . &c. & que les deux intégrales soient

$$V = a,$$

$$U = b,$$

a & b étant les constantes arbitraires introduites par intégration, l'intégrale première de la proposée sera

$$V = \varphi U.$$

Nous ne nous permettrons qu'un seul exemple.

XXXII.

Soit proposé d'intégrer l'équation des surfaces engendrées d'une manière quelconque, par le mouvement d'une ligne droite, & qui en faisant, pour abréger,

$$-s + \sqrt{s^2 - rt} = u,$$

$$\text{est } t^2 a + 3t^2 u \beta + 3tu^2 \gamma + u^3 \epsilon = 0;$$

les deux équations aux différences ordinaires de l'article précédent, deviennent, dans ce cas,

$$\begin{aligned} t^2 dy^2 - 3t^2 u dy^2 dx + 3tu^2 dy dx^2 - u^3 dx^3 &= 0, \\ dy^2 (3t^2 dr + 3tuds + u^2 dt) - dx dy (3utdr + u^2 ds) \\ &+ u^2 dx^2 dr = 0. \end{aligned}$$

La première a les trois racines égales,

$$(A) \quad t dy - u dx = 0;$$

& la seconde, en vertu de cette racine, devient

$$(B) \quad u^2 dt + 2utds + t^2 dr = 0:$$

ainsi les deux équations (A) & (B), prises simultanément, renferment toute la question.

Or l'intégrale de (B) est $\frac{u}{t} = a,$

& celle de (A), puisque $\frac{u}{t}$ est constant, est

$$y = ax + b;$$

donc l'intégrale première de la proposée, est

$$y = \frac{u}{t} x + \varphi\left(\frac{u}{t}\right).$$

Cette équation n'est pas linéaire, & cependant on peut

encore la traiter par la méthode de ce Mémoire; car elle exprime que si l'on fait $\frac{u}{t} = \text{constante} = a$, ce qui donne, en mettant pour u sa valeur,

$$r + 2as + a^2t = 0,$$

on a $y = ax + \varphi a,$

Or l'intégrale complète de la première est

$$z = x \downarrow (ax - y) + \pi(ax - y),$$

qui, en vertu de la seconde, devient

$$z = x \downarrow a + \pi a;$$

donc l'intégrale troisième & complète de la proposée, est représentée par le système des deux équations simultanées

$$y = ax + \varphi a,$$

$$z = x \downarrow a + \pi a,$$

c'est-à-dire, qu'elle est le résultat qu'on obtiendrait en éliminant l'indéterminée a entre ces deux équations; ce que nous avons déjà fait voir ailleurs.

X X X I I I.

Si les deux équations aux différences ordinaires avoient toutes deux plusieurs racines inégales, il faudroit les distinguer d'une manière analogue à celle que nous avons employée pour le second ordre.

X X X I V.

Il est facile de voir que le procédé que nous venons de détailler pour les trois premiers ordres, est applicable à tous les ordres supérieurs, & que le raisonnement qui nous a conduit, tant dans la nouvelle manière de différencier, que dans le procédé d'intégration qui en résulte, contient la véritable métaphysique du calcul aux différences partielles.

*De l'intégration des Équations aux différences partielles
linéaires, pour un nombre quelconque de Variables
principales.*

Nous nous contenterons d'exposer la méthode pour le cas des trois variables principales & pour les deux premiers ordres ; il sera facile ensuite de l'appliquer aux autres cas.

X X X V.

Soient u, x, y , les trois variables principales, & z la variable qui en dépend ; soit aussi

$$dz = pdu + qdx + rdy,$$

de manière que les trois différences partielles du premier ordre, soient exprimées par p, q, r . Cela posé, si l'on a l'équation générale linéaire

$$Ap + Bq + Cr + D = 0,$$

dans laquelle les coefficients A, B, C, D soient donnés d'une manière quelconque en u, x, y, z ; au moyen de la valeur de dz , on pourra chasser une des trois quantités p, q, r , ce qui donnera l'une des trois équations

$$Adz + Ddu = q(Adx - Bdu) + r(Ady - Cdu),$$

$$Bdz + Ddx = -p(Adx - Bdu) + r(Bdy - Cdx),$$

$$Cdz + Ddy = -p(Ady - Cdu) - q(Bdy - Cdx).$$

Chacune de ces équations devant avoir lieu indépendamment des valeurs de p, q, r , qui ne doivent pas être déterminées, même l'une d'elles, en une autre seule, il s'ensuit que les coefficients de ces quantités doivent être simultanément égaux à zéro, & qu'on doit avoir en même temps les six équations suivantes :

$$Adz + Ddu = 0,$$

$$Bdz + Ddx = 0,$$

$$Cdz + Ddy = 0,$$

$$A dx - B du = 0,$$

$$B dy - C dx = 0,$$

$$C du - A dy = 0,$$

dont trois quelconques comportent les trois autres.

Actuellement, si de ces six équations, trois quelconques sont intégrables immédiatement, ou si on peut en composer trois autres qui soient intégrables, ou si l'une étant intégrée, deux autres quelconques deviennent intégrables en vertu de l'intégrale de la première, &c. enfin si on peut en tirer d'une manière quelconque trois intégrales complètes,

$$V = a$$

$$U = b$$

$$W = c,$$

qui tiennent lieu de trois d'entr'elles, a, b, c étant les constantes arbitraires introduites par intégration, ces trois intégrales simultanées exprimeront la même chose que la proposée: or elles signifient, non que les quantités V, U, W , sont constantes chacune en particulier, mais que l'une quelconque étant constante, les deux autres le sont nécessairement, ou que l'une est fonction arbitraire des deux autres; donc l'équation

$$V = \phi(U. \& W),$$

exprimera la même chose que la proposée, & sera son intégrale complète.

X X X V I.

Il est facile de voir que l'équation générale linéaire du premier ordre, & pour un nombre quelconque de variables principales, se traitera de la même manière; & par un semblable raisonnement, on trouve que si $a', a'', a''' \dots a^{(m)}$, sont les variables principales en nombre m , & que l'on ait l'équation linéaire

$$A \frac{dz}{da'} + B \frac{dz}{da''} + C \frac{dz}{da'''} \dots + M \frac{dz}{da^{(m)}} + N = 0,$$

dans

dans laquelle les coefficients $A, B, C, \dots M, N$, soient donnés d'une manière quelconque en fonctions de toutes les variables, il faudra poser les m équations suivantes aux différences ordinaires,

$$\begin{aligned} Adz + Nda' &= 0, \\ Bdz + Nda'' &= 0, \\ Cdz + Nda''' &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ Mdz + Nda^{(m)} &= 0. \end{aligned}$$

Cela fait, si toutes ces équations sont immédiatement intégrables, ou si les unes sont intégrables en vertu des intégrales des autres, ou si on peut en déduire d'une manière quelconque un nombre m d'autres équations qui les comportent toutes & qui soient toutes intégrables, & que les constantes arbitraires de toutes ces intégrales soient

$$a, b, c, \dots\dots\dots \mu,$$

l'intégrale complète de la proposée sera

$$a = \varphi(b, c, \dots\dots\dots \mu).$$

XXXVII.

Les variables principales étant encore comme ci-devant u, x, y , soit l'équation linéaire générale aux secondes différences

$$\left. \begin{aligned} &A \frac{ddz}{du^2} + B \frac{ddz}{dx^2} + C \frac{ddz}{dy^2} \\ &+ D \frac{ddz}{dxdy} + E \frac{ddz}{dydu} + F \frac{ddz}{dudx} + G \end{aligned} \right\} = 0,$$

dans laquelle les coefficients sont fonctions des quatre variables & des différences partielles premières; on a d'ailleurs toujours

$$d \cdot \frac{dz}{du} = \frac{ddz}{du^2} du + \frac{ddz}{dudx} dx + \frac{ddz}{dudy} dy,$$

Mém. 1784.

X

$$d. \frac{dz}{dx} = \frac{ddz}{dudx} du + \frac{ddz}{dx^2} dx + \frac{ddz}{dx dy} dy,$$

$$d. \frac{dz}{dy} = \frac{ddz}{dudy} du + \frac{ddz}{dx dy} dx + \frac{ddz}{dy^2} dy.$$

Si l'on substitue dans la proposée, à la place des différences partielles

$$\frac{ddz}{du^2}, \frac{ddz}{dx^2}, \frac{ddz}{dy^2},$$

leurs valeurs prises dans les trois dernières équations, on aura

$$\left. \begin{aligned} & \frac{ddz}{dx dy} (Ddudxdy - Bdudy^2 - Cdudx^2) \\ + & \frac{ddz}{dudy} (Edudxdy - Adxdy^2 - Cdu^2 dx) \\ + & \frac{ddz}{dudx} (Fdudxdy - Adx^2 dy - Bdu^2 dy) \\ + & A dx dy d. \frac{dz}{du} + B du dy d. \frac{dz}{dx} \\ + & Cdudxd. \frac{dz}{dy} + Gdudxdy \end{aligned} \right\} = 0;$$

équation dans laquelle aucune des trois quantités

$$\frac{ddz}{dx dy}, \frac{ddz}{dudy}, \frac{ddz}{dudx},$$

ne doit être déterminée, & qui devant avoir lieu indépendamment des valeurs de ces trois quantités, donne les quatre équations simultanées suivantes,

$$Cdx^2 - Ddxdy + Bdy^2 = 0,$$

$$Ady^2 - Edydu + Cdu^2 = 0,$$

$$Bdu^2 - Fdudx + Adx^2 = 0,$$

$$A dx dy d. \frac{dz}{du} + B du dy d. \frac{dz}{dx}$$

$$+ Cdudxd. \frac{dz}{dy} + Gdudxdy = 0.$$

De ces quatre équations, les trois premières étant entre les deux quantités

$$\frac{d u}{d y} \quad \& \quad \frac{d u}{d x},$$

ne peuvent avoir lieu elles-mêmes, à moins que l'équation de condition suivante ne soit satisfaite,

$$AD^2 + BE^2 + CF^2 = 4ABC + DEF.$$

Donc, 1.^o la proposée n'est intégrable que lorsque les coefficients satisfont à cette condition; 2.^o ces quatre équations aux différences ordinaires n'en représentent réellement que trois, à cause de l'équation de condition.

Actuellement, si de ces quatre équations, la dernière & deux des autres sont intégrables immédiatement, ou si on peut en déduire d'une manière quelconque trois autres qui soient intégrables & qui en comportent trois en y comprenant toujours la dernière, & que les constantes arbitraires qui compléteront ces intégrales soient a, b, c ; une des intégrales premières de la proposée sera,

$$a = \varphi(b, c).$$

XXXVII.

En raisonnant de même, on trouvera les équations aux différences ordinaires, dont les intégrales donneront celles des équations aux différences partielles des ordres supérieurs; mais on trouvera aussi que le nombre des conditions auxquelles les coefficients doivent satisfaire pour que l'équation soit intégrable, est toujours moindre d'une unité que l'ordre des différentielles, dans les cas de trois variables principales.

Nous n'entrerons pas, à cet égard, dans de plus grands détails, & nous terminerons cet article en répétant encore que les équations simultanées aux différences ordinaires sont ensemble de la même généralité que l'équation aux différences partielles. Le travail de l'intégration ne consiste

donc plus, lorsqu'elle est possible, qu'à transformer ces équations en d'autres qui les comportent toutes & qui soient intégrables.

De l'intégration des Équations aux différences partielles élevées.

L'intégration des équations aux différences partielles élevées ayant une très-grande analogie avec celles des équations aux différences ordinaires qui ne sont pas linéaires, nous allons répéter ici, d'une manière un peu plus générale, ce que nous avons dit sur ce dernier objet, dans un Mémoire imprimé dans le volume de l'Académie, de 1782.

Si dans une équation algébrique quelconque, délivrée de radicaux & de diviseurs, les coefficients A, B, C, D, \dots &c. des différens termes sont indépendans les uns des autres, c'est-à-dire, s'ils sont regardés comme donnés immédiatement; qu'ensuite on différencie cette équation un certain nombre de fois, & qu'après chaque différenciation on élimine une des constantes A, B, C, D, \dots &c. l'équation différentielle à laquelle on arrivera, sera toujours linéaire par rapport aux plus hautes différences. Par exemple, si l'on a l'équation

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1,$$

& qu'on la différencie trois fois de suite, ce qui donnera, en faisant $ddx = 0$,

$$2Ax dx + B(xdy + ydx) + 2Cyy = 0,$$

$$2A dx^2 + B(xddy + 2dxdy)$$

$$+ 2C(dy^2 + yddy) = 0,$$

$$B(xd^2y + 3dxdy) + 2C(3dyddy + yd^3y) = 0;$$

suivant qu'on éliminera entre la proposée & la première différentielle, l'une des trois constantes A, B, C , on aura

une des trois différentielles premières, dans chacune desquelles les différences dx , dy , seront linéaires; parce que dans chaque élimination on ne multiplie jamais, les uns par les autres, les termes d'une même équation, & que chaque terme de la seconde ne doit être multiplié que par des termes de la première qui ne contiennent point de différence.

Pareillement, selon qu'on éliminera entre la proposée & les deux premières différentielles, deux quelconques des trois coefficients A , B , C , on aura l'une des trois différentielles secondes, dans chacune desquelles la quantité ddy sera linéaire; parce que dans cette opération on n'aura multiplié chaque terme de la troisième que par des termes pris dans les deux autres, qui ne contiennent point de secondes différences.

Enfin, si on élimine entre les quatre équations, les trois coefficients, l'équation unique à laquelle on sera conduit, contiendra d^3y linéaire, par la même raison.

Mais, si dans la proposée, les coefficients A , B , C , ne sont pas considérés comme donnés immédiatement & qu'ils soient fonctions données d'autres quantités a , b , c , élevées à différentes puissances dans les différens coefficients, lorsque par la différenciation on fera disparaître une des quantités a , b , c , l'équation différentielle ne sera pas linéaire. Par exemple, si l'on avoit

$$(a + b)^2 x^2 + (a - b)^2 y^2 = 1,$$

& si après avoir différencié une première fois, ce qui donneroit

$$(a + b)^2 x dx + (a - b)^2 y dy = 0,$$

on vouloit éliminer ou a ou b , pour avoir l'une des deux différentielles premières; l'équation à laquelle on arriveroit contiendrait dx^2 , dy^2 & $dx dy$, parce que dans l'élimination entre des équations élevées, on multiplie les unes par les autres, des fonctions qui contiennent chacune des termes pris dans les deux équations.

Il suit donc de-là qu'une équation aux différences ordinaires n'est élevée, que parce que la constante arbitraire a fait disparoître par la différenciation, n'étoit pas linéaire dans l'intégrale.

X L.

Actuellement, si l'on différencie une des deux différentielles premières de l'équation précédente, par exemple, celle qui ne contient que b , & qu'on élimine encore cette constante, la différentielle seconde qu'on obtiendra, & qui sera délivrée de deux constantes a & b , sera la même que celle qu'on auroit eue en regardant chacun des coefficients $(a + b)^2$, $(a - b)^2$ de l'intégrale comme indépendant; & par conséquent, dans cette équation, la quantité ddy sera linéaire. On pourra donc trouver, de cette équation, deux intégrales premières différentes, dans chacune desquelles la constante arbitraire sera linéaire; & en éliminant entre ces deux intégrales premières la quantité $\frac{dy}{dx}$, on arrivera à l'équation $Ax^2 + By^2 = 1$. Si l'on veut que cette intégrale, qui contient deux constantes arbitraires, ne soit pas plus générale que la différentielle première qui ne contient que b , il faut substituer dans cette différentielle pour y & pour $\frac{dy}{dx}$, les valeurs que fournit l'intégrale, & déterminer A en B de manière que l'équation résultante soit satisfaite indépendamment de x ,

X L I.

Il suit de-là que si l'on a une équation élevée aux différences ordinaires

$$V = 0,$$

de l'ordre m , & dont l'intégrale soit algébrique, & que l'on différencie successivement une, deux, trois . . . fois cette équation, en faisant évanouir à chaque fois une constante, s'il y en a, ou une variable, s'il n'y a pas de constante, on

arrivera, après un certain nombre n d'opérations, à une équation différentielle linéaire de l'ordre $m + n$. Cette équation aura un nombre $m + n$ d'intégrales premières possibles, dans chacune desquelles la constante arbitraire sera linéaire; si l'on en trouve seulement un nombre m , & qu'entre ce nombre m d'équations & les autres dont le nombre est encore n , on élimine les quantités

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^{m+n-1}y}{dx^{m+n-1}}.$$

on aura en x , y , & constantes arbitraires, l'intégrale finie & complète de la proposée.

Il est facile de voir que la même chose auroit encore lieu, quand même la proposée ne seroit intégrable qu'au moyen des logarithmes & des arcs-de-cercle; en sorte que le procédé que nous venons d'exposer contient la méthode d'intégrer toutes les équations élevées dont les intégrales sont expressibles en quantités finies.

X L I I.

Tout ce que nous venons de dire, peut s'appliquer aux équations aux différences partielles. En effet, lorsque les fonctions arbitraires qui se trouvent dans une équation intégrable sont toutes linéaires, & que les quantités qui entrent sous les fonctions sont toutes données immédiatement, l'équation qu'on obtient en faisant évanouir les fonctions arbitraires, est elle-même toujours linéaire. Mais, 1.^o si les fonctions arbitraires sont élevées à différentes puissances dans les différens termes de l'intégrale; 2.^o si les quantités, sous les fonctions, ne sont données que par d'autres équations dans lesquelles elles se trouvent encore sous des fonctions arbitraires, & que dans ce cas elles ne soient pas linéaires par-tout, l'équation aux différences partielles, qui énonce la même chose que l'intégrale, est toujours élevée. Il y a donc deux espèces d'équations aux différences partielles qui ne sont pas linéaires: les unes ont pour

intégrale finie une équation unique; l'intégrale des autres ne peut être exprimée en quantité finie que par le système de plusieurs équations simultanées, entre lesquelles il faudroit éliminer les indéterminées qui se trouvent sous des fonctions arbitraires. Néanmoins nous ne les distinguerons pas, parce que la méthode que nous allons proposer convient également aux unes & aux autres.

X L I I I.

Des Équations aux différences partielles élevées du premier ordre.

Une équation aux différences partielles n'étant élevée que parce que la fonction arbitraire qu'on a fait évanouir en différenciant son intégrale, ou l'indéterminée qu'on a éliminée, n'étoit pas linéaire; il s'ensuit que si l'on eût regardé les différentes puissances de la fonction, comme des fonctions différentes, ou celles de l'indéterminée, comme d'autres fonctions arbitraires de cette même quantité, en faisant disparaître toutes ces fonctions par des différenciations, on seroit arrivé à une équation dont l'ordre auroit été plus haut, & qui auroit été linéaire. C'est cette équation linéaire qu'il faut retrouver par la différenciation, lorsque cela est possible, pour l'intégrer ensuite par la méthode que nous avons donnée précédemment.

Soit (A) $W = 0$

une équation composée d'une manière quelconque en x, y, z, p, q ; & posons qu'en la différenciant aux différences ordinaires, on ait

$$A dp + B dq + C dx + D dy = 0.$$

Comme la différenciation qui fait disparaître une fonction arbitraire est hypothétique, c'est-à-dire, qu'elle est toujours prise en supposant entre dx & dy , un certain rapport, au moyen

moyen duquel on chasse ensuite $\frac{dy}{dx}$ de l'équation, posons que ce rapport soit tel que l'on ait $Cdx + Ddy = 0$; nous aurons donc les deux équations simultanées

$$Adp + Bdq = 0,$$

$$Cdx + Ddy = 0,$$

entre lesquelles, éliminant la quantité $\frac{dy}{dx}$, on aura

$$(B) \quad ADr + (BD - AC)s - BCt = 0,$$

équation qui doit être regardée comme le résultat de la différenciation de l'équation (A). Actuellement, si, dans cette équation, quelqu'une des constantes qui entrent dans la première, a disparu, elle sera l'équation linéaire dont l'intégrale donnera celle de la proposée, comme nous le ferons voir dans un moment. Mais si l'équation (B) contient encore toutes les constantes de l'équation (A), il faudra en éliminer une; & si le résultat de l'élimination est linéaire par rapport aux différences secondes, ce sera encore l'équation qu'il faudra intégrer: enfin, si par l'élimination d'aucune constante, on n'arrive à un résultat linéaire, il faudra traiter ce résultat par la méthode des équations élevées du second ordre.

Supposons d'abord que dans l'équation (B), quelques-unes des constantes de la proposée, ou quelque variable, s'il n'y a pas de constante, ait disparu. En traitant cette équation par la méthode de l'article VIII, on a les deux équations aux différences ordinaires,

$$ADdy^2 - (BD - AC)dx dy - BCdx^2 = 0,$$

$$ADdpdy - BCdqdx = 0.$$

La première a deux racines, $Cdx + Ddy = 0$, & $Ady - Bdx = 0$; si l'on employoit la première racine, on seroit reconduit à la proposée, tandis que l'objet est de

trouver l'autre intégrale première de l'équation aux différences secondes, ce qu'on ne peut obtenir qu'à l'aide de la seconde racine: ainsi on aura les deux équations simultanées

$$(C) \quad A dy - B dx = 0,$$

$$(D) \quad C dq - D dp = 0.$$

Actuellement, si ces deux équations aux différences ordinaires, que l'on peut encore réduire par l'équation (A), sont intégrables, ou si l'une peut s'intégrer en vertu de l'intégrale de l'autre, ou enfin si on peut en déduire d'une manière quelconque deux autres qui les comportent, & qui soient intégrables, en sorte que leurs intégrales complètes étant

$$V = a,$$

$$U = \varphi a,$$

on puisse, à l'aide de ces deux équations, éliminer p & q de la proposée; le résultat de l'élimination sera en x, y, z, a , l'intégrale complète de la proposée, indépendamment de la valeur de a : donc si on différencie ce résultat en ne faisant varier que a , on aura deux équations simultanées qui comprendront l'intégrale demandée.

X L I V.

Si, en éliminant les quantités p & q , l'indéterminée a disparoît en même temps, l'intégrale complète de la proposée sera une équation unique, dans laquelle la fonction arbitraire sera élevée à différentes puissances dans les différens termes. Nous allons éclaircir ce procédé par des exemples simples.

X L V.

EXEMPLE I. Soit proposé d'intégrer l'équation

$$(ap + q)^2 - ax(ap + q) + a^2z = 0.$$

En différenciant, on a

$$adp + dq = 0,$$

$$dx - ady = 0;$$

par conséquent les équations (C) & (D) deviennent

$$ady - dx = 0,$$

$$adq + dq = 0;$$

donc les intégrales sont

$$ay + x = a$$

$$ap + q = \phi a = \phi(ay - x).$$

Substituant pour $ap + q$, cette valeur dans la proposée, on trouve pour intégrale complète,

$$[\phi(ay - x)]^2 + x\phi(ay - x) + z = 0;$$

dans cette intégrale, l'indéterminée a disparaît en même temps que les différences partielles p & q , parce que la proposée n'est élevée qu'en vertu de la première cause que nous avons rapportée.

X L V I.

EXEMPLE II. Soit proposé d'intégrer

$$a^2(1 + p^2 + q^2) = (z - px - qy)^2,$$

qui est l'équation des surfaces développables circonscrites à la sphère, dont le centre est à l'origine, & dont le rayon est a . En la différenciant aux différences ordinaires, on trouve $C = 0$, $D = 0$, c'est-à-dire, qu'il n'y a pas de termes affectés de dx & de dy , & que cette différentielle se réduit à la forme

$$Mdp + Ndq = 0;$$

d'où l'on tire

$$p = \phi q.$$

Y ij

Substituant cette valeur de p dans la proposée, on a

$$a^2 [1 + q^2 + (\phi q)^2] = (z - x\phi q - qy)^2,$$

qui doit avoir lieu indépendamment de la valeur de q ; donc, si on différencie cette équation, en ne faisant varier que q , ce qui donne

$$a^2 [q + (\phi q)(\phi' q)] - (z - x\phi q - qy)(x\phi' q + y) = 0,$$

on aura deux équations simultanées qui comprendront l'intégrale de la proposée.

X L V I I.

EXEMPLE III. Si l'on avoit eu

$$a^2 + b^2 p^2 + c^2 q^2 = (z - px - qy)^2,$$

a, b, c étant des constantes, on auroit trouvé pareillement $p = \phi q$, & l'intégrale complète auroit été le résultat de l'élimination de q entre les deux équations suivantes,

$$a^2 + b^2 (\phi q)^2 + c^2 q^2 = (z - x\phi q - qy)^2,$$

$$b^2 (\phi q)(\phi' q) + c^2 q - (z - x\phi q - qy)^2 (x\phi' q + y).$$

Cette équation est celle des surfaces développables circonscrites à une surface du second degré, dont le centre est à l'origine, & dont les axes a, b, c sont dirigés suivant ceux des x, y, z .

X L V I I I.

En général, si en représentant par M la quantité $z - px - qy$, on a une équation composée d'une manière quelconque en p, q, M , elle donnera, comme les précédentes, $p = \phi q$, & elle appartiendra par conséquent à une surface développable. Si donc on met partout ϕq à la place de p , dans cette équation, & qu'on la différencie ensuite en regardant q comme seule variable, on aura deux équations simultanées qui comprendront

l'intégrale de la proposée, indépendamment de l'indéterminée q ; il faut en excepter le cas où M disparaîtroit, parce qu'alors cette méthode ne donneroit rien.

X L I X.

EXEMPLE IV. Soit proposée $z^2(1 + p^2 + q^2) = a^2$, dans laquelle a est une constante: en la différenciant aux différences ordinaires, on a

$$A = pz,$$

$$B = qz,$$

$$C = p(1 + p^2 + q^2),$$

$$D = q(1 + p^2 + q^2);$$

par conséquent, les équations (C), (D) de l'article XLIII, deviennent

$$pdy - qdx = 0,$$

$$pdq - qdp = 0.$$

Pour les intégrer, faisons

$$p - Vq = 0,$$

& elles deviendront

$$dp - Vdq = 0,$$

$$dx - Vdy = 0.$$

De ces trois dernières équations, multipliant la première par dz , la seconde par z , & ajoutant les trois ensemble, on a

$$pdz + zdp + dx - V(qdz + zdq + dy) = 0;$$

cette équation devant avoir lieu, indépendamment de l'indéterminée V , que nous avons introduite, donne les deux équations simultanées,

$$pdz + zdp + dx = 0,$$

$$qdz + zdq + dy = 0,$$

qui énoncent la même chose que les deux premières équations aux différences ordinaires simultanées, & dont les intégrales sont

$$p z + x = a,$$

$$q z + y = \phi a.$$

Substituant dans la proposée pour p & q les valeurs que donnent les deux intégrales, on aura

$$(x - a)^2 + (y - \phi a)^2 + z^2 = a^2;$$

& différenciant cette équation, en ne faisant varier que a , ce qui donne

$$x - a + (y - \phi a) \phi' a = 0,$$

on aura deux équations, qui, prises simultanément, comprendront l'intégrale demandée.

De ces deux équations, la première est celle d'une sphère constante de rayon, & dont le centre est sur une courbe tracée dans le plan des x & y , l'équation de cette courbe étant $y = \phi x$; la seconde énonce qu'on ne considère dans chaque sphère que les points dont les coordonnées x, y, z , ne varient point quand a varie; elles expriment donc ensemble que la surface à laquelle elles appartiennent, est l'enveloppe d'une suite de sphères constantes de rayon, & dont les centres sont placés sur une courbe quelconque tracée dans le plan des x & y .

L.

L'hypothèse que nous avons adoptée dans la différenciation de l'article XLIII, & qui consistoit à faire

$$C dx + D dy = 0,$$

& à substituer ensuite dans l'autre équation la valeur de $\frac{dy}{dx}$, que fournit celle-ci, étoit arbitraire, & on peut, au lieu d'elle, employer toutes celles qui, en faisant disparaître une constante, conduisent à une équation aux différences

secondes que l'on sache traiter. Cette considération, qui donne de l'étendue à la méthode que nous proposons, la rend aussi plus vague, & même indéterminée; elle nous a conduit à des résultats qui pourront paroître curieux, & que nous allons exposer.

Si les trois quantités L , M , N , sont données d'une manière quelconque en x , y , z , p , q , mais qu'il y ait entr'elles cette relation que des trois équations suivantes aux différences ordinaires

$$dL = 0,$$

$$dM = 0,$$

$$dN = 0,$$

deux quelconques étant posées, la troisième s'ensuive nécessairement; & que l'on ait une équation aux différences partielles, composée d'une manière quelconque des trois quantités L , M , N , & représentée par

$$F(L, M, N) = 0,$$

dans laquelle la forme de la fonction F soit tout ce qu'on voudra, déterminée, ou arbitraire, algébrique, ou transcendante; en la différenciant aux différences ordinaires, on aura une équation de cette forme,

$$A dL + B dM + C dN = 0.$$

Et si l'on prend pour hypothèse, que l'une de ces trois différentielles soit nulle, on aura, par exemple, les deux équations simultanées

$$A dL + B dM = 0,$$

$$dN = 0,$$

qui signifient que la seconde étant supposée, on a M égale à une fonction de L ; mais par la condition entre ces trois quantités, on a aussi N égale à une fonction des deux autres; on aura donc les trois équations simultanées

$$L = a,$$

$$M = \varphi a,$$

$$N = \psi a:$$

on a d'ailleurs, en vertu de la proposée,

$$F(a, \varphi a, \psi a) = 0.$$

Si donc entre ces quatre équations, on élimine p, q , & une des deux fonctions arbitraires, on aura une équation $V = 0$, en x, y, a , & une fonction arbitraire, qui devra avoir lieu indépendamment de l'indéterminée a , & qui, prise simultanément avec l'équation $\frac{dV}{da} = 0$, comportera l'intégrale complète de la proposée.

L I.

EXEMPLE I. Soit proposée

$$(ax + by + cz - 1)^2(1 + p^2 + q^2) = h^2(c - ap - bq)^2,$$

dans laquelle les coefficients a, b, c, h , sont constants; si l'on fait pour abrégér

$$1 + p^2 + q^2 = k^2,$$

on pourra la mettre sous la forme suivante :

$$a(x + \frac{hp}{k}) + b(y + \frac{hq}{k}) + c(z - \frac{h}{k}) = 1.$$

Or, les trois quantités qui entrent dans cette équation sont telles, que deux des trois équations

$$d(x + \frac{hp}{k}) = 0,$$

$$d(y + \frac{hq}{k}) = 0,$$

$$d(z - \frac{h}{k}) = 0;$$

étant

étant posées, la troisième s'ensuit nécessairement, indépendamment de l'objet de la question : en posant donc

$$x + \frac{hp}{k} = a,$$

$$y + \frac{hq}{k} = \phi a,$$

$$z - \frac{h}{k} = \psi a,$$

ce qui donne en éliminant p & q ,

$$(a) \quad (x - a)^2 + (y - \phi a)^2 + (z - \psi a)^2 = h^2;$$

l'intégrale de la proposée sera le résultat de l'élimination de l'indéterminée a & d'une des deux fonctions arbitraires ϕ ou ψ , entre cette équation & les deux suivantes,

$$(b) \quad aa + b \phi a + c \psi a = 1,$$

$$(c) \quad x - a + (y - \phi a) \phi' a + (z - \psi a) \psi' a = 0.$$

L'élimination actuelle de la fonction surabondante est facile; nous ne la faisons pas, pour laisser au calcul la simplicité: ainsi l'intégrale de la proposée est réellement comportée par le système de deux équations simultanées.

De ces trois équations (a), (b), (c), la première est celle de la surface d'une sphère dont le centre est indéterminé; la seconde énonce que le centre est toujours dans le plan, dont l'équation rapportée à l'origine générale, est

$$ax + by + cz = 1;$$

la troisième exprime qu'on ne considère sur la surface de la sphère que les points dont les coordonnées x, y, z ne varient pas lorsque le paramètre a , qui détermine la position du centre, varie: elles expriment donc ensemble que la surface à laquelle appartient la proposée, est l'enveloppe d'une suite de sphères dont le rayon est h , & dont les centres sont placés sur une courbe quelconque, tracée dans un certain plan donné de position dans l'espace.

L I I.

EXEMPLE II. Si la proposée avoit été

$$\left. \begin{aligned} k^2 [(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + h^2 - g^2]^2 \\ + 4 h^2 [(x-a)p + (y-b)q - (z-c)]^2 \end{aligned} \right\} = 0,$$

dans laquelle a, b, c, h, g sont des constantes, & où l'on a de même

$$x^2 + p^2 + q^2 = k^2,$$

on auroit pu la mettre sous la forme suivante:

$$\left\{ a - \left(x + \frac{hp}{k} \right) \right\}^2 + \left\{ b - \left(y + \frac{hq}{k} \right) \right\}^2 + \left\{ c - \left(z - \frac{h}{k} \right) \right\}^2 = g^2;$$

& en raisonnant comme dans l'exemple précédent, on auroit trouvé que l'intégrale complète de la proposée auroit été comportée par le système des trois équations

$$(x-a)^2 + (y-\phi a)^2 + (z-\psi a)^2 = k^2,$$

$$(a-a)^2 + (b-\phi a)^2 + (c-\psi a)^2 = g^2,$$

$$(x-a) + (y-\phi a)\phi'a + (z-\psi a)\psi'a = 0,$$

qu'il est facile de réduire à deux, par l'élimination actuelle d'une des deux fonctions arbitraires.

De ces trois équations, la première & la troisième sont les mêmes que dans l'exemple précédent; mais la seconde exprime que le centre de la sphère est généralement sur la surface d'une autre sphère, dont le rayon est g , & dont les coordonnées du centre sont a, b, c , dans les sens des x, y, z : donc la proposée appartient à l'enveloppe d'une suite de sphères dont les centres sont placés sur une courbe quelconque, tracée sur la surface d'une autre sphère donnée de rayon & de position.

L I I I.

Quand même la fonction F dans l'équation

$$F(L, M, N) = 0,$$

de l'article L , seroit transcendante, l'intégration dont nous venons de parler ne s'en feroit pas moins de la même manière.

Par exemple, si la proposée étoit

$$z - \frac{h}{k} = a. \text{arc. fin.} \frac{y + \frac{h q}{k}}{(x + \frac{h p}{k})^2 + (y + \frac{h q}{k})^2}$$

son intégrale complète seroit comprise dans les trois équations suivantes :

$$(x - a)^2 + (y - \phi a)^2 + (z - \psi a)^2 = h^2,$$

$$\psi a = a. \text{arc. fin.} \frac{\phi a}{a^2 + (\phi a)^2},$$

$$x - a + (y - \phi a) \phi' a + (z - \psi a) \psi' a = 0,$$

qu'on peut toujours réduire à deux par l'élimination actuelle de la fonction ψ .

De ces trois équations, la seconde énonce que le centre de la sphère doit se trouver sur la surface du filet d'une vis à filet carré, dont l'axe coïncide avec celui des z , & dont le produit de la circonférence de la base, multipliée par la hauteur du pas, est a ; elles expriment donc ensemble que la proposée est l'équation de l'enveloppe d'une suite de sphères de même rayon h , & dont les centres sont placés dans une courbe quelconque, tracée sur la surface que nous venons de définir.

L I V.

En général, les quantités $L, M, N, P, Q \dots$ &c. étant composées chacune d'une manière quelconque en x, y, z, p, q , avec cette condition que deux quelconques des équations suivantes aux différences ordinaires,

$Z \text{ ij}$

$$dL = 0,$$

$$dM = 0,$$

$$dN = 0,$$

$$dP = 0,$$

$$dQ = 0 \dots \dots \&c.$$

étant posées, toutes les autres s'ensuivent nécessairement; si l'on a une équation aux différences partielles, composée d'une manière quelconque des quantités L, M, N, P, Q , & représentée par

$$F(L, M, N, P, Q \dots) = 0,$$

pour l'intégrer, il faudra poser les équations

$$L = a,$$

$$M = \varphi a,$$

$$N = \psi a,$$

$$P = \pi a,$$

$$Q = \omega a \dots \dots \&c.$$

& éliminer entre toutes ces équations, les quantités p & q , ce qui donnera autant d'équations moins une, qu'il y a de fonctions arbitraires $\varphi, \psi, \pi, \omega \dots \dots \&c$, entre lesquelles on aura d'ailleurs, en vertu de la proposée, l'équation

$$F(a, \varphi a, \psi a, \pi a, \omega a \dots) = 0.$$

Cela fait, on éliminera entre toutes ces équations, comprise la dernière, toutes les fonctions arbitraires moins une, & on aura une équation unique

$$V = 0,$$

qui ne contiendra que x, y, z, a & une fonction arbitraire; & en la combinant avec sa différentielle prise en ne faisant venir que a , & qui est

$$\frac{dV}{da} = 0,$$

On aura deux équations qui comprendront l'intégrale de la proposée.

L V.

Lorsque la fonction F , de l'article précédent, sera de forme algébrique, l'élimination des fonctions surabondantes pourra toujours se faire, & l'intégrale complète de la proposée pourra toujours être représentée par le système des deux équations simultanées

$$V = 0,$$

$$\frac{dV}{d\alpha} = 0;$$

mais lorsque cette forme sera transcendante, l'élimination ne sera pas praticable en général, & l'intégrale sera représentée par un système d'équations dont le nombre sera plus grand d'une unité que celui des fonctions qui resteront.

L V I.

Enfin, lors même que la fonction F contiendra des fonctions arbitraires, & que l'équation

$$F(L, M, N, P, Q, \dots \&c.) = 0,$$

sera par conséquent l'intégrale d'une équation d'ordre supérieur, son intégrale finie se trouvera de la même manière. Par exemple :

1.° Si l'on a voit

$$z - \frac{h}{k} = \pi \left[\left(x + \frac{hp}{k} \right)^2 + \left(y + \frac{hq}{k} \right)^2 \right],$$

dans laquelle π est une fonction arbitraire, son intégrale complète seroit le résultat de l'élimination d'une des deux fonctions ϕ ou ψ & de l'indéterminée α , des trois équations suivantes,

$$\begin{aligned}(x - a)^2 + (y - \varphi a)^2 + (z - \psi a)^2 &= h^2, \\ x - a + (y - \varphi a)\varphi'a + (z - \psi a)\psi'a &= 0, \\ \psi a &= \pi[a^2 + (\varphi a)^2];\end{aligned}$$

& elle appartiendrait à l'enveloppe d'une suite de sphères de même rayon, & dont les centres seroient placés dans une courbe quelconque tracée sur une surface quelconque de révolution autour de l'axe de z , sans rien statuer d'ailleurs, ni sur la courbe génératrice de la surface de révolution, ni sur la courbe qui, dans cette surface, doit contenir les centres des sphères.

2.^o Si la proposée étoit le résultat de l'élimination de l'indéterminée β entre les deux équations suivantes,

$$\begin{aligned}z - \frac{h}{k} &= (x + \frac{h p}{k})\pi\beta + (y + \frac{h q}{k})\varpi\beta + \beta, \\ (x + \frac{h p}{k})\pi'\beta + (y + \frac{h q}{k})\varpi'\beta + 1 &= 0,\end{aligned}$$

dans lesquelles les fonctions π & ϖ sont arbitraires; son intégrale seroit le résultat de l'élimination d'une des fonctions φ ou ψ , & des deux indéterminées a , β , entre les quatre équations suivantes,

$$\begin{aligned}(x - a)^2 + (y - \varphi a)^2 + (z - \psi a)^2 &= h^2, \\ x - a + (y - \varphi a)\varphi'a + (z - \psi a)\psi'a &= 0, \\ \psi a &= a \cdot \pi\beta + \varphi a \varpi\beta + \beta, \\ a\pi'\beta + \varphi a \varpi'\beta + 1 &= 0,\end{aligned}$$

qu'on peut facilement réduire à trois par l'élimination actuelle de la fonction ψ ; & elle appartiendrait à l'enveloppe d'une suite de sphères de même rayon, & dont les centres seroient sur une courbe quelconque tracée sur une surface développable quelconque, sans rien statuer d'ailleurs, ni sur la nature de la surface développable, ni sur celle de la courbe qui, dans cette surface, doit contenir les centres des sphères.

Il n'y a aucune équation aux différences partielles du premier ordre, qui ne soit susceptible d'être ramenée à la forme que nous venons de considérer, & qui ne pût s'intégrer par cette dernière méthode, si l'on avoit un procédé pour trouver les quantités $L, M, N, P \dots$ &c. qui toutes sont fonctions de deux d'entr'elles, & qui entrent seules dans la composition de la proposée; mais cette recherche comporte en général des difficultés aussi grandes que celles du calcul intégral des équations aux différences partielles; & ce que nous avons dit depuis l'article L , ne peut être utile que dans des cas très-particuliers. Néanmoins, le nombre de systèmes de quantités L, M, N , qui satisfont à la condition que nous avons énoncée, est infini; nous allons en rapporter quelques-uns des plus simples.

1.^o Les trois quantités

$$L = x + \frac{a^2 p}{\sqrt{a^2 p^2 + b^2 q^2 + c^2}},$$

$$M = y + \frac{b^2 q}{\sqrt{a^2 p^2 + b^2 q^2 + c^2}},$$

$$N = z - \frac{c^2}{\sqrt{a^2 p^2 + b^2 q^2 + c^2}},$$

Sont telles que les différences ordinaires de deux d'entre elles étant égales à zéro, celle de la troisième devient nulle; & si dans tous les exemples que nous avons rapportés on met pour L, M, N , ces nouvelles valeurs, toutes les équations aux différences partielles que l'on aura, n'appartiendront plus à des enveloppes de suites de sphères, mais à des enveloppes de suites de surfaces du second degré, dont les axes sont constans, & toujours parallèles à ceux des coordonnées x, y, z , & dont les centres se meuvent d'une manière indiquée dans chaque cas par la proposée. Ainsi, en faisant, pour abréger,

$$a^2 p^2 + b^2 q^2 + c^2 = k^2,$$

184 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
l'intégrale de l'équation

$$A(x + \frac{a^2 p}{k}) + B(y + \frac{b^2 q}{k}) + C(z - \frac{c^2}{k}) = 1,$$

analogue à celle de l'article *L1*, seroit le résultat de l'élimination d'une des deux fonctions arbitraires ϕ ou ψ , & de l'indéterminée a entre les trois équations suivantes,

$$b^2 c^2 (x-a)^2 + a^2 c^2 (y-\phi a)^2 + a^2 b^2 (z-\psi a)^2 = a^2 b^2 c^2,$$

$$b^2 c^2 (x-a) + a^2 c^2 (y-\phi a) \phi' a + a^2 b^2 (z-\psi a) \psi' a = 0,$$

$$Aa + B\phi a + C\psi a = 1,$$

& appartiendrait à l'enveloppe d'une suite de surfaces du second degré, dont les axes constans a, b, c , seroient toujours parallèles à ceux des coordonnées x, y, z , & dont les centres seroient placés sur une courbe quelconque tracée dans le plan, dont l'équation seroit

$$Ax + By + Cz = 1.$$

2.° En donnant aux quantités L, M, N , les valeurs suivantes,

$$L = \frac{x}{p} (px + qy - z),$$

$$M = \frac{y}{q} (px + qy - z),$$

$$N = -z (px + qy - z),$$

qui sont encore telles que l'on a à la fois

$$dL = 0, dM = 0, dN = 0,$$

toute équation composée de ces trois quantités, est toute intégrée par le procédé que nous venons de donner, & elle appartient à l'enveloppe d'une suite de surfaces du second degré, dont les centres sont à l'origine, & dont les axes, dirigés suivant ceux des coordonnées x, y, z , varient de longueur, suivant une loi donnée par la proposée. Ainsi, l'intégrale de l'équation

$$(px + qy - z)(Aqx + Bpy - Cpqz) = pq,$$

qui

qui peut être mise sous la forme

$$AL + BM + CN = 1,$$

est le résultat de l'élimination d'une des deux fonctions ϕ ou ψ , & de l'indéterminée a entre les trois équations

$$\begin{aligned} x^2 \phi a \psi a + y^2 a \psi a + z^2 a \phi a &= a \phi a \psi a, \\ x^2 (\phi a \psi' a + \phi' a \psi a) \\ + y^2 (\psi a + a \psi' a) \\ + z^2 (\phi a + a \phi' a) \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} x^2 \phi a \psi a + y^2 a \psi a + z^2 a \phi a \\ x^2 (\phi a \psi' a + \phi' a \psi a) \\ + y^2 (\psi a + a \psi' a) \\ + z^2 (\phi a + a \phi' a) \end{aligned}} \right\} = \phi a \psi a + a \psi a \phi' a + a \phi a \psi' a, \\ Aa + B\phi a + C\psi a = 1;$$

& elle appartient à l'enveloppe d'une suite de surfaces du second degré, dont les centres sont à l'origine, & dont les axes a, b, c , toujours dirigés suivant ceux des coordonnées x, y, z , varient de grandeur, d'une manière quelconque, en satisfaisant néanmoins à l'équation

$$Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 = 1.$$

L V I I I.

Quant à la manière de trouver *a priori* un système de trois quantités L, M, N , composées en x, y, z, p & q , & telles qu'une quelconque soit fonction des deux autres; si l'on prend une équation quelconque $V = 0$, qui soit en x, y, z , & trois paramètres, & que de cette équation & des deux suivantes,

$$\frac{dV}{dx} = 0,$$

$$\frac{dV}{dy} = 0,$$

on tire les valeurs de ces trois paramètres, ces valeurs satisferont à la condition énoncée, c'est-à-dire, qu'en égalant à zéro les différences ordinaires de deux d'entr'elles, celle de la troisième deviendra nulle, en vertu des premières.

Mém. 1784.

A a

Avant que de quitter cette matière, nous croyons devoir faire remarquer une propriété analogue dans les équations aux différences ordinaires de tous les ordres. Supposons que pour abrégé, on fasse

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{dp}{dx} = q, \quad \frac{dq}{dx} = r \dots \&c.$$

Cela posé, si deux quantités M , N , composées toutes deux en x, y, p , sont telles, que l'une des deux équations suivantes,

$$dM = 0,$$

$$dN = 0,$$

étant posée, l'autre ait lieu nécessairement, & qu'on ait à intégrer une équation aux différences ordinaires du premier ordre, composée d'une manière quelconque en M & N , représentée par

$$F(M, N) = 0,$$

en éliminant p & une des deux constantes arbitraires a, b , entre les trois équations suivantes:

$$M = a,$$

$$N = b,$$

$$F(a, b) = 0,$$

on aura en x, y , & une constante arbitraire, l'intégrale complète de l'équation proposée; car de ces trois équations, les deux premières ayant lieu indépendamment de la nature de la question, elles expriment en général que b est une fonction de a ; & la troisième qui résulte de la proposée, détermine la forme de cette fonction.

EXEMPLE I. L'intégrale de $F[p, (y - px)] = 0$, est le résultat de l'élimination de p & d'une des constantes arbitraires a ou b des trois équations

$$p = a,$$

$$y - px = b,$$

$$F(a, b) = 0,$$

ou, ce qui revient au même, elle est comprise dans les deux équations suivantes :

$$y = ax + b,$$

$$F(a, b) = 0,$$

dont la seconde est destinée à éliminer la constante arbitraire surabondante.

EXEMPLE II. L'une des deux équations

$$d \left[x - \frac{ph}{\sqrt{1+p^2}} \right] = 0,$$

$$d \left[y + \frac{h}{\sqrt{1+p^2}} \right] = 0,$$

étant posée, l'autre s'ensuit nécessairement ; si donc on a une équation aux différences ordinaires de cette forme,

$$F \left[\left(x - \frac{ph}{\sqrt{1+p^2}} \right), \left(y + \frac{h}{\sqrt{1+p^2}} \right) \right] = 0,$$

son intégrale sera le résultat de l'élimination de p & d'une des deux arbitraires a ou b entre les trois équations

$$x - \frac{ph}{\sqrt{1+p^2}} = a,$$

$$y + \frac{h}{\sqrt{1+p^2}} = b,$$

$$F(a, b) = 0;$$

ou parce qu'on peut d'abord éliminer p des deux premières ; l'intégrale sera comprise dans les deux équations

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = h^2,$$

$$F(a, b) = 0.$$

Quant à la manière de trouver *a priori* deux quantités M, N , telles que, posant $dM = 0$, on ait $dN = 0$; si l'on a une équation $V = 0$, qui soit en x, y & deux

paramètres, & que de cette équation & de la suite $dV = 0$, on tire les valeurs de ces deux paramètres ces valeurs satisferont à la condition énoncée.

L X.

Si l'on a trois quantités M, N, P , composées en x, y , & telles, qu'une des trois équations suivantes,

$$dM = 0,$$

$$dN = 0,$$

$$dP = 0,$$

étant posée, les deux autres s'ensuivent nécessairement & qu'il faille intégrer une équation aux différences partielles du second ordre, composée d'une manière quelconque des trois quantités M, N, P , représentée par

$$F(M, N, P) = 0,$$

on éliminera p, q , & une des trois constantes arbitraires a, b, c , des quatre équations

$$M = a,$$

$$N = b,$$

$$P = c,$$

$$F(a, b, c) = 0,$$

& le résultat sera en x, y & deux constantes arbitraires l'intégrale complète & finie de la proposée. En effet ces quatre équations, les trois premières ayant lieu simultanément, quel que soit d'ailleurs l'objet de la question il en résulte généralement, en x, y, a, b, c , une équation, dans laquelle les trois constantes arbitraires indépendantes, & la proposée établit la relation qu'entr'elles ces trois constantes, dans la question dont il s'

EXEMPLE. Les trois quantités

$$M = x - \frac{p^2 + p'^2}{q},$$

$$N = y + \frac{1 + p^2}{q},$$

$$P = \frac{(1+p^2)^3}{q^3},$$

étant telles, que l'on a simultanément $dM = 0$, $dN = 0$, $dP = 0$, il s'ensuit que l'intégrale finie & complète d'une équation aux différences ordinaires du second ordre, représentée par

$$F\left\{x - \frac{p(1+p^2)}{q}, \left[y + \frac{1+p^2}{q}\right], \frac{(1+p^2)^3}{q^3}\right\} = 0,$$

est le résultat de l'élimination de p & de q , & d'une des constantes arbitraires entre les quatre équations

$$x - \frac{p(1+p^2)}{q} = a,$$

$$y + \frac{1+p^2}{q} = b,$$

$$\frac{(1+p^2)^3}{q^3} = c,$$

$$F(a, b, c) = 0;$$

ou parce qu'on peut toujours éliminer p & q des trois premières, elle est le résultat de l'élimination d'une des constantes a, b, c , entre les deux équations

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c,$$

$$F(a, b, c) = 0.$$

L X I.

En général, si l'on a un nombre n de quantités M, N, P, Q, R, \dots &c. composées en x, y, p, q, r, s, \dots &c. jusqu'aux différences de l'ordre $n - 1$ inclusivement, & telles, qu'une des équations suivantes,

$$dM = 0, dN = 0, dP = 0, dQ = 0, dR = 0 \dots \&c.$$

étant posées, les autres s'ensuivent nécessairement, & qu'on ait une équation aux différences ordinaires de l'ordre $n - 1$, composée d'une manière quelconque des quantités M, N, P, Q, R, \dots &c. représentée par

$$F(M, N, P, Q, R, \dots \&c.) = 0;$$

son intégrale finie & complète sera le résultat de l'élimination des $(n - 1)$ quantités p, q, r, s, \dots &c. & d'une

190 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
des constantes arbitraires a, b, c, d, e, \dots &c, entre les
 $n + 1$ équations

$$M = a,$$

$$N = b,$$

$$P = c,$$

$$Q = d,$$

$$R = e,$$

.....

$$F(a, b, c, d, e, \dots \&c.) = 0,$$

& ce résultat sera en x, y & $(n - 1)$ constantes arbitraires.

Nous n'insisterons pas davantage sur cette matière, & nous ne dirons plus qu'un mot des équations aux différences partielles élevées du second ordre.

Des Équations aux différences partielles élevées du second ordre.

L X I I.

Soit $W = 0$ une équation aux différences partielles composée d'une manière quelconque en x, y, z, p, q, r, s, t . Posons qu'en la différenciant aux différences ordinaires, & en faisant

$$dz = p dx + q dy,$$

$$dp = r dx + s dy,$$

$$dq = s dx + t dy,$$

on ait

$$A dr + B ds + C dt + D dx + E dy = 0.$$

Cela posé, si par une certaine hypothèse faite dans cette équation sur la valeur de $\frac{dy}{dx}$, l'équation aux différences partielles du troisième ordre, à laquelle on arrivera, contient une constante de moins, & est linéaire, ou de la forme de celle que l'on sait traiter; on prendra les trois intégrales premières de cette équation, dont l'une sera la

proposée, & toutes les fois que de ces trois intégrales il sera possible d'éliminer en même temps les cinq quantités p, q, r, s, t , le résultat sera l'intégrale finie demandée.

Supposons qu'en faisant

$$(A) Ddx + E dy = 0,$$

ce qui donne

$$(B) A dr + B ds + C dt = 0,$$

on fasse disparaître une constante, ou quelque variable s'il n'y a pas de constante; en substituant dans (B) pour

$\frac{dy}{dx}$ la valeur que donne (A), on aura l'équation aux différences partielles du troisième ordre, & linéaire

$$AE \frac{d^2 z}{dx^2} + (BE - AD) \frac{d^2 z}{dx dy} + (CE - BD) \frac{d^2 z}{dx dy^2} - CD \frac{d^2 z}{dy^2} = 0,$$

qui, traitée par la méthode de l'article XXXI, donne les deux équations aux différences ordinaires

$$(A dy^2 - B dx dy + C dx^2) (D dx + E dy) = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} dr [(BE - AD) dy^2 - (CE - BD) dx dy - CD dx^2] \\ + ds ds [(CE - BD) dy + CD dx] \\ - CD dt dy^2 \end{aligned} \right\} = 0.$$

La première de ces deux équations a deux facteurs rationels; si l'on employoit le second, l'intégrale première que l'on obtiendrait seroit la proposée elle-même, & l'on auroit fait un travail inutile. Ainsi il ne faut faire usage que du premier facteur; mais en vertu de ce facteur, la seconde équation se simplifie, en sorte que les deux équations aux différences ordinaires qui doivent donner les deux autres intégrales de l'équation aux troisièmes différences sont,

$$(C) A dy^2 - B dx dy + C dx^2 = 0,$$

$$(D) A E dy dr + ds (C E dx - A D dy) - C D dx dt = 0.$$

Chacune des racines de l'équation (C), prise simultanément avec l'équation (D), produira une intégrale, & toutes les fois que de ces deux intégrales & de la proposée il sera possible d'éliminer d'une manière quelconque les quantités p, q, r, s, t , on aura l'intégrale finie de la proposée.

L X I I I.

EXEMPLE. Soit proposé d'intégrer

$$2bx(a^2r + 2as + t) + q\sqrt{(a^2r + 2as + t)} - 2ab(ap + q) = 0;$$

en la différenciant aux différences ordinaires, les équations (A) & (B) deviennent

$$a^2dr + 2ads + dt = 0,$$

$$dx - ady = 0,$$

dans lesquelles la constante b a disparu. Les équations (C) & (D) reproduisent encore les mêmes équations aux différences ordinaires, & l'on a en intégrant

$$a^2r + 2as + t = \phi(x - ay);$$

substituant cette valeur dans la proposée, elle devient

$$ap + q = a\phi(x - ay) + 4ab^2x[\phi(x - ay)]^2,$$

qui, étant linéaire, s'intègre facilement, & donne pour intégrale complète & finie

$$z = \psi(x - ay) + x\phi(x - ay)^2 + 2b^2x^2[\phi(x - ay)]^2.$$

Il est facile de faire de semblables raisonnemens pour les équations des ordres supérieurs; mais aussi l'on voit qu'à mesure que l'ordre des équations sera plus élevé, les cas où, par ce procédé, on pourra les intégrer complètement, seront plus rares,



OBSERVATION

OBSERVATION

SUR UN GRAND NOMBRE DE MORSURES

*Faites à une même personne, par un chien enragé,
traitées avec succès.*

Par M. SABATIER.

RIEN ne prouve plus l'incertitude où l'on est encore sur la meilleure manière de traiter les plaies faites par des animaux enragés, que le jugement que la Société royale de Médecine a porté, en 1782, sur les Mémoires qui ont concouru pour le Prix qu'elle avoit proposé à ce sujet : elle a cru devoir en couronner trois, quoique les vues curatives que chacun de leurs auteurs proposé, soient différentes. Il est donc essentiel de fixer l'attention du public, & celle des gens de l'art, sur cet objet important, & de leur faire connoître les faits qui constatent la préférence que l'on doit donner à une méthode sur les autres : celui dont je vais rendre compte, ne me paroît laisser aucun doute sur les avantages de celle que j'ai suivie.

Le 17 Février dernier, un chien destiné à la garde d'une maison isolée, en blessa le Jardinier à la lèvre supérieure, qui fut déchirée de manière à former un lambeau assez considérable. Comme cet animal n'étoit pas méchant, on eut quelque soupçon qu'il pouvoit être malade, & on l'enferma dans le jardin, où on lui descendoit des alimens par une fenêtre. On crut qu'il en avoit usé, & on commença à se rassurer sur ce qu'il répondoit à la voix & venoit chaque fois qu'il étoit appelé. Un jeune homme de vingt-deux ans, grand & robuste, se hasarda, le surlendemain 19 au matin, à entrer dans le jardin avec un plat où il y avoit de la viande, & une terrine pleine

Lu le 13
Novembre
1784.

Mém. 1784.

B b

d'eau. Le chien qu'il appela, vint assez paisiblement, mais quand il aperçut l'eau, il recula de quelques pas, & s'élança sur lui avec impétuosité. Le jeune homme, forcé de se défendre, jeta ce qu'il avoit dans les mains, afin de pouvoir saisir l'animal par le cou, & de s'en rendre maître. Il étoit déjà blessé en plusieurs endroits, & il appeloit des secours que la crainte rendit tardifs. Enfin il parvint à se coucher sur le chien qu'il avoit terrassé, & à le tenir pendant assez long-temps dans cette situation, pour que le maître de la maison, armé d'un couteau de chasse, le tuât sous lui.

Il avoit été mordu aux deux mains, à l'avant-bras & à l'épaule droite, & à la partie supérieure & antérieure de la jambe gauche. En outre, il étoit égratigné en divers endroits & sur-tout au ventre, & il étoit difficile de juger si c'étoit par les dents ou par les griffes de l'animal. Plusieurs des morsures ne portoient que l'empreinte des dents qui avoient pénétré toute l'épaisseur de la peau; mais celles de l'avant-bras & de l'épaule offroient des plaies assez étendues, & celle de la jambe, plus considérable que les autres, avoit au moins un pouce & demi de longueur & de largeur, & une profondeur telle que le tibia, & l'aponévrose qui couvre les muscles de sa partie antérieure & externe, étoient à nu.

Le Jardinier, dont on avoit pansé la plaie à la manière de celle qui résulte du bec-de-lièvre, étoit tranquille; mais le jeune homme & les personnes de la maison, qui prenoient intérêt à lui, ne l'étoient pas. Il demanda à consulter, & je fus prié de le voir le soir du même jour. Je lui dis que pour le mettre en sûreté, il falloit élargir celles de ses blessures qui en avoient besoin, & les cautériser toutes à une assez grande profondeur. Il le desiroit avec empressement; mais il n'étoit pas sûr que le chien fut enragé. L'opération que je me proposois de lui faire, pouvoit avoir des suites fâcheuses, vu le nombre, l'étendue & la profondeur de ses plaies: il pouvoit se faire qu'il

restât estropié. Je ne voulus rien entreprendre que je n'eusse l'aveu d'un parent qu'il avoit à Paris, & qui veilloit sur lui. Cette circonstance me fit différer jusqu'au lendemain vers midi, c'est-à-dire, vingt-sept à vingt-huit heures après l'accident. Les morsures & les plaies étoient au nombre de vingt-cinq, & les égratignures remarquables, au nombre de cinquante. Je n'eus pas besoin d'inspirer du courage au malade, quoique le supplice auquel il alloit être exposé, dût être bien long. Les ouvertures faites par les dents de l'animal, & les égratignures furent incisées en étoile à une profondeur plus ou moins grande; ensuite je cautérisai les premières avec le beurre d'antimoine liquide, dans lequel j'avois trempé des pinceaux de linge roulé sur des brins de bouleau, & je brûlai les secondes, à plusieurs reprises, avec des grosses aiguilles montées sur des alouettes, & rougies à la flamme d'une bougie. Je portai de même le caustique sur tous les points de la surface & des bords des plaies, de manière que la sphère de son activité répondît à la grandeur de leurs dimensions, & il n'y eut d'autre différence à cet égard, si ce n'est que je n'y fis point d'incisions préparatoires, parce qu'elles étoient suffisamment ouvertes. Il me fallut plus de deux heures pour achever ce terrible procédé, dont j'étois plus fatigué que le malade: tant la crainte de la rage avoit fait d'impression sur lui.

Je craignois des accidens relatifs aux plaies; il n'en survint point, & les parties malades n'éprouvèrent qu'un léger gonflement. La suppuration s'établit successivement dans les différentes parties, & les escars se détachèrent; les plaies légères furent guéries en assez peu de temps. Il ne restoit plus que celles dont les dimensions étoient plus grandes. Celles-ci éprouvèrent les mêmes révolutions que les autres, & celle de la jambe, sur-tout, suppura très-long-temps avant de se cicatrifier.

Le 14 Avril suivant, cinquante-cinq jours après la blessure, le Jardinier, qui s'applaudissoit de sa sécurité,

du mal dont il se croyoit menacé, puisque j'ai vu périr, entre mes mains plusieurs personnes mordues par des animaux enragés, auxquelles on l'avoit administré à forte dose.

A quoi donc est-il redevable de sa guérison ? à l'action du caustique & à celle du feu qui ont détruit le virus en même-temps que le tissu des parties qui en étoient imprégnées. Les morsures des animaux enragés peuvent être comparées aux plaies que l'on fait pour insérer le levain de la petite vérole. Il se fait une véritable inoculation, dont on prévient les effets si on cautérise les plaies avant que le virus ait eu le temps de déployer son énergie & de l'exercer sur l'économie animale. La facilité avec laquelle ces sortes de plaies guérissent pour l'ordinaire, & la longueur du temps qui s'écoule avant que les malades en éprouvent les suites, montrent qu'il y reste d'abord sans action ; ce n'est guère qu'entre trente & quarante jours que les malades sont incommodés. Ils commencent pour lors à ressentir un mal-aise, de l'agitation, des insomnies, de légers mouvemens convulsifs, une altération dans les traits du visage, des dégoûts & de l'oppression, symptômes avant-coureurs par où la maladie s'annonce d'une manière particulière. Peut-être le procédé qui m'a si bien réussi, peut-il être employé avec succès jusqu'à cette époque. Le fait que je viens de rapporter, montre du moins qu'on peut tarder vingt-quatre heures & plus sans y avoir recours. Mais, sans les circonstances particulières qui m'ont forcé de différer, j'en aurois fait usage aussi-tôt que j'ai été averti, & je crois prudent de ne pas perdre un instant sans venir au secours des blessés.

Ce cas n'est pas le seul où j'aie employé la cautérisation pour prévenir la rage. En 1775, je fis brûler un cylindre d'amadou sur la plaie d'un Soldat atteint à la poitrine, au-dessous du mamelon gauche, par un coup de croc qu'un chien lui avoit donné ; l'escarre fut profonde, & la séparation fut suivie d'une suppuration qui dura assez

& qui ne pouvoit se persuader que le chien qui les avoit blessés eût été malade, commença à perdre l'appétit; il dina fort peu & ne soupa point. Le lendemain il se plaignit que sa plaie étoit douloureuse, & dit qu'il se sentoit oppressé & qu'il avoit des envies de vomir. On lui demanda s'il étoit altéré, à quoi il répondit qu'il avoit grand soif, mais qu'il ne pouvoit pas boire. Effectivement, il lui fut impossible d'avaler l'eau qu'on lui présenta, quoiqu'il se fût efforcé de la porter à sa bouche. On lui fit prendre avec peine trois grains d'émétique dans quelques cuillerées d'eau, ce qui lui procura des évacuations abondantes, dont il ne reçut aucun soulagement. La suffocation devenoit de plus en plus forte; il y avoit beaucoup d'agitations; le malade, quoique d'une constitution vigoureuse, se soutenoit avec peine quand il s'efforçoit de se lever: son état étoit décidé. On se détermina à le conduire à l'Hôtel-Dieu dans la soirée. L'impression de l'air sur son visage, le mit dans une fureur momentanée, qui se renouvela plusieurs fois pendant la nuit. Il ne put rien avaler de ce qu'on lui présenta, & mourut hydrophobe le lendemain 16, à sept heures du soir.

Le jeune homme que j'ai soigné, jouit encore de la meilleure santé, quoiqu'il y ait bientôt huit mois accomplis qu'il a été blessé; quoique ses plaies aient été au nombre de soixante-quinze; quoique plusieurs de ces plaies, & notamment celles des mains & des poignets, lui aient été faites à nu. & qu'il soit d'une vraisemblance qui approche de la c
& de l'
& infé
aucune
dont le
quoiqu'
de quel
prendre
nation t

il se croyoit menacé, puisque j'ai vu périr, ains plusieurs personnes mordues par des zés, auxquelles on l'avoit administré à forte

c est-il redevable de sa guérison ! à l'action & à celle du feu qui ont détruit le virus en que le tissu des parties qui en étoient im-morsures des animaux enragés peuvent être x plaies que l'on fait pour insérer le levain vérole. Il se fait une véritable inoculation, endra les effets si on cautérise les plaies avant ait eu le temps de déployer son énergie & r l'économie animale. La facilité avec laquelle plaies guérissent pour l'ordinaire, & la lon-ps qui s'écoule avant que les malades en suites, montrent qu'il y reste d'abord sans est guère qu'entre trente & quarante jours es sont incommodés. Ils commencent pour un mal-aise, de l'agitation, des insomnies, uvements convulsifs, une altération dans les e, des dégoûts & de l'oppression, symptômes s par où la maladie s'annonce d'une manière eut-être le procédé qui m'a si bien réussi, nployé avec succès jusqu'à cette époque. Le ns de rapporter, montre du moins qu'on peut quatre heures & plus sans y avoir recours. i circonstances particulières qui m'ont forcé j'en aurois fait usage aussi-tôt que j'ai été crois prudent de ne pas perdre un instant secours des blessés.

t pas le seul où j'aie employé la cautérisation
 la rage. En 1775, je fis brûler un cylindre
 la plaie d'un Soldat atteint à la poitrine,
 gauche, par un coup de croc
 nné; l'escarre fut profonde, &
 'une suppuration qui dura assez

& qui ne pouvoit se persuader que le chien qui les avoit blessés eût été malade, commença à perdre l'appétit; il dina fort peu & ne soupa point. Le lendemain il se plaignit que sa plaie étoit douloureuse, & dit qu'il se sentoit oppressé & qu'il avoit des envies de vomir. On lui demanda s'il étoit altéré, à quoi il répondit qu'il avoit grand soif, mais qu'il ne pouvoit pas boire. Effectivement il lui fut impossible d'avalier l'eau qu'on lui présenta quoiqu'il se fût efforcé de la porter à sa bouche. On fit prendre avec peine trois grains d'émétique dans quelque cuillerées d'eau, ce qui lui procura des évacuations abondantes, dont il ne reçut aucun soulagement. La suffocation devenoit de plus en plus forte; il y avoit beaucoup d'agitations; le malade, quoique d'une constitution vigoureuse, se soutenoit avec peine quand il s'efforçoit de lever: son état étoit décidé. On se détermina à le conduire à l'Hôtel-Dieu dans la soirée. L'impression de l'air sur son visage, le mit dans une fureur momentanée, qui se renouvela plusieurs fois pendant la nuit. Il ne put rien avaler de ce qu'on lui présenta, & mourut hydrophobe, le lendemain 16, à sept heures du soir.

Le jeune homme que j'ai soigné, jouit encore de la meilleure santé, quoiqu'il y ait bientôt huit mois accomplis qu'il a été blessé; quoique ses plaies aient été au nombre de soixante-quinze; quoique plusieurs de ces plaies, & notamment celles des mains & des poignets, lui aient été faites à nu, & qu'il soit d'une vraisemblance qui approche de la certitude, que celles de l'avant-bras, de la jambe & de l'épaule, qui étoient fort grandes, ont été couvertes & infectées de la bave de l'animal; quoique je n'aie pris aucune précaution pour empêcher la contagion, dont le plus grand danger étoit de se communiquer par le contact de quelque chose qui auroit été touché par l'animal; quoique je n'aie pris aucune précaution pour empêcher la contagion, dont le plus grand danger étoit de se communiquer par le contact de quelque chose qui auroit été touché par l'animal;

du mal dont il se croyoit menacé, puisque j'ai vu périr, entre mes mains plusieurs personnes mordues par des animaux enragés, auxquelles on l'avoit administré à forte dose.

A quoi donc est-il redevable de sa guérison ? à l'action du caustique & à celle du feu qui ont détruit le virus en même-temps que le tissu des parties qui en étoient imprégnées. Les morsures des animaux enragés peuvent être comparées aux plaies que l'on fait pour insérer le levain de la petite vérole. Il se fait une véritable inoculation, dont on prévient les effets si on cautérise les plaies avant que le virus ait eu le temps de déployer son énergie & de l'exercer sur l'économie animale. La facilité avec laquelle ces sortes de plaies guérissent pour l'ordinaire, & la longueur du temps qui s'écoule avant que les malades en éprouvent les suites, montrent qu'il y reste d'abord sans action ; ce n'est guère qu'entre trente & quarante jours que les malades sont incommodés. Ils commencent pour lors à ressentir un mal-aise, de l'agitation, des insomnies, de légers mouvemens convulsifs, une altération dans les traits du visage, des dégoûts & de l'oppression, symptômes avant-coureurs par où la maladie s'annonce d'une manière particulière. Peut-être le procédé qui m'a si bien réussi, peut-il être employé avec succès jusqu'à cette époque. Le fait que je viens de rapporter, montre du moins qu'on peut tarder vingt-quatre heures & plus sans y avoir recours. Mais, sans les circonstances particulières qui m'ont forcé de différer, j'en aurois fait usage aussi-tôt que j'ai été averti, & je crois prudent de ne pas perdre un instant sans venir au secours des blessés.

Ce cas n'est pas le seul où j'aie employé la cautérisation pour prévenir la rage. En 1775, je fis brûler un cylindre d'amadou sur la plaie d'un Soldat atteint à la poitrine, dessous du mamelon gauche, par un coup de croc qui lui avoit donné ; l'escarre fut profonde, & d'une suppuration qui dura assez

& qui ne pouvoit se persuader que le chien qui les avoit blessés eût été malade, commença à perdre l'appétit; il dîna fort peu & ne soupa point. Le lendemain il se plaignit que sa plaie étoit douloureuse, & dit qu'il se sentoit oppressé & qu'il avoit des envies de vomir. On lui demanda s'il étoit altéré, à quoi il répondit qu'il avoit grand soif, mais qu'il ne pouvoit pas boire. Effectivement, il lui fut impossible d'avalier l'eau qu'on lui présentait, quoiqu'il se fût efforcé de la porter à sa bouche. On lui fit prendre avec peine trois grains d'émétique dans quelques cuillerées d'eau, ce qui lui procura des évacuations abondantes, dont il ne reçut aucun soulagement. La suffocation devenoit de plus en plus forte; il y avoit beaucoup d'agitations; le malade, quoique d'une constitution vigoureuse, se soutenoit avec peine quand il s'efforçoit de se lever: son état étoit décidé. On se détermina à le conduire à l'Hôtel-Dieu dans la soirée. L'impression de l'air sur son visage, le mit dans une fureur momentanée, qui se renouvela plusieurs fois pendant la nuit. Il ne put rien avaler de ce qu'on lui présenta, & mourut hydrophobe, le lendemain 16, à sept heures du soir.

Le jeune homme que j'ai soigné, jouit encore de la meilleure santé, quoiqu'il y ait bientôt huit mois accomplis qu'il a été blessé; quoique ses plaies aient été au nombre de soixante-quinze; quoique plusieurs de ces plaies, & notamment celles des mains & des poignets, lui aient été faites à nu, & qu'il soit d'une vraisemblance qui approche de la certitude, que celles de l'avant-bras, de la jambe & de l'épaule, qui étoient fort grandes, ont été couvertes & infectées de la bave de l'animal; quoique je n'aie pris aucune précaution pour prolonger la suppuration des plaies dont le plus grand nombre s'est cicatrisé assez promptement; quoiqu'enfin le malade n'ait fait usage intérieurement que de quelques gouttes d'alkali volatil, que je lui ai fait prendre chaque matin, dans la vue de calmer son imagination troublée, plutôt que dans celle de le mettre à l'abri

Du mal dont il se croyoit menacé, puisque j'ai vu périr, entre mes mains plusieurs personnes mordues par des animaux enragés, auxquelles on l'avoit administré à forte dose.

A quoi donc est-il redevable de sa guérison? à l'action du caustique & à celle du feu qui ont détruit le virus en même-temps que le tissu des parties qui en étoient imprégnées. Les morsures des animaux enragés peuvent être comparées aux plaies que l'on fait pour insérer le levain de la petite vérole. Il se fait une véritable inoculation, dont on prévient les effets si on cautérise les plaies avant que le virus ait eu le temps de déployer son énergie & de l'exercer sur l'économie animale. La facilité avec laquelle ces sortes de plaies guérissent pour l'ordinaire, & la longueur du temps qui s'écoule avant que les malades en éprouvent les suites, montrent qu'il y reste d'abord sans action; ce n'est guère qu'entre trente & quarante jours que les malades sont incommodés. Ils commencent pour lors à ressentir un mal-aise, de l'agitation, des insomnies, de légers mouvemens convulsifs, une altération dans les traits du visage, des dégoûts & de l'oppression, symptômes avant-coureurs par où la maladie s'annonce d'une manière particulière. Peut-être le procédé qui m'a si bien réussi, peut-il être employé avec succès jusqu'à cette époque. Le fait que je viens de rapporter, montre du moins qu'on peut tarder vingt-quatre heures & plus sans y avoir recours. Mais, sans les circonstances particulières qui m'ont forcé de différer, j'en aurois fait usage aussi-tôt que j'ai été averti, & je crois prudent de ne pas perdre un instant sans venir au secours des blessés.

Ce cas n'est pas le seul où j'aie employé la cautérisation pour prévenir la rage. En 1775, je fis brûler un cylindre d'amadou sur la plaie d'un Soldat atteint à la poitrine, au-dessous du mamelon gauche, par un coup de croc qu'un chien lui avoit donné; l'escarre fut profonde, & la séparation fut suivie d'une suppuration qui dura assez

& qui ne pouvoit se persuader que le chien qui les avoit blessés eût été malade, commença à perdre l'appétit il dîna fort peu & ne soupa point. Le lendemain il se plaignit que sa plaie étoit douloureuse, & dit qu'il se sentoit oppressé & qu'il avoit des envies de vomir. On lui demanda s'il étoit altéré, à quoi il répondit qu'il avoit grand soif, mais qu'il ne pouvoit pas boire. Effectivement il lui fut impossible d'avalier l'eau qu'on lui présenta quoiqu'il se fût efforcé de la porter à sa bouche. On fit prendre avec peine trois grains d'émétique dans quelque cuillerées d'eau, ce qui lui procura des évacuations abondantes, dont il ne reçut aucun soulagement. La suffocation devenoit de plus en plus forte; il y avoit beaucoup d'agitations; le malade, quoique d'une constitution vigoureuse, se soutenoit avec peine quand il s'efforçoit de lever: son état étoit décidé. On se détermina à le conduire à l'Hôtel-Dieu dans la soirée. L'impression de l'air sur son visage, le mit dans une fureur momentanée, qui se renouvela plusieurs fois pendant la nuit. Il ne put rien avaler de ce qu'on lui présenta, & mourut hydrophobe le lendemain 16, à sept heures du soir.

Le jeune homme que j'ai soigné, jouit encore de meilleure santé, quoiqu'il y ait bientôt huit mois accomplis qu'il a été blessé; quoique ses plaies aient été au nombre de soixante-quinze; quoique plusieurs de ces plaies, et notamment celles des mains & des poignets, lui aient été faites à nu, & qu'il soit d'une vraisemblance qui approche de la certitude, que celles de l'avant-bras, de la jambe & de l'épaule, qui étoient fort grandes, ont été couvertes & infectées de la bave de l'animal; quoique je n'aie pris aucune précaution pour prolonger la suppuration des plaies dont le plus grand nombre s'est cicatrisé assez promptement quoiqu'enfin le malade n'ait fait usage intérieurement que de quelques gouttes d'alkali volatil, que je lui ai fait prendre chaque matin, dans la vue de calmer son imagination troublée, plutôt que dans celle de le mettre à l'alkali.

du mal dont il se croyoit menacé, puisque j'ai vu périr, entre mes mains plusieurs personnes mordues par des animaux enragés, auxquelles on l'avoit administré à forte dose.

A quoi donc est-il redevable de sa guérison? à l'action du caustique & à celle du feu qui ont détruit le virus en même-temps que le tissu des parties qui en étoient imprégnées. Les morsures des animaux enragés peuvent être comparées aux plaies que l'on fait pour insérer le levain de la petite vérole. Il se fait une véritable inoculation, dont on prévient les effets si on cautérise les plaies avant que le virus ait eu le temps de déployer son énergie & de l'exercer sur l'économie animale. La facilité avec laquelle ces sortes de plaies guérissent pour l'ordinaire, & la longueur du temps qui s'écoule avant que les malades en éprouvent les suites, montrent qu'il y reste d'abord sans action; ce n'est guère qu'entre trente & quarante jours que les malades sont incommodés. Ils commencent pour lors à ressentir un mal-aise, de l'agitation, des insomnies, de légers mouvemens convulsifs, une altération dans les traits du visage, des dégoûts & de l'oppression, symptômes avant-coureurs par où la maladie s'annonce d'une manière particulière. Peut-être le procédé qui m'a si bien réussi, peut-il être employé avec succès jusqu'à cette époque. Le fait que je viens de rapporter, montre du moins qu'on peut tarder vingt-quatre heures & plus sans y avoir recours. Mais, sans les circonstances particulières qui m'ont forcé de différer, j'en aurois fait usage aussi-tôt que j'ai été averti, & je crois prudent de ne pas perdre un instant sans venir au secours des blessés.

Ce cas n'est pas le seul où j'aie employé la cautérisation pour prévenir la rage. En 1775, je fis brûler un cylindre d'amadou sur la plaie d'un Soldat atteint à la poitrine, au-dessous du mamelon gauche, par un coup de croc qu'un chien lui avoit donné; l'escarre fut profonde, & la séparation fut suivie d'une suppuration qui dura assez

& qui ne pouvoit se persuader que le chien qui les avoit blessés eût été malade, commença à perdre l'appétit; il dîna fort peu & ne soupa point. Le lendemain il se plaignit que sa plaie étoit douloureuse, & dit qu'il se sentoît oppressé & qu'il avoit des envies de vomir. On lui demanda s'il étoit altéré, à quoi il répondit qu'il avoit grand soif, mais qu'il ne pouvoit pas boire. Effectivement, il lui fut impossible d'avaler l'eau qu'on lui présenta, quoiqu'il se fût efforcé de la porter à sa bouche. On lui fit prendre avec peine trois grains d'émétique dans quelques cuillerées d'eau, ce qui lui procura des évacuations abondantes, dont il ne reçut aucun soulagement. La suffocation devenoit de plus en plus forte; il y avoit beaucoup d'agitations; le malade, quoique d'une constitution vigoureuse, se soutenoit avec peine quand il s'efforçoit de se lever: son état étoit décidé. On se détermina à le conduire à l'Hôtel-Dieu dans la soirée. L'impression de l'air sur son visage, le mit dans une fureur momentanée, qui se renouvela plusieurs fois pendant la nuit. Il ne put rien avaler de ce qu'on lui présenta, & mourut hydrophobe, le lendemain 16, à sept heures du soir.

Le jeune homme que j'ai soigné, jouit encore de la meilleure santé, quoiqu'il y ait bientôt huit mois accomplis qu'il a été blessé; quoique ses plaies aient été au nombre de soixante-quinze; quoique plusieurs de ces plaies, & notamment celles des mains & des poignets, lui aient été faites à nu, & qu'il soit d'une vraisemblance qui approche de la certitude, que celles de l'avant-bras, de la jambe & de l'épaule, qui étoient fort grandes, ont été couvertes & infectées de la bave de l'animal; quoique je n'aie pris aucune précaution pour prolonger la suppuration des plaies, dont le plus grand nombre s'est cicatrisé assez promptement; quoiqu'enfin le malade n'ait fait usage intérieurement que de quelques gouttes d'alkali volatil, que je lui ai laissé prendre chaque matin, dans la vue de calmer son imagination troublée, plutôt que dans celle de le mettre à l'abri

du mal dont il se croyoit menacé, puisque j'ai vu périr, entre mes mains plusieurs personnes mordues par des animaux enragés, auxquelles on l'avoit administré à forte dose.

A quoi donc est-il redevable de sa guérison ? à l'action du caustique & à celle du feu qui ont détruit le virus en même-temps que le tissu des parties qui en étoient imprégnées. Les morsures des animaux enragés peuvent être comparées aux plaies que l'on fait pour insérer le levain de la petite vérole. Il se fait une véritable inoculation, dont on prévient les effets si on cautérise les plaies avant que le virus ait eu le temps de déployer son énergie & de l'exercer sur l'économie animale. La facilité avec laquelle ces sortes de plaies guérissent pour l'ordinaire, & la longueur du temps qui s'écoule avant que les malades en éprouvent les suites, montrent qu'il y reste d'abord sans action ; ce n'est guère qu'entre trente & quarante jours que les malades sont incommodés. Ils commencent pour lors à ressentir un mal-aise, de l'agitation, des insomnies, de légers mouvemens convulsifs, une altération dans les traits du visage, des dégoûts & de l'oppression, symptômes avant-coureurs par où la maladie s'annonce d'une manière particulière. Peut-être le procédé qui m'a si bien réussi, peut-il être employé avec succès jusqu'à cette époque. Le fait que je viens de rapporter, montre du moins qu'on peut tarder vingt-quatre heures & plus sans y avoir recours. Mais, sans les circonstances particulières qui m'ont forcé de différer, j'en aurois fait usage aussi-tôt que j'ai été averti, & je crois prudent de ne pas perdre un instant sans venir au secours des blessés.

Ce cas n'est pas le seul où j'aie employé la cautérisation pour prévenir la rage. En 1775, je fis brûler un cylindre d'amadou sur la plaie d'un Soldat atteint à la poitrine, au-dessous du mamelon gauche, par un coup de croc qu'un chien lui avoit donné ; l'escarre fut profonde, & la séparation fut suivie d'une suppuration qui dura assez

long-temps. Un autre homme, mordu par le même chien en plusieurs endroits de la tête, tomba dans les accidens de l'hydrophobie, cinquante-deux jours après, & mourut en moins de vingt-quatre heures. Cependant celui que j'ai cautérisé n'en a pas eu le moindre ressentiment : je l'ai revu bien portant quatre à cinq ans après sa blessure. Depuis ce temps, j'ai conseillé le même procédé pour un enfant mordu à l'un des avant-bras, près le poignet. Il a guéri, & l'on m'a assuré qu'une autre personne, mordue par le même chien, étoit morte de la rage quelque temps après. Enfin j'ai coupé, en 1780, l'extrémité du pouce de la main droite & celle du doigt indicateur de la main gauche, à un Officier & à un Soldat, blessés tous deux par un même chien, sur l'état duquel il y avoit des doutes bien fondés. Mais il s'en faut de beaucoup que ces observations soient concluantes. Le premier Soldat avoit été blessé à travers la bandoulière de son fournement & à travers ses habits, de sorte que la dent de l'animal avoit pu être essuyée avant qu'elle lui perçât la peau. Je n'ai pas vu périr la personne mordue par le chien qui avoit blessé l'enfant, & la nature de la maladie à laquelle cette personne a succombé ne me paroît pas bien constatée. Enfin il est possible que le chien qui a blessé l'Officier & le dernier Soldat, ne fût pas enragé. Mais toutes les circonstances de l'observation qui fait le sujet de ce Mémoire, se sont passées sous mes yeux, & le chien qui a si fort maltraité le malade à qui j'ai donné des soins, étoit certainement attaqué de la rage, puisque le Jardinier, blessé plus de quarante-huit heures avant lui, est mort avec les symptômes qui caractérisent cette maladie.

Je ne dois pas dissimuler que la cautérisation des plaies faites par des animaux enragés, est un procédé fort connu. Presque tous ceux qui ont écrit sur le traitement de ces sortes de plaies en ont recommandé l'usage, mais comme celui d'un moyen purement auxiliaire, auquel ils n'ont pas attaché toute l'importance qu'il mérite, & sans recom-

mander comme je le fais , de la porter assez loin pour que toutes les particules vénéneuses inoculées soient détruites. Si on excepte M. le Roux , de l'Académie des Sciences , Arts & Belles-Lettres de Dijon , l'un de ceux qui ont partagé le prix de la Société royale de Médecine , dont les idées sont presque entièrement conformes aux miennes , ils ne se sont proposé d'autre but que celui d'obtenir une suppuration qui durât long-temps , & des dégorgemens à la faveur desquels les miasmes virulens pussent être entraînés au dehors ; comme si le mouvement qui s'excite dans les plaies , pouvoit empêcher que les substances qui sont en contact avec elles , pénétrant à l'intérieur. Il y a des exemples de morsures qui ont suppuré avec abondance & qui n'ont point eu de suites. N'est-il pas plus sûr de dénaturer & d'anéantir le virus dont les parties sont infectées , en cauterisant profondément avec des caustiques , en consumant avec le feu , ou en extirpant la partie blessée , lorsqu'on ne peut employer l'un ou l'autre de ces procédés sans de grands inconvéniens , & lorsque le retranchement de cette partie n'emporte pas avec lui le danger de la vie ? Voilà ce que l'insuffisance des remèdes les plus accrédités dont j'avois fait usage sans succès , & sur-tout ce que la réflexion & l'analogie m'avoient fait penser depuis long-temps. Il falloit que des circonstances malheureuses me missent à portée de faire les nouvelles épreuves dont j'avois besoin : j'ai saisi celles qui se sont présentées. Les premières m'avoient laissé des doutes de toute espèce ; la dernière les a totalement dissipés , & je suis enfin convaincu que c'est de la Chirurgie seule que l'on doit attendre des secours vraiment efficaces , contre l'une des plus affreuses maladies qui aient jamais affligé l'humanité.



M É M O I R E
SUR UNE PLANTE DU PÉROU,
Nouvellement connue en France.

Par M. FOUGEROUX DE BONDAROY.

Présenté
 le 17 Déc.
 1784.

LA science de la Botanique est redevable à M. Dombey*, de plusieurs Plantes naturelles au Pérou, qu'il a envoyées au Jardin royal, de la nouvelle Espagne, en fruits ou en graines, & dont plusieurs ont réussi.

C'est M. Dombey, qui, en 1780, adressa à l'Académie la manière de dessécher la pomme de terre ou patate, & de conserver plusieurs années les tubérosités de cette plante, de manière à pouvoir servir d'aliment aux hommes & aux animaux.

Cette même année 1780, M. Dombey envoya à l'Académie & au Jardin du Roi, une graine, sous le nom de *quinoa*, ajoutant les usages qu'on faisoit de cette graine à Lima, & les grands avantages dont elle pouvoit être en France, si nous parvenions à l'y multiplier.

On donna de ces graines à tous les cultivateurs, mais elles n'ont réussi nulle part, il y a même apparence que la graine envoyée avoit été desséchée, & peut-être mondée, contre le gré de M. Dombey.

J'ai semé cette graine de quinoa, & en vain; un seul pied d'une autre plante, qui me sembloit nouvelle pour nous, a levé dans une des terrines; je l'ai cultivée avec le plus grand soin.

Je n'ai pas tardé à me convaincre que cette plante

* Médecin-botaniste du Roi, correspondant de l'Académie des Sciences de Paris, envoyé par Sa Majesté le Roi de France, au Pérou (de retour en France lors de l'impression de ce Mémoire).

n'étoit pas le quinoa , puisqu'on l'a dit de la famille du *chenopodium* , & que la plante nouvelle indiquoit être d'un genre tout différent. Cette nouvelle plante a fleuri la même année qu'elle a été semée ; elle est annuelle , & tous les ans , depuis cette époque , j'obtiens plusieurs pieds des semences recueillies à Denainvilliers ; mais comme cette plante mérite par sa feuille & sa fleur d'être connue , & que nous pourrions la perdre par la réunion de diverses circonstances , puisqu'elle est annuelle , j'ai cru devoir en donner une description particulière , & la consigner dans les volumes de l'Académie.

Je ne crois pas , d'après les recherches que j'ai faites , qu'aucun Botaniste ait décrit cette plante , qui , par les caractères propres aux parties de sa fructification , doit être rangée dans la *didinamie angiospermie* de Linné , ce qui le rapproche beaucoup , comme nous le ferons voir dans la suite , de la famille des bignognes , des *martynia* , &c. Cependant M. de Jussieu , de cette Académie , ayant eu la complaisance de me permettre de visiter l'herbier que M. de Jussieu son oncle a rassemblé au Pérou ; j'y ai trouvé cette plante dessinée au trait , par feu M. Joseph de Jussieu , avec son caractère , tiré de sa fleur & de son fruit , & un exemplaire de la même plante desséchée , avec le lieu où il l'a trouvée , ainsi indiqué ; *Achochillas del monte , camino de canelos*.

Description de la Plante.

Cette plante , au sortir de la terre , porte deux feuilles féminales , opposées , épaisses , non dentelées , dont les nervures ont peu d'apparence , & qui sont ovoïdes , fort échancrées dans leur petit diamètre , à l'extrémité supérieure , ainsi que du côté de leur pédicule : la plante dont nous parlons , court & s'étend de douze à quinze pieds , ses branches sont herbacées , mais elles se soutiennent en s'accrochant à l'aide de ses vrilles qui sont bifurquées &

terminées par des crochets ; c'est ainsi que la plante, en se prolongeant, adhère aisément & fortement à ce qu'elle touche. Elle n'est ligneuse que près de sa racine, les branches & les tiges sont herbacées, & tiennent de la plupart des labiées, en ce que les tiges sont anguleuses & comme quadrangulaires, avec des espèces de séparations ou de renflemens aux endroits d'où sortent les branches latérales, *fig. 1.* De ce renflement de la tige, ou de cette espèce d'articulation, sortent deux branches opposées, ou deux feuilles, & de chaque insertion une vrille ou le pédicule d'une vrille. Il se forme ensuite, à quatre ou cinq pouces de cette première articulation, un second renflement d'où partent deux pédicules qui soutiennent deux nouvelles feuilles ; ainsi de suite. Chacun de ces pédicules qui portent les feuilles, se divise ordinairement en trois autres pédicules plus déliés, & ces trois-ci portent une foliole : ces folioles sont découpées & dentées irrégulièrement. Quelquefois, une ou deux des principales nervures se prolongent & servent à former une quatrième ou une cinquième foliole ; ainsi on doit regarder la feuille comme étant composée de deux folioles opposées & d'une impaire, quoiqu'elle en ait souvent quatre & cinq. La vrille, qui, comme nous l'avons déjà dit, se trouve à l'insertion des branches & des feuilles, est aussi surcomposée ; le pédicule principal de cette vrille se divise ordinairement en trois : elle se roule souvent en spirale déliée, & toujours se termine par deux crochets qui ont beaucoup de force, & qui se brisent plutôt que d'abandonner la partie à laquelle ils adhèrent. Les nervures de chacune de ces folioles, sur-tout la principale & longitudinale, sont très-relevées en dessous & profondes en-dessus ; la couleur de la foliole, est d'un vert assez foncé. Des poils fins & blancs se remarquent sur les pédicules des feuilles & sur les tiges, ils sont sur-tout placés sur les angles ; on voit aussi de ces poils disposés par touffes à l'insertion des articulations. Toutes les branches sont si herbacées ;

& les feuilles si aqueuses, qu'il est difficile de les bien dessécher, & elles se réduisent, entre du papier, à un très-petit volume.

La fleur est disposée en épis de 4 à 5 pouces. Cet épi est terminé par cinq, six & même dix fleurs incomplètes qui n'ont qu'un calice d'une seule pièce, divisé en deux lèvres principales, comme dans le calice des fleurs complètes dont nous allons parler. La principale & la plus grande lèvre du calice de ces fleurs incomplètes, puisqu'elles manquent de corolle, est comme ployée & souvent dentée vers son extrémité supérieure; l'autre est étroite & pointue. Ce calice est coloré d'un rouge très-foncé, jusque vers son fond qui est vert. Les fleurs du reste de l'épi sont composées d'un calice, aussi d'une seule pièce & divisé en deux lèvres principales, comme dans les fleurs incomplètes: l'une de ces lèvres, moins large que dans celles incomplètes, est souvent colorée d'un rouge-foncé, elle est plus grande que la seconde lèvre, & comme creusée un peu en gouttière ou en cueilleron; la seconde lèvre, qui est le plus souvent verte, est plus étroite que celle que nous venons de décrire & un peu pointue. L'ouverture de la corolle se trouve du côté de la plus grande lèvre.

La corolle est composée d'un tuyau d'inégale forme & largeur, sa moindre extrémité est renfermée dans le calice; ce tuyau continue à s'évaser, puis il forme une petite lèvre qui se rabat sur le tuyau, tandis que l'autre partie, qu'on peut considérer comme formant la lèvre supérieure, imite la figure d'un casque, d'une toque ou d'un capuchon très-obtus, ouvert sur le côté qui forme la partie antérieure de la fleur, & cette ouverture est garnie d'un petit rebord qui d'un côté & de l'autre se rabat sur la fleur: toute la corolle est d'une belle couleur bleuâtre très-foncée, qui tire sur le violet.

On voit, en ouvrant la fleur, quatre étamines attachées à la corolle, dont deux sont plus longues que les deux

autres , & quelquefois le filet ou la naissance d'une cinquième étamine. Les antères de chaque étamine sont doubles ; chaque bourse ovale s'ouvre en deux parties qui répandent une poussière fécondante jaune & assez abondamment.

Du fond du calice , part un pistil composé d'un ovaire hérissé dès son jeune âge de petits poils fins , surmonté d'un fil de la longueur du pétale , & terminé par un stigmate aigu : le pédicule propre à la fleur , est peu allongé , & porte à son insertion une *bractée* ou petite feuille peu apparente.

La corolle abandonne le calice , ensuite tombe le calice ; & l'ovaire grossissant , devient un fruit long d'environ deux pouces , hérissé de filets durs , & dont l'extrémité est terminée par un crochet assez semblable par sa forme à ceux des vrilles ; mais celui du fruit a encore plus de force & de résistance.

Si on coupe ce fruit horizontalement , on le voit composé de quatre loges principales , formées par des cloisons qui se prolongent suivant la longueur du fruit : ce fruit , à l'extérieur , & par les pointes dont il est hérissé , a des rapports avec celui du *xanthium* ou *lappa minor* , (bardanne).

Dans chacune de ces loges , il y a des semences appliquées le long de la cloison , & qui par leurs positions se recouvrent en partie les unes les autres : ces semences sont ovales , & entourées d'une membrane mince qui les rend ailées , la membrane est fort échancrée dans la partie postérieure. L'enveloppe hérissée de pointes , forme à ce fruit comme une espèce de brou qui recouvre les quatre loges plus intérieures , où sont disposées les semences , ce qui le divise comme en huit parties ; & par-là , ce fruit se rapproche du *martinia*.

On voit par cette description , que la plante dont il s'agit , doit être placée dans la *didinamie angiospermie* de Linné , qu'elle tient & se rapproche beaucoup de la famille des bignognes par les quatre étamines qui sont adhérentes à la corolle , dont deux sont plus courtes , &

par la naissance d'une cinquième, qui n'est apparente que dans certaines fleurs; par les feuilles qui sont surcomposées comme dans plusieurs espèces de bignognes; par les vrilles encore propres à plusieurs bignognes; enfin par son fruit, les différentes loges qui le partagent, & par les semences ailées qui se recouvrent les unes les autres, & qui sont enfermées dans une gousse, par conséquent par des rapports tirés de ses feuilles, de sa fleur & de son fruit. Mais comme le genre des bignognes est nombreux, que la Nature semble avoir indiqué des divisions, en ayant égard à la différence que présentent leurs feuilles entières ou composées, leurs fleurs dont la corolle est plus ou moins campanulée, & divisée plus ou moins régulièrement, les fruits plus ou moins longs, plus ou moins gros, la quantité des cloisons qui les séparent; enfin, que les fruits des bignognes sont unis ou épineux, on pourroit aisément en faire autant de genres particuliers, sur-tout si on fait attention aux cloisons & au nombre des loges qui divisent les fruits. En se servant de ces différences, ce seroit un moyen aisé pour former des divisions dans ce genre des bignognes déjà nombreux.

Nous croyons voir dans la plante que nous décrivons, un caractère qui lui est propre, puisque sa corolle, au lieu d'être campanulée, est formée en un tuyau long & renflé irrégulièrement, qui se termine, comme dans certaines labiées, par une toque ou capuchon obtus; enfin puisque la cloison à quatre ailes qui sépare son fruit, n'est commune à cette plante avec aucune des espèces de bignognes déjà décrites.

Il convient donc d'en faire un genre particulier. Ayant appris que M. Dombey avoit adressé à M. de Jussieu, des fruits de cette même plante & l'avoit nommée; en respectant les intentions de ce zélé Botaniste, & une personne connue avantageusement des Savans, je nommerai la plante dont il est question,

La Tourretia caule volubili quadrangulari, cyrrhoso, foliis plerumque trifidis, foliolis dentatis, fructu hispido, xanthiâ seu lappâ minori ferè simili. Act. Reg. Par.

*Explication de la Planche qui représente la Tourretia.**Fig. 1.* Les feuilles seminales qui durent & persistent quelque temps.*Fig. 2.* La plante.

a, la feuille avec son pédicule qui se divise en trois folioles, ayant chacune son pédicule; une des dentelures de la foliole qui s'allonge, & forme quatre ou cinq folioles, au lieu de trois.

b, les vrilles qui sont elles-mêmes surcomposées, le crochet qui termine chaque vrille.

c, l'épi de fleurs qui sort souvent de la bifurcation des tiges, & à ces endroits où les tiges de la plante forment un renflement. A l'extrémité supérieure de l'épi de fleurs, il y a souvent cinq ou six fleurs incomplètes,

d, & composées d'un seul calice coloré, sans pétale.

Fig. 3. La fleur avec tous ses détails.

e, le bouton de la fleur.

f, la fleur vue de côté avec son calice.

g, la fleur vue en face.

h, le calice ouvert.

i, le calice dans lequel on voit l'embryon.

k, l'embryon avec son stiel.

l, la corolle ouverte & les quatre étamines.

m, une étamine séparée.

n, le jeune fruit toujours accompagné, dans le jeune âge, de deux stipules ou bractées.

Fig. 4. Le fruit en son état de maturité.*Fig. 5.* Le fruit coupé transversalement où l'on voit les quatre loges formées par les cloisons, & le brou qui les enveloppe.*Fig. 6.* Les graines attachées aux cloisons.

o, la graine séparée & ailée.

p, une de ces pointes ou crochets qui garnissent le dessus du fruit.



M É M O I R E

SUR L'ABRICOTIER DE SIBÉRIE.

Par M. FOUGEROUX DE BONDAROY.

LE travail que j'ai entrepris depuis plus de dix ans, pour donner une nouvelle édition du Traité des arbres & arbustes, publié par M. du Hamel-du-Monceau, en 1755, m'a obligé de revoir en même temps certains arbres fruitiers, & en particulier l'espèce d'abricotier de Sibérie dont je vais parler.

Lû
le 3 Août
1785.

Quoique la séparation entre les abricotiers, amandiers, pêcheurs, & les pruniers, soit difficile à fixer; cependant M. du Hamel, en traitant des abricotiers, les a distingués avec raison des pruniers, puisque, sans changer des dénominations reçues vulgairement, la fleur & les fruits de l'abricotier sont sessiles, l'ovaire & le fruit velus, le noyau ovale, uni, renflé, &c. le temps de la maturité, différent & plus prématuré, sont des caractères suffisans pour les différencier des pruniers.

M. du Hamel, dans son Traité des arbres & arbustes, a donné à l'abricotier de Sibérie, la phrase d'Amman, *armeniaca betula folio & facie, fructu exsucco*; Amman, *Ruth.* & en a parlé dans son Traité des bons fruits, sous le nom d'*abricot noir*; tome I, page 142.

M. Pallas, dans son premier volume, 1.^{re} partie des plantes Russes, donne sous le nom de *prunus Sibirica*, la description & la figure de cet abricotier; il y indique aussi la couleur de son fruit, d'un rouge-noir, & donne tous les détails concernant son bois, la feuille & les fleurs, *tab. VIII, page 15.*

En 1757, M. du Hamel ignoroit d'où lui étoit venu cet arbre qu'il cultivoit; mais d'après la description qu'en

a donnée dernièrement M. Pallas, celles qu'on avoit de Gmelin & d'Amman, je crois ne pouvoir plus douter que son lieu originaire ne soit la Sibérie.

Linné, qui a compris l'abricotier & le pêcher dans le genre des pruniers, regarde avec raison cet arbre de Sibérie, comme devant former une espèce, puisqu'il varie peu par ses semences. Jamais il ne devient un si gros arbre ni si élevé que l'abricotier commun; cependant il pousse des jets longs & grêles, souvent terminés par une pointe dure. Sa feuille est ovale, alongée, & finit par un prolongement très-aigu; elle est dentée finement, d'un vert-foncé en-dessus, soutenue par des pétioles longs, & ressemblant par-là aux feuilles de bouleau auxquelles on l'a comparée avec assez de justice. Les fruits de celui que nous possédons, sont attachés à un très-court pédicule, en quoi il diffère principalement du premier, & ne deviennent pas plus gros qu'une prune de damas: ils sont arrondis, ayant leurs diamètres à peu-près égaux, & de dix-huit lignes environ; l'œil est peu enfoncé. Ce fruit est couvert d'un duvet léger & fin; sa couleur est violette très-foncée, presque noire, & sa chair uniformément pourpre; sa peau & sa chair sont colorées de la même manière du côté du soleil & de la muraille, s'il est en espalier; le noyau est lisse & bombé, figuré en cœur comme celui de l'abricotier, étant plus renflé sur un côté qu'il ne l'est sur l'autre: celui aplati porte une arête principale, & à côté de celle-là deux autres moins marquées; elles sont semblables à ce qu'on remarque sur les noyaux d'abricots: celui de Sibérie en diffère seulement par un sillon qui se voit sur le côté opposé à l'arête, & qui est renflé, par-là il se rapproche de la prune; mais on sait que ce sillon se trouve aussi sur quelques espèces d'abricot, que sur d'autres, c'est un véritable tuyau, dans lequel on peut passer un crin ou fil de laiton fin; que d'ailleurs il manque à quelques espèces de prunes. Quoique ce sillon soit apparent sur toute la longueur du noyau, dans le fruit

que

que nous examinons, on ne peut disconvenir qu'il tient plus, par sa forme, du noyau d'abricot que de celui de la prune: son amande est légèrement amère; il mûrit avec les abricots, à la fin de Juillet ou au commencement d'Août; son eau est sucrée, mais a peu de goût. Amman & Pallas donnent ce fruit comme n'ayant aucune saveur, mais la culture peut avoir corrigé celle naturelle à l'arbre sylvestre: il faut cependant convenir qu'il ne mérite d'être placé dans nos vergers, que par la singulière couleur de son fruit.

Ces descriptions de la feuille & du fruit ayant la plus grande conformité avec celles données par Amman, Gmelin, Linné & Pallas, je crois qu'il n'y a pas lieu de douter que l'arbre que je viens de décrire, ne soit originaire de la Sibérie, & que c'est celui qui y croît dans des lieux montagneux & entre des rochers.

M. Pallas ajoute que « peut-être ce prunier de Sibérie n'est-il qu'une simple variété du prunier-abricotier que le changement de climat & de position a fait dégénérer; » c'est ce que la culture dans les jardins fera connoître par la suite ». Nous avons déjà dit que cet abricotier se régénère par les semences, ainsi ce seroit une espèce; d'ailleurs, ne semble-t-il pas qu'on dût retrouver la première Nature dans les climats & contrées de la Sibérie, où la main de l'homme n'auroit encore produit aucun changement? S'il est assez constant que l'abricotier que nous cultivons, a été transporté de la Perse dans l'Arménie & en Grèce * pourquoi les parties les plus septentrionales de notre globe n'auroient-elles pas aussi une espèce d'abricot? ce qui devient confirmé par le fait que nous venons de rapporter.

J'ajoute ici la synonymie de cet arbre.

Prunus inermis, foliis ovato-cordatis, longè mucronatis, fructibus excussis. Gmelin, flor. Sib. III, pag. 172.

* Voyez le voyage de M. Pockocke, pour l'abricot de damas: & le voyage de M. Omer, pour ceux d'Alep & d'Aintab.

Mém. 1784.

210 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Prunus floribus sessilibus, foliis ovato-oblongis. Linné, syst. II, pag. 486, n.º 8.

Armeniaca betulae folio & facie, fructu exsucco. Amman, Stirp. Ruth. p. 192, n.º 272, tab. xxx. Du Hamel, arb. & arb. tom. I, pag. 74.

Prunus inermis, foliis ovato-cordatis, longè mucronatis, fructibus exsuccis (sessilibus), Pallas, plant. Ros. 1.ª pars, tom. I, pag. 15, tab. VIII.

M É M O I R E

SUR UNE

NOUVELLE ESPÈCE D'ORME.

Par M. FOUGEROUX DE BONDAROY.

PARMI plusieurs grands arbres qui par différentes émigrations garnissent maintenant nos forêts, nos bois & nos plantations, & qu'on a associés avec le chêne qui couvroit uniquement l'ancienne Gaule, nous pouvons citer l'orme comme étant une des acquisitions des plus utiles & qui nous procure le plus de diverses jouissances.

Présenté
le 1.^{er} Sept.
1784.

Nous possédons l'orme depuis long-temps en France; il est indigène dans quelques parties de l'Europe, il se trouve aussi naturellement dans quelque parties de l'Asie; plusieurs variétés semblables aux nôtres sont aussi en Canada & dans l'Amérique septentrionale.

Depuis peu, en France, on cultive une espèce d'orme provenant de la Floride, & elle n'est nullement sensible aux fortes gelées; enfin l'on cultive un orme nain qu'on croit avoir été tiré du Japon, mais celui-là souffre des gelées, & demande des protections contre les froids rigoureux.

M. du Hamel, dans son *Traité des Arbres & Arbustes*, nous donne les phrases de dix ormes, mais dans ce nombre, il n'a pas prétendu, quoique sous le titre d'espèces, n'y avoir pas réuni plusieurs variétés. Il ne connoissoit pas, en 1757, les deux espèces étrangères, celles de la Floride & du Japon. Nous devons la description de ces deux-ci à M. Richard, qui maintenant, à Cayenne, travaille à reculer les limites de nos connoissances en Botanique.

J'aurois tort de prétendre avoir introduit en France une nouvelle espèce d'orme, puisqu'elle y existoit depuis

long-temps ; mais comment , après les Tournefort , Vaillant & les Jussieu , est-il resté un arbre différent de presque toutes les espèces de ce genre , sans qu'ils l'aient fait connoître ? Admirateur de leur zèle & de leurs talens , c'est un hasard s'il m'est resté à glaner après de pareils maîtres , aussi attentifs à récolter en matière de Sciences .

L'orme commun se plaît dans notre climat , il végète dans des terres qui ont peu de fond quand la terre de la superficie est végétative , ses racines s'étendent au loin & vont chercher la nourriture qui lui est nécessaire : le chêne périroit où l'orme subsiste . Mais quand il est placé dans une terre fertile qui a du fond , il pivote & en peu de temps s'élève , & quoiqu'étant planté proche d'autres ormes il acquiert de la grosseur ; les progrès de cet arbre sont encore plus rapides lorsqu'il est placé dans un fond frais & un peu humide .

Personne n'ignore l'utilité & les grands avantages qu'on retire de l'orme que nous cultivons , & dont quelques espèces ou variétés sont préférées à juste titre ; les Charrons emploient beaucoup d'ormes , ils en font sur-tout les moyeux des roues & les jantes , &c. c'est avec l'orme qu'on fait la presse des pressoirs , certaines parties des moulins à eau & à vent , &c. & on achete de préférence , pour les moyeux & les jantes , l'orme appelé *tortillard* .

Avant de parler encore de la nouvelle espèce d'orme découverte , il convient de rapeler les caractères propres au genre , & de ne citer que les différences qui caractérisent l'espèce dont nous parlons .

La fleur , dans le genre de l'orme , est composée d'un calice plus ou moins découpé , mais d'une seule pièce presque toujours colorée en rouge ; ce calice qui persiste jusqu'à la maturité du fruit , porte depuis quatre jusqu'à cinq & même six étamines du double plus longues que le calice ; il est donc difficile de donner à ce genre une place dans la méthode du célèbre Linné , puisqu'elle devroit être réglée sur ce nombre d'étamines .

Mais ce qui déroute encore celui qui cherche dans cette même méthode une place assignée au genre de l'orme, c'est que sur le même arbre il se trouve des fleurs à étamines, d'autres hermaphrodites, & que certains individus ont plus ou moins de l'une ou de l'autre de ces fleurs; l'espèce d'orme qu'on nomme *tortillard*, & qui est principalement recherchée par les Charrons, est très-sujette à donner des graines stériles, ou à n'en point produire, parce que des individus souvent ne portent que des fleurs incomplètes.

Ces fleurs naissent par petits paquets, elles sont sessiles, & il leur succède des capsules membraneuses, aussi sessiles, au milieu desquelles on voit une loge qui contient une seule semence: la forme de la capsule est un ovoïde soutenu à la branche par son petit diamètre, & chacun de ses côtés est arrondi; l'extrémité opposée à celle de son pédicule, est échancrée en forme de cœur.

A l'espèce nouvelle que je fais connoître aujourd'hui, la fleur varie aussi dans le nombre de ses étamines qui en contient depuis quatre jusqu'à six. Le calice ne diffère des autres espèces d'ormes qu'en ce que le calice de celles connues est campanulé, & le fond, dans l'espèce que je décris, est très-pointu; d'ailleurs ce qui lui sert de différence & la caractérise, c'est que, dans cette espèce, la fleur est soutenue par un long pédicule, & n'est pas sessile comme dans la plupart des espèces décrites.

Le fruit soutenu aussi par ce même pédicule fort alongé, a la forme d'un ovoïde dont le grand axe porte par une de ces extrémités dans le calice, & l'autre extrémité très-pointue, est fendue, & séparée jusque vers la loge qui renferme la semence; enfin le pédicule & le fruit sont garnis de poils ou filets blancs & soyeux qui les rendent comme velus: ces parties, en mûrissant, changent peu de couleur & conservent en grande partie la teinte verte qu'elles avoient sur l'arbre.

La feuille de cet arbre est grande, large; on y remarque

aussi, comme dans beaucoup d'autres ormes, qu'un côté de la feuille se prolonge plus que l'autre côté sur la nervure principale intermédiaire & longitudinale. Enfin, elle se distingue difficilement des ormes à grandes feuilles, & qu'on a nommés mal-à-propos *ormes femelles*.

L'écorce me paroît raboteuse, & assez approchante aussi de celle de l'orme femelle, sans y pouvoir remarquer ces sillons tortueux, comme on les distingue dans l'orme tortillard; variété de l'orme femelle.

Le tronc, quoique l'arbre s'élève & ait un beau port, ses branches s'étendant, devient fort gros: je ne puis parler de la qualité de son bois, ne m'étant pas trouvé à portée d'en faire débiter.

J'ai dit que plusieurs ormes, quoique grainant beaucoup, ne donnoient que des semences infructueuses: je soupçonne que quelques parties de la fructification sont viciées ou incomplètes dans ces individus, & que l'orme dont nous parlons a ce défaut, car la plupart des capsules sont dépourvues de graines, & je n'ai pu encore parvenir à le faire lever de graines; mais d'autres personnes ont été plus heureuses, & d'ailleurs on peut se le procurer par le secours de la greffe.

On voit donc que je ne puis pas assurer que cet orme forme une espèce, mais les différences dans certaines parties de sa fructification me le font conjecturer avec quelque espèce de certitude.

J'ai découvert cet orme premièrement au jardin de l'Arsenal de Paris; & depuis que je l'ai eu fait remarquer à différentes personnes, on s'est assuré qu'il se trouve encore dans plusieurs autres endroits de la France.

Je dois ajouter qu'ayant eu à ma disposition un catalogue de quelques arbres indigènes à la Russie & à la Sibirie, & y ayant quelques planches gravées de ces arbres, j'y ai vu l'orme que je cite avec les longs pédicules qui soutiennent ses fleurs & ses fruits, & qu'on y donne cet arbre comme étant l'espèce d'orme la plus commune en Sibirie, & d'un usage très-avantageux pour les Arts.

US PEDUNCULATA

Mem. de l'Acad. R. des Sc. An. 1784. Pag. 214. Pl. II.



F. le Goussier sculp.

Il seroit difficile, comme je l'ai dit, de fixer le temps où l'orme a commencé à être introduit en France; nous savons seulement que du temps de François I.^{er} il n'y en avoit presque point en France: il seroit plus incertain encore de déterminer le pays d'où on l'a tiré; serions-nous redevables de cette espèce à la Russie ou à la Sibirie?

On pourroit désigner cet orme sous le nom trivial d'*ulmus pedunculata*, & sous cette phrase.

Ulmus foliis ovato-acuminatis duplicato-ferratis basi inaequalibus, fructu viridi bicorni villosa, pedunculo filiforme longo, membranâ seminali subtilissimè reticulatâ. Act. R. Paris. 1784.*

* Depuis la lecture de ce Mémoire, M. Pallas a publié la première partie des plantes de la Russie; il y annonce que l'*ulmus pedunculata* est l'orme le plus commun en Russie, & le même *ulmus laevis*: il a fait graver sa graine, & y décrit notre orme à fruit sessile, comme étant l'orme le moins généralement répandu; ainsi cela confirmeroit ce que j'ai dit plus haut, que nous pourrions devoir cet orme à la Russie ou à la Sibirie.

DESCRIPTION

*D'un Poisson du genre des Silures, appelé Shaid
ou Shaiden par les Allemands.*

Par M. FOUGEROUX DE BONDAROY.

Lu
le 28 Juillet
1784.

M. BROUSSONET (maintenant de cette Académie) lut à l'Académie, le 14 Juillet 1784, un Mémoire sur un Silure ou anguille tremblante, comparé au *gimnotus* annoncé par M. Adanson, &c; & voyant une grande conformité entre le poisson qu'il décrivait, & le shaid des Allemands, j'ai cru devoir faire part à la Compagnie, de ce que j'avois écrit sur ce poisson.

Le shaid entre dans la classe ou section des poissons anguilliformes, & fera partie de la suite au traité des Pêches, commencé par feu M. du Hamel-du-Monceau, à laquelle je travaille.

Le shaid ou shaiden, schadem, welts des Allemands, est le poisson décrit par Gesner, sous le nom de *silurus* (page 1047), ainsi que par Willughby (page 128, tab. H) ; c'est le *glanis salviani* (page 210) & d'Aldrovande; le *silurus glanis* de Linné, le *sum harcha* ou *acchia* des Pontinois, & le *sheat fish* des Anglois, le *glagno* à Constantinople, & enfin le *glanis*, espèce de silure, de Pline.

Bélon, après avoir parlé de l'esturgeon, & du poisson *ichio colle hansen plosen*, cite le *silurus*, & semble avoir voulu parler du shaid, en annonçant un poisson d'eau douce qu'on vend journellement au marché de Constantinople, que le vulgaire nomme *glagnon*, & qui, suivant Bélon, est le vrai silure des Anciens.

Il paroît encore que les Auteurs ont reconnu plusieurs espèces de silures ; celui que nous décrivons est celui d'Artedy, *cirris quatuor in mento*, appendix 110. Ce poisson n'ayant

N'ayant été décrit qu'imparfaitement par les Ichtyologistes, & la figure qu'ils en ont donnée étant encore plus incomplète, j'ai cru devoir profiter d'un de ces poissons, envoyé par M. de Regemorte à M. du Hamel, pour le faire dessiner; & comparant ce que les auteurs déjà cités en avoient dit, avec le poisson que j'avois sous les yeux, ajouter ce qui manquoit à leur description & aux gravures qu'ils en ont données (a). Les Anciens ne suivoient aucune méthode, & omettoient de décrire dans les poissons, les parties caractéristiques qui pourroient servir maintenant à faire connoître ceux qu'ils n'ont qu'indiqués. Les Ichtyologistes plus modernes sont, je crois, encore trop concis, & nous laissent des descriptions imparfaites, de sorte qu'en poissons, comme en plantes, nous sommes sujets à séparer des espèces ou variétés, au lieu de les rapporter aux genres & espèces connus: d'ailleurs, la plupart des figures laissées par les Ichtyologistes, sont bien imparfaites; tâchons donc qu'on ne puisse pas nous faire les mêmes reproches.

Suivant Willughby, le shaid ou *silurus* a quelquefois quinze, seize pieds, & beaucoup plus de longueur: on en a vu, d'après les auteurs qui en ont parlé, qui pesoient 80, 120, 150 livres & plus. Il se trouve dans l'Elbe en Hongrie, dans le lac Newssildersee, dans le Danube, principalement au-dessous d'Offen, à quelque distance de Vienne, en sorte qu'il fournit abondamment le marché de cette capitale; fort rarement en pêche-t-on depuis Offen en remontant vers Vienne: on en trouve aussi dans la Vistule. Gesner dit que quelques lacs de Suisse en fournissoient de son temps, mais on prétend qu'il ne s'y en trouve plus un seul. Il y a aussi en Bavière, un lac où l'on y en prend quelquefois. On en a aussi pêché dans

(a) Depuis la lecture de ce Mémoire à l'Académie, j'ai su que ce poisson étoit décrit dans les Mémoires de l'Académie de Stockholm, année 1756, tab. III, pag. 34, par Mém. 1784.

M. Osbeck; & dans le douzième volume des Mémoires de l'Académie de Copenhague, figures 1 & 2, page 123 21, sous le nom de *Mallén*.

le Rhin en différens temps , & nommément trois vers l'année 1740. Bélon dit qu'on l'apporte à Constantinople, des prochains fleuves & des lacs de Macédoine.

Celui que nous avons eu entre les mains (en 1769), & dont nous allons donner la description , venoit de Vienne en Autriche: sa longueur depuis l'extrémité du museau *A*, jusqu'au bout de l'aileron de la queue *B*, étoit de deux pieds & demi; sa plus grande largeur, très-charnue à l'endroit (*C*) des ouïes ou branchies, étoit de quatre pouces & demi.

La forme de ce poisson, considérée généralement, va en diminuant avec uniformité depuis les branchies jusqu'à la queue, en s'aplatissant un peu sur les côtés; cet aplatissement devient considérable à l'endroit où est situé l'anús, & il continue de même jusqu'à la queue.

On ne trouve d'écailles très-apparentes (*b*) en aucune partie de la peau; elle est visqueuse & couverte d'une mucosité, à peu-près comme la peau de l'anguille: cette similitude, plutôt que la forme du corps du poisson, a engagé les Ichtyologistes à le ranger dans la classe des anguilliformes (*de piscibus anguilliformibus*). Bélon dit que sa peau est lisse & polie, sans écailles comme l'anguille; que par cette raison, les Juifs s'en abstiennent comme nourriture; qu'on se sert de la peau de ce poisson pour en couvrir les instrumens, comme luth & guitare: cette peau est médiocrement épaisse, néanmoins plus en certains endroits que dans d'autres; elle revêt en général, sans discontinuité, tout le corps, les ailerons, &c. mais sa couleur varie. Dans le poisson qui nous a servi à faire cette description, le corps étoit marbré de taches plus ou moins grandes, & de différentes formes, les unes rouges, les autres bleuâtres, jaunes, pâles ou brunes; le dessous de la mâchoire & du ventre étoit blanc avec des

(*b*) Je ne voudrois pas assurer si avec attention on n'en découvroit pas comme à l'anguille.

teintes rouges. Willughby ne parle que d'un mélange de sillons noirs & blanchâtres sur le ventre & sur les côtés; les sillons du nôtre étoient peu profonds & tracés sur le dos & les côtés, non sur le ventre, suivant diverses directions, mais toujours de la tête vers l'extrémité opposée, indépendamment des sillons superficiels & parallèles qu'on apercevoit sur le travers du poisson, où ils étoient produits, sur-tout par les appendices latérales de la grande arête.

Gesner, qui distingue plusieurs espèces de ce poisson, y observe des variétés de couleurs encore différentes de celle que nous citons : au reste, on peut dire avec Willughby, qu'il y a beaucoup de poissons dont la couleur varie à raison de l'âge, du sexe, & du lieu où ils vivent; de plus, certaines couleurs s'affoiblissent beaucoup & promptement au sortir de l'eau. La tête est large & aplatie en dessus, à la partie antérieure, comme on le voit en *E, P, figure 2*, dans ce poisson dont la longueur totale étoit de deux pieds & demi; le travers de la bouche *E, F*, avoit trois pouces & demi d'un angle à l'autre, & le pourtour de son ouverture presque onze pouces. Les lèvres sont épaissies d'environ deux lignes & demie en tout sens, suivant le contour des mâchoires : l'épaisseur de la partie garnie de dents à chaque mâchoire, est de quatre à cinq lignes, *G, figures 1 & 3*; ces mâchoires forment un demi-ovale, mais celle d'en bas est de trois quarts de pouce plus avancée que l'autre; toutes deux sont divisées au milieu de leur longueur par une symphise *G*, & entièrement garnies d'une multitude de dents courtes, fines, aiguës, fort ferrées, & un peu inclinées vers le dedans de la bouche. À peu de distance de la mâchoire supérieure, on trouve au palais une zone de six lignes de largeur, en demi-cercle, formée de pareilles dents, mais qui sont plus courtes. On aperçoit encore au fond du palais de chaque côté, une masse osseuse, arrondie, saillante, longue d'environ un pouce, toute hérissée de dents semblables à celles des mâchoires,

mais bien plus courtes & plus ferrées; & sur les mâchoires inférieures, au-dessous de ces masses, sont deux autres garnitures pareilles qui ont une forme rhomboïdale d'environ un pouce & demi de longueur: toutes ces parties dentées, qu'on peut comparer en quelque sorte à des limes, sont d'une couleur jaunâtre qui contraste sensiblement avec le blanc de l'intérieur de la bouche.

Assez près du bord de la lèvre supérieure, & à un pouce de l'articulation des os de la mâchoire, est de chaque côté un filet cartilagineux *H*, ferme, brun, long de sept pouces, & terminé en pointe fine: la dissection nous a fait voir que cette espèce de moustache, dont nous ignorons le vrai usage, est mue par un nerf contigu au nerf optique, & par un muscle très-fort; qu'elle est articulée à sa base avec un nœud osseux qui lui donne un mouvement de genou. Benoît-Martin de Berne dit que ces fibres sont des antennes, & que le poisson les projette en avant, comme pour tâter les objets.

En suivant le bord de la mâchoire supérieure, & avançant vers le milieu, un demi-pouce plus haut que l'insertion de ces fibres, on aperçoit de chaque côté une petite ouverture *I*, garnie d'un tuyau qui y fait une saillie d'environ une ligne de longueur; ce trou communique par un canal intérieur, large & osseux, avec une autre ouverture moins apparente faite en fente, placée sur la même ligne, à un pouce au-dessus, & qui ne devient bien sensible que quand on a soulevé la membrane qui la couvre en partie.

Immédiatement derrière les moustaches, à un pouce de distance, sont les yeux *K*; ils n'ont que trois lignes d'ouverture, sont très-peu saillans, & revêtus d'une membrane épaisse. Deux os embrassent chaque œil, un de ces os, à peu-près demi-circulaire, assez large, contigu au crâne, & saillant, en environne la partie antérieure; l'autre lui est opposé, mais a une forme approchante de celle des ailerons; il est étroit, en courbe alongée dans la

plus grande largeur, puis il se prolonge en ligne droite, & se termine en pointe par le haut ; il est logé entièrement dans la peau des joues.

Ce que nous appelons *joues*, sont des parties fort charnues *L*, *fig. 1*, qui accompagnent l'œil, & dont la position se termine au bord de l'opercule des ouïes : cet opercule *M*, commençoit à trois pouces & demi de la lèvre supérieure dans ce poisson, & il avoit en cet endroit une articulation. Depuis-là, toute la largeur de l'opercule, sur les côtés, n'étoit que d'un pouce & demi ; après avoir fait le tour de la tête, il s'étendoit jusque sous la gorge, & les deux opercules se réunissoient en pointe, *N*, *fig. 4*, à deux pouces du bord antérieur de la lèvre. La partie osseuse formoit tout au plus la moitié de cette largeur, le reste étoit rempli par une substance charnue & plissée, dans laquelle étoient enclavées & fixées des arêtes fines & osseuses. Sous chaque opercule sont quatre branchies, dont les os sont très-forts ; les deux de devant ont chacun, sur un seul rang, une douzaine de petits osselets mobiles, pointus ; & distans les uns des autres. Il y a sur chacun des deux os postérieurs deux rangées parallèles de dents moins considérables & plus serrées ; les filets osseux & colorés ne forment qu'un seul plan de cinq à six lignes de largeur au bord de chaque os ; mais le plan est double à la partie postérieure.

A la mâchoire inférieure, sont adhérens quatre filets *O*, *fig. 1*, 3 & 4, cartilagineux, assez mous, blancs avec une légère teinte de rouge, longs d'un pouce & demi ou deux pouces, situés à treize ou quatorze lignes du bord de la lèvre, suivant assez le contour de la mâchoire, & espacés entr'eux de treize à quatorze lignes.

Gesner & plusieurs autres Auteurs disent que les six filets dont nous avons parlé, qui garnissent la mâchoire supérieure & celle inférieure, tombent tous les ans, & qu'ils sont remplacés par de nouveaux. Sur la même ligne que l'angle de la bouche, à trois pouces & demi en arrière,

sous le bord de l'opercule des ouïes, est une nageoire, *P*, assez large, arrondie par le bas, composée de seize rayons cartilagineux, dont le plus grand a trois pouces de longueur, & les autres sont graduellement plus courts, selon la forme de l'arrondissement qui les termine. Outre ces seize rayons, il y en a, sur le bord antérieur, un autre *Q*, tout-à-fait osseux, très-fort, large de quatre lignes à sa base, pointu, long de deux pouces & qui, n'ayant point sensiblement d'articulation séparée, est couvert de la même membrane que les autres rayons. Willughby observe, avec Kintmannus, que ce rayon osseux sert d'arme défensive au shaid, & qu'il est denté en scie à sa partie postérieure. Nous convenons de cette denture qui n'est sensible que vers le bas; mais comme le rayon osseux est couvert de la membrane commune de toute la nageoire, que sa pointe seule l'excède, & qu'il ne paroît pas pouvoir s'allonger, nous ne sommes pas dans le cas de déterminer en aucune manière l'usage de cette denture ainsi enfermée de la longueur d'environ un pouce.

Environ à onze pouces du bord antérieur de la mâchoire d'en bas, sont deux ailerons *R*, presque contigus, parallèles & entièrement cartilagineux; chacun composé de onze rayons qui se terminent en arrondissement, & dont le plus long a un pouce & demi. La plus grande largeur de ces ailerons est de quinze lignes.

Ils sont situés un pouce en devant de l'anus *D*, au-dessous duquel commence un grand aileron *SS*, dont les rayons sont au nombre de quatre-vingt-dix. Il s'étend sur une longueur d'environ dix-huit pouces, & se termine en s'arrondissant à-peu-près au milieu *T*, de la longueur de l'aileron de la queue; sa largeur est de douze à treize lignes, & son arrondissement, à côté de la queue, fait comme un ressaut bien sensible.

L'aileron de la queue (*B*) est entier, taillé obliquement, un peu frangé, formé de dix-sept rayons cartilagineux & souples. La membrane qui le couvre est plus

épaisse que celle des autres ailerons; elle l'est sur-tout au bord qui est une continuation du dos : comme il y a une coupe inclinée, son angle supérieur est à deux pouces cinq ou six lignes de l'articulation (V), où cet aileron a un pouce & demi de largeur. Gesner paroît douter que cet aileron soit une continuité de celui du ventre. Willughby le nie positivement. A considérer ces deux ailerons en tant que recouverts en effet par une membrane commune, on pourroit n'admettre entr'eux aucune séparation; mais les rayons qui s'articulent au bas de la grande arête, ayant sous cette même membrane une direction qui leur est propre depuis l'endroit où se termine l'arrondissement de l'aileron du ventre; & le concours de ces rayons formant autour du bord inférieur de la grande arête, un aileron comme dans la plupart des autres poissons, il semble qu'on peut très-bien distinguer cet aileron d'avec l'autre.

Sur le dos, à huit pouces du bord antérieur de la mâchoire d'en haut, est un seul aileron (X) dont le plus grand diamètre est de six à sept lignes. Il est formé de trois rayons que l'on comprend devoir être écartés les uns des autres pour former cette étendue; le plus grand n'a qu'un pouce de largeur.

On ne trouve pas de langue dans ce poisson. Sur la voûte du palais, est un voile épais & tendineux qui n'a d'attache que par les côtés.

Nous avons dit que les opercules des ouïes alloient se réunir sous le devant de la mâchoire inférieure. Quand on enlève la membrane qui tapisse par en-bas le dedans de la bouche, on trouve, à ce point de leur réunion, une loge charnue, dans laquelle est une oreillette ou aorte considérable, faite en poire, qui précède le cœur. Ce muscle n'est pas échancré, il a une forme à peu-près prismatique, faiblement convexe en dessous, terminé en pointe par le bas, & taillé assez carrément à son extrémité

supérieure qui ne communique avec l'aorte que par un tuyau menu & court.

L'estomac commence au fond de la gorge; il est très-épais, long d'environ six pouces, large de trois pouces à son orifice supérieur, arrondi & un peu plus étroit par le fond. Le pylore ou orifice inférieur est situé plus bas que la moitié de la longueur totale : ce viscère, lisse & veiné par dehors, est intérieurement garni de rugosités plus ou moins considérables, très-nombreuses, & qui s'étendent en long sur divers sens, de manière qu'on aperçoit souvent une communication entr'elles.

Sur ce viscère, est placé le foie divisé en deux lobes considérables & inégaux, au milieu desquels on trouve une petite vessie qui contient du fiel, couleur de souci. La vessie d'air est blanche, enveloppée d'une membrane brune & mince qui tient à la grande arête; mais on les sépare aussi facilement l'une de l'autre que le gant d'avec la main : cette vessie est d'une substance forté & tendineuse, longue d'environ six pouces, large de trois dans sa partie moyenne, arrondie en bourse ou sac par le bas; telle étoit au moins celle de notre shaid. Nous n'y avons point vu cette diminution insensible en pointe, que Willughby attribue à cette vessie, elle est séparée intérieurement de haut en bas par une forte cloison dont le bas se courbe en arc, & qui intercepte toute communication entre les deux loges.

Ce poisson n'a qu'une arête; elle règne depuis la tête jusqu'à la queue; les vertèbres ne sont pas couvertes de mucilage comme celles de l'anguille, à la classe de laquelle Willughby rapporte le shaid; leurs apophyses ou arêtes latérales sont rangées parallèlement des deux côtés, assez droites, espacées à une ligne ou un peu plus. Il n'y a point de côtes courbes qui se prolongent pour enfermer les viscères. Les apophyses de ce côté-là sont seulement plus courtes dans l'espace qu'occupent les viscères; aussi le ventre s'affaïsse-t-il sur lui-même; faute de soutien, dès qu'on

qu'on l'a vidé. Les œufs du shaid, que nous avons eus à la mi-Février, étoient très-menus, & rassemblés en deux masses ovales terminées en pointe, longues de presque trois pouces sur un pouce de largeur.

Nous ne décrirons pas l'organe de l'ouïe de ce poisson; il nous suffira de dire qu'à l'extrémité du crâne, & près de la naissance des vertèbres, on trouve une loge à peu près aussi longue que large, qui renferme un mucilage, dans lequel sont contenus séparément, l'un à droite, l'autre à gauche, deux osselets très-secs, nus, fort blancs, dont la forme approche de l'ovale, longs d'environ une ligne & demie, plats sur leurs surfaces; mais il y en a une chargée d'un pareil os bombé, plus petit, moins blanc, & qui s'en détache par le moindre choc.

Ce poisson passe pour être des plus voraces, & en conséquence à redouter parmi les autres poissons.

On le range au nombre des mets délicats. Le foie en est bon, les œufs ont une saveur fine, la peau qui est grasse a un mérite particulier.

Nous l'avons mangé au bleu, suivant l'avis des connoisseurs qui nous l'avoient envoyé, mais une sauce un peu relevée lui auroit servi de meilleur assaisonnement; aussi Willughby dit-il qu'on peut l'apprêter de toutes les mêmes manières que l'anguille.

Nous avons déjà prévenu qu'il y avoit plusieurs espèces de Silure, & Gefner dit qu'il existe un poisson, connu sous le nom de *blax*, qui lui ressemble assez par la forme, mais qui est d'un si mauvais goût que les chiens ne veulent pas même en manger.

Tous les Auteurs s'accordent à donner une dimension & une pesanteur considérables à certains de ces poissons; c'est pour cela qu'on ne peut les vendre au marché qu'en les coupant par tranches ou morceaux: Gefner dit que le milieu du corps doit être préféré au reste, comme étant plus ferme & moins fade.

Nous avons cité beaucoup d'endroits où l'on trouvoit

Mém. 1784.

Ff

le shaid ; il semble qu'il est devenu beaucoup plus rare qu'il ne l'étoit autrefois.

Le sieur Diers, pêcheur distingué de Strasbourg, ayant entendu parler de ce poisson par son père, pêcheur comme lui, entreprit le voyage de Hongrie ; & après avoir pris des instructions des Hongrois, il rassembla quatre cents shaid de toutes grandeurs, convenables au transport, & les conduisit, dans une bascule, depuis Offen jusqu'à Ulen. Il les mit dans des tonneaux pour les mener par terre à Strasbourg. Aucun de ces poissons ne périt dans la bascule ; mais une douzaine des plus petits ne purent soutenir le charroi de terre. Depuis cette tentative, le même sieur Diers entreprit de faire venir un second convoi à-peu-près du même nombre, & de le faire arriver directement par terre, il a encore réussi ; mais il a eu environ un tiers de perte, dont l'objet, du côté de l'intérêt, a été compensé par la précaution de vendre en route ceux des poissons qu'il voyoit foiblir.

Dans les deux convois, ceux qui sont arrivés à Strasbourg, se sont très-bien soutenus, à la reserve de cinq à six sur chaque cent, & ont été vendus chèrement.

Le sieur Diers avoit combiné la marche & les séjours ; il les nourrissoit de ces petits poissons communs aussi dans la rivière de Seine, qu'on nomme *ables* ou *ablettes*, & dont on retire l'écaille qui recouvre la peau, pour en former la nacre des perles fausses. Il trouvoit à point nommé ou de ces ables, ou des petits poissons blancs pour la nourriture de ses shaid, & des basculés dans lesquelles il donnoit, en pleine eau, un jour de repos à son poisson après deux jours de marche. A Strasbourg, dans les bascules, le sieur Diers les nourrissoit avec des ables écaillés, qui forment un commerce d'industrie pour ce pêcheur, qui, d'après ce qu'il a vu dans un de ses voyages à Paris, a reconnu qu'il pouvoit trouver abondamment en Alsace, ce petit poisson propre à la fabrique des fausses perles ; & il a établi une manufacture ou un dépôt de ces écailles

qu'il envoie à Paris, tandis que ses shaid & ses brochets mangent les poissons qui les ont fournies.

Je dois terminer cette description, en ajoutant qu'un fond limoneux paroît mieux convenir à ce poisson que celui sableux, & qu'il passe pour certain qu'il ne s'est jamais multiplié dans quelque lieu qu'il ait été transporté. Cependant le sieur Diers ne désespère pas, en lui trouvant une eau tranquille, & l'y laissant en liberté, de l'y voir frayer, & de réussir à le multiplier.

Ce poisson grossit beaucoup & promptement, même dans les balcales. On a reconnu qu'en neuf mois, ceux pesant dix-huit livres, en pesoient vingt-six; ceux d'une livre ont pesé trois livres après un an de séjour dans les balcales. On a cru à propos de les transporter vivans pendant les chaleurs, c'est au mois de Juillet que le sieur Diers les a fait voyager.

J'ai donné, d'après les Auteurs, 150, même 200 livres, comme l'excédant de pesanteur auquel peut parvenir ce poisson. Je dois cependant ajouter que la personne qui a fait, en Hongrie, l'acquisition des shaid pour le sieur Diers, assure qu'il s'y en trouve qui pèsent jusqu'à quatre cents livres, qu'on les coupe comme de la viande, & qu'on les vend par livre au marché.

EXPLICATION de la Planche représentant un Shaid, espèce de silure.

Fig. 1. Le poisson, vu de côté, & suivant sa longueur.

A, museau.

B, la queue.

C, l'ouïe.

D, l'anus.

L, parties charnues auxquelles nous avons donné le nom de *joues*.

M, origine des opercules.

P, nageoire brachiale.

Q, rayon de cette nageoire, qui est osseux.

228 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

R, ailerons ventraux.

S, grand aileron qui prend depuis l'anus, & se prolonge jusqu'à l'aileron de la queue.

T, aileron de la queue.

V, articulation de cet aileron de la queue.

X, seul aileron du dos.

Fig. 2. *EE*, saillances charnues, que nous avons nommées *joues*.

FF, ouverture des mâchoires.

I, petite ouverture garnie d'un tuyau.

K, les yeux.

Fig. 3. *G*, lèvres qui bordent les mâchoires.

H, filet cartilagineux au bord de la lèvre supérieure, à un pouce de l'articulation des os de la mâchoire.

Fig. 4. *N*, réunion des opercules.

O, quatre filets cartilagineux & mous.

R E C H E R C H E S

THÉORIQUES ET EXPÉRIMENTALES

Sur la force de torsion , & sur l'élasticité des fils de métal : Application de cette théorie à l'emploi des métaux dans les Arts & dans différentes expériences de Physique : Construction de différentes balances de torsion , pour mesurer les plus petits degrés de force. Observations sur les loix de l'élasticité & de la cohérence.

Par M. C O U L O M B.

I.

CE Mémoire a deux objets ; le premier , de déterminer la force élastique de torsion des fils de fer & de laiton , relativement à leur longueur , à leur grosseur , & à leur degré de tension. J'avois déjà eu besoin , dans un Mémoire sur les Aiguilles aimantées , imprimé dans le neuvième volume des *Savans étrangers* , de déterminer la force de torsion des cheveux & des soies ; mais je ne m'étois point occupé des fils de métal , parce que l'objet utile à mes recherches , n'étoit pour lors que de choisir , à forces égales , les suspensions les plus flexibles , & que j'avois trouvé que les fils de soie avoient incomparablement plus de flexibilité que les fils de métal. Le second objet de ce Mémoire , est d'évaluer l'imperfection de la réaction élastique des fils de métal , & d'examiner quelles sont les conséquences que l'on en peut tirer , relativement aux loix de la cohérence & de l'élasticité des corps.

Là
en 1784.

I I.

LA méthode pour déterminer la force de torsion, d'après l'expérience, consiste à suspendre par un fil de métal, un poids cylindrique, de manière que son axe soit vertical ou dans la direction du fil de suspension. Tant que le fil de suspension ne sera point tordu, le poids restera en repos; mais si l'on fait tourner ce poids autour de son axe, le fil se tordra, & fera effort pour se rétablir dans sa situation naturelle; si pour lors l'on abandonne le poids, il oscillera plus ou moins de temps, suivant que la réaction élastique de torsion sera plus ou moins parfaite. Si dans ce genre d'expérience, l'on observe avec soin la durée d'un certain nombre d'oscillations, il sera facile de déterminer, par les formules du mouvement oscillatoire, la force de réaction de torsion qui produit ces oscillations. Ainsi, en faisant varier la pesanteur du poids suspendu, la longueur des fils de suspension, & leur grosseur, l'on peut espérer de déterminer les loix de la réaction de torsion, relativement à la tension, à la longueur, à la grosseur, & à la nature de ces fils.

I I I.

Si le fil de métal étoit parfaitement élastique, si la résistance de l'air n'altéroit pas l'amplitude des oscillations, le poids soutenu par le fil de métal, une fois en mouvement, oscillerait jusqu'à ce qu'on l'arrêtât. La diminution des amplitudes des oscillations ne peut donc être attribuée qu'à la résistance de l'air, & qu'à l'imperfection de l'élasticité de torsion; ainsi, en observant la diminution successive de l'amplitude de chaque oscillation, & en retranchant la partie de l'altération qu'il faut attribuer à la résistance de l'air, l'on pourra, au moyen des formules du mouvement oscillatoire, appliquées à ces expériences, déterminer suivant quelles loix cette force élastique de torsion est altérée.

I V.

CE Mémoire sera divisé en deux sections; dans la première, l'on déterminera la loi des forces de torsion, en supposant les forces de torsion proportionnelles à l'angle de torsion, supposition conforme à l'expérience, lorsque l'on ne donne pas une trop grande amplitude à l'angle de torsion : l'on donnera quelques applications de cette théorie à la pratique.

Dans la seconde section, l'on cherchera, par l'expérience, suivant quelles loix la force élastique de torsion est altérée dans les grandes oscillations : l'on fera usage de cette recherche pour déterminer les loix de la cohérence & de l'élasticité des métaux & de tous les corps solides.

V.

SECTION PREMIÈRE.

Formules du mouvement oscillatoire, en supposant la réaction de la force de torsion proportionnelle à l'angle de torsion, ou altérée par un terme très-petit.

UN corps cylindrique B (*fig. I, n.° 1*) est soutenu par un fil RC , de manière que l'axe du cylindre est vertical, ou se trouve dans la prolongation du fil de suspension; l'on fait tourner ce cylindre autour de son axe, sans déranger cet axe de son à-plomb: il faut déterminer, dans la supposition des forces de torsion proportionnelles à l'angle de torsion, les formules du mouvement oscillatoire.

Le *n.° 2, fig. I*, représente une section horizontale du cylindre; tous les élémens du cylindre sont projetés sur cette section circulaire en π , π' , π'' , &c. l'on suppose que l'angle primitif de torsion soit $ACM = A$, & qu'après le temps t , cet angle soit ACm , ou qu'il soit diminué de l'angle $MCm = S$, en sorte que $ACm = (A - S)$.

Puisque l'on suppose la force de torsion proportionnelle à l'angle de torsion, le *momentum* de cette force sera

représenté par $n(A - S)$, n étant un coefficient constant, dont la valeur dépendra de la nature du fil de métal, de sa longueur & de sa grosseur. Si l'on nomme v la vitesse d'un point quelconque π , au bout du temps t , lorsque l'angle de torsion est ACm , l'on aura, par les principes de Dynamique,

$$n(A - S) dt = \int \pi r dv,$$

où r est la distance $C\pi$ du point π à l'axe de rotation C .

Mais si le rayon CA' du poids cylindrique $= a$, & que la vitesse d'un point A' de la circonférence du cylindre, soit au bout du temps t , représentée par u , l'on aura

$$v = \frac{r u}{a}; \text{ d'où résulte}$$

$$n(A - S) dt = du \int \frac{\pi r^2}{a};$$

& comme $dt = \frac{a dS}{u}$, l'on aura pour l'équation intégrée

$$n(2AS - SS) = uu \int \frac{\pi r^2}{a},$$

d'où l'on tire

$$dt = \frac{dS \int (\pi r^2)^{\frac{1}{2}}}{u(n) \sqrt{(2AS - SS)}}.$$

Mais $\frac{dS}{\sqrt{(2AS - SS)}}$ représente un angle dont A est le rayon & S le sinus versé, qui s'évanouit lorsque $S = 0$, & qui devient égal à 90 degrés lorsque $S = A$.

Ainsi le temps d'une oscillation entière fera

$$T = \left(\int \frac{\pi r^2}{a} \right)^{\frac{1}{2}} 180^d.$$

V L

POUR comparer la force de torsion avec la force de la gravité dans un pendule, il faut se ressouvenir que dans le

le pendule, le temps T d'une oscillation entière

$$= \left(\frac{\lambda}{g} \right)^{\frac{1}{2}} 180^d,$$

où λ est la longueur du pendule, & g la force de gravité. Ainsi un pendule isochrone aux oscillations du cylindre, donne

$$\int \frac{\pi r^2}{n} = \frac{\lambda}{g};$$

de cette formule, l'on tirera facilement la valeur de n , d'après l'expérience, puisque les dimensions du cylindre ou du poids sont données, ainsi que le temps d'une oscillation qui détermine la valeur λ .

Si l'on vouloit ensuite chercher un poids Q , qui, agissant à l'extrémité du levier b , eût un *momentum* égal au *momentum* de la force de torsion, lorsque l'angle de torsion est $(A - S)$, il faudroit faire $Q b = n (A - S)$.

V I I.

IL faut actuellement chercher, pour un cylindre, la valeur de $\int \pi r^2$, que l'on trouvera égale à $\frac{\phi \delta L \cdot a^2}{4}$, où ϕ est le rapport de la circonférence au rayon, δ est la densité du cylindre & a son rayon. Mais comme la masse M du cylindre $= \frac{\phi \delta L a^2}{2}$, l'on a $\int \pi r^2 = \frac{M a^2}{2}$, & conséquemment $T = \left(\frac{M a^2}{2 n} \right)^{\frac{1}{2}} 180^d$; en comparant, comme à l'article précédent, avec le pendule isochrone, il en résulte $\frac{\lambda}{g} = \frac{M a^2}{2 n}$, & comme $g M$ est le poids P du cylindre, nous aurons $n = \frac{P a^2}{2 \lambda}$; ce qui donne une formule très-simple pour déterminer n d'après l'expérience.

Mém. 1784.

G g

V I I I.

Si la force de torsion, que nous avons supposée $n(A - S)$, étoit altérée par une quantité R , la formule du mouvement oscillatoire donneroit pour lors

$$[n(A - S) - R] \partial t = \partial u \int \frac{\pi r^2}{a};$$

& mettant comme plus haut, à la place de ∂t , sa valeur $\frac{adS}{u}$, l'on a pour l'intégration

$$n(2AS - SS) - \int R dS = \pi \int \frac{\pi r^2}{aa}.$$

Si l'on veut étendre cette intégration à une oscillation entière, il faut la diviser en deux parties, la première depuis M jusqu'en A , où la force de torsion accélère la vitesse u , tandis que la force retardatrice la diminue; la deuxième depuis A jusqu'en M , où toutes les forces concourent à retarder le mouvement.

EXEMPLE I.^{er} Supposons $R = \mu(A - S)^m$, l'on aura, pour l'état de mouvement dans la première portion MA ,

$$n(2AS - SS) + \frac{2\mu(A - S)^{m+1}}{m+1} - \frac{2\mu A^{m+1}}{m+1} = \pi u \int \frac{\pi r^2}{aa};$$

ainsi, lorsque l'angle de torsion sera nul, ou que $(A - S) = 0$, l'on aura

$$nA^2 - \frac{2\mu A^{m+1}}{m+1} = \pi U \int \frac{\pi r^2}{aa};$$

Considérons actuellement l'autre partie du mouvement depuis A jusqu'en M' , & supposons l'angle $AGm' = S'$, nous trouverons, en nommant U la vitesse au point A ;

$$\frac{\pi S'^2}{2} + \frac{\mu S'^{m+1}}{m+1} = \frac{UU - \pi \pi}{2} \int \frac{\pi r^2}{aa}.$$

Substituant à la place de U^2 sa valeur

$$\left(\frac{n A^m - \frac{2\mu A^{m+1}}{m+1}}{\int \frac{\pi r^2}{a^2}} \right),$$

l'on aura pour l'intégration totale, lorsque la vitesse deviendra nulle, ou lorsque l'oscillation sera achevée,

$$(A - S') = \frac{2\mu}{n(m+1)} \frac{(A^{m+1} + S'^{m+1})}{A + S'};$$

& si les forces retardatrices sont telles qu'à chaque oscillation, l'amplitude soit peu diminuée, l'on aura, pour valeur très-approchée de $(A - S')$,

$$(A - S') = \frac{2\mu A^m}{n(m+1)};$$

& si cette quantité $(A - S')$ étoit assez petite pour être traitée comme une différentielle ordinaire, l'on auroit pour lors, pour un nombre Z d'oscillations,

$$\frac{2\mu}{n(m+1)} Z = \frac{1}{m-1} \left(\frac{1}{S^{m-1}} - \frac{1}{A^{m-1}} \right),$$

où S représente ce que devient A après un nombre d'oscillations Z . Ainsi l'on aura

$$S = \frac{1}{\left[\frac{2\mu \cdot m-1}{n(m+1)} Z + \frac{1}{A^{m-1}} \right] \frac{1}{m-1}},$$

qui détermine la valeur de S , après un nombre quelconque Z d'oscillations.

EXEMPLE II. Si

$$R = \mu (A - S)^m + \mu' (A - S)^{m'}.$$

μ' & m' ayant d'autres valeurs que μ & m , l'on aura, en suivant le procédé du dernier exemple,

$$n(A - S) = \frac{2\mu}{m+1} \left(\frac{A^{m+1} + S^{m+1}}{A + S} \right) + \frac{2\mu'}{m'+1} \left(\frac{A^{m'+1} + S^{m'+1}}{A + S} \right);$$

G g ij

& si la force retardatrice est beaucoup moindre que la force de torsion, l'on aura pour valeur approchée,

$$n(A - S) = 2\mu \frac{A^n}{n+1} + \frac{2\mu' A^n}{n'+1}.$$

En général, si

$$R = \mu(A - S)^n + \mu'(A - S)^{n'} + \mu''(A - S)^{n''} + \&c.$$

l'on aura toujours pour une oscillation, en supposant R beaucoup plus petit que la force de torsion,

$$n(A - S) = \frac{2\mu A^n}{n+1} + \frac{2\mu' A^n}{n'+1} + \frac{2\mu'' A^n}{n''+1} + \&c.$$

X.

Expériences pour déterminer les loix de la force de torsion.

Préparation.

SUR une petite planche KA , soutenue par quatre pieds, s'élève une potence ABD : le poteau montant AB , a quatre pieds de hauteur, la traverse horizontale DE , glisse le long du montant, & se fixe au moyen d'une vis E : le cylindre ou le poids P , porte dans la partie supérieure, dans la prolongation de son axe, un bout d'aiguille b , fixée à ce cylindre. Cette aiguille est saisie par la partie inférieure d'une double pince a , qui se serre par des vis; la partie supérieure de cette pince saisit l'extrémité inférieure du fil de suspension; la partie inférieure de cette même pince saisit l'extrémité de l'aiguille fixée au cylindre. L'extrémité supérieure du fil de suspension est prise par une autre pince g , attachée à la traverse DE . Sur la planche AK , qui sert de base à l'appareil, l'on pose un cercle divisé en degrés, dont le centre C doit être placé dans la prolongation de l'axe du cylindre: l'on attache au-dessous du cylindre un index eo , dont l'extrémité o réponde aux divisions du cercle.

X,

Expériences sur la torsion des fils de fer.

J'AI pris trois fils de clavecin, tels qu'on les trouve répandus dans le commerce, roulés sur des bobines, & numérotés.

Le fil de fer, n.^o 12, supporte, avant de se rompre, 3 livres 12 onces; les six pieds de longueur pèsent 5 grains.

Le fil de fer, n.^o 7, supporte, avant de se rompre, un poids de 10 livres; les six pieds de longueur pèsent 14 grains.

Le fil de fer, n.^o 1, cassé sous une tension de 33 livres; les six pieds de longueur pèsent 56 grains.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Fil de fer, n.^o 12, le cylindre pesant une demi-livre.

L'ON a pris un cylindre de plomb pesant une demi-livre, que l'on a suspendu au fil de fer, n.^o 12; ce cylindre avoit 19 lignes de diamètre & 6 lignes $\frac{1}{2}$ de hauteur; le fil de suspension avoit 9 lignes de longueur. L'on a fait tourner le cylindre autour de son axe, sans déranger cet axe de son à-plomb, & l'on a eu les résultats suivans:

Premier essai. Lorsque l'on fait tourner le cylindre autour de son axe, d'un angle plus petit que 180 degrés, il fait vingt oscillations sensiblement isochrones en... 120".

Deuxième essai. Mais en tordant de trois cercles, les dix premières oscillations ont été de 2 à 3 secondes plus longues que les dix premières; & après les dix premières oscillations, l'amplitude des oscillations, qui étoit d'abord de trois cercles, se trouvoit réduite à cinq quarts de cercle.

DEUXIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de fer, n.^o 12, cylindre pesant 2 livres.

Premier essai. En suspendant au même fil de fer, n.^o 12,

238 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

un cylindre qui pesoit 2 livres, ayant le même diamètre que le précédent, mais 26 lignes de hauteur, l'on a eu, pour un angle de torsion de 180 degrés & au-dessous, vingt oscillations sensiblement isochrones en... 242".

TROISIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de fer, n.° 7, cylindre pesant une demi-livre.

Premier essai. En suspendant au fil de fer, n.° 7, le cylindre d'une demi-livre, l'on a eu, pour une torsion de 180 degrés & au-dessous, vingt oscillations sensiblement isochrones en..... 42".

QUATRIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de fer, n.° 7, cylindre pesant 2 livres

Essai. En suspendant au même fil un poids de 2 livres, les vingt oscillations ont été achevées en..... 85".

CINQUIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de fer, n.° 1, cylindre pesant une demi-livre.

Essai. Lorsque l'on suspend à ce fil de fer de 9 pouces de longueur, un poids de demi-livre, la roideur est si considérable, que ce poids n'est pas suffisant pour le redresser; en sorte que les oscillations sont très-irrégulières, parce qu'elles dépendent, non-seulement de l'angle de torsion, mais encore de la courbure que le fil de fer conserve en sortant de dessus la bobine, quoiqu'il soit tendu par un poids de demi-livre.

SIXIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de fer n.° 1, cylindre pesant 2 livres.

Essai. Mais en suspendant à ce fil de fer de 9 pouces de longueur, un poids de deux livres, le fil est sensi-

Blement redressé, & l'on a, pour un angle de torsion de 45 degrés & au-dessous, vingt oscillations sensiblement isochrones en..... 23".

Continuation des Expériences.

Fils de laiton.

L'on a pris trois fils de laiton, correspondans par le numéro & à peu-près par la grosseur, aux trois fils de fer que l'on vient de soumettre aux expériences.

Le fil de laiton, n.^o 12, portoit, au moment de sa rupture, 2 livres 3 onces: les six pieds de longueur pèsent 5 grains.

Le fil de laiton, n.^o 7, portoit, au moment de sa rupture, 14 livres: les six pieds de longueur pèsent 18 grains $\frac{1}{2}$.

Le fil de laiton, n.^o 1, cassé sous une tension de 22 livres: les six pieds de longueur pèsent 66 grains.

SEPTIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton n.^o 12, cylindre pesant une demi-livre.

Essai. La longueur du fil de suspension étoit de 9 pouces, comme dans les expériences qui précèdent; l'on y a suspendu le cylindre pesant une demi-livre, & l'on a eu pour un angle de torsion de 360 degrés & au-dessous, vingt oscillations sensiblement isochrones en..... 220".

Mais avec un angle primitif de trois cercles de torsion, les vingt premières oscillations ont duré 225 secondes; & après ces vingt premières oscillations, l'angle de torsion étoit encore de deux cercles à peu-près.

HUITIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton, n.^o 12, cylindre pesant deux livres.

Essai. Le fil de suspension étant de 9 pouces, & le cylindre pesant 2 livres, l'on a eu pour un angle de 360 degrés & au-dessous, vingt oscillations sensiblement

isochrones en..... 442".

Avec un angle primitif de trois cercles de torsion, les vingt premières oscillations ont duré à peu-près 444 secondes, & l'angle primitif de torsion s'est trouvé réduit à deux cercles un quart.

NEUVIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton, n.° 7, cylindre pesant une demi-livre.

Essai. La longueur du fil de suspension toujours de 9 pouces, l'angle primitif de torsion étant de 360 degrés & au-dessous, l'on a eu vingt oscillations sensiblement isochrones en..... 57".

DIXIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton, n.° 7, cylindre pesant 2 livres.

Essai. La longueur du fil de suspension toujours de 9 pouces, l'angle primitif de torsion étant de 360 degrés & au-dessous, l'on a eu vingt oscillations sensiblement isochrones en..... 110".

Mais l'angle primitif de torsion étant de deux circonférences de cercle, l'on a eu les vingt premières oscillations en 111 secondes, & l'angle primitif de torsion qui étoit de deux circonférences, s'est trouvé réduit à une circonférence & demie.

ONZIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton, n.° 1, cylindre pesant une demi-livre.

Essai. Sous une tension d'une demi-livre, le fil de suspension n'est pas entièrement redressé, & le temps des oscillations, dépendant en partie de la courbure primitive, est incertain.

DOUZIÈME

DOUZIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton, n.° 1, cylindre pesant 2 livres.

Essai. La longueur du fil de suspension toujours de 9 pouces, l'angle primitif de torsion étant de 50 degrés & au-dessous, l'on a eu vingt oscillations sensiblement isochrones en..... 32".

Mais l'angle primitif de torsion étant de cinq quarts de cercle, l'on a eu les vingt premières oscillations en 33 secondes $\frac{1}{2}$; & au bout de ces oscillations, l'angle primitif étoit réduit à un quart de cercle.

TREIZIÈME EXPÉRIENCE

Fil de laiton, n.° 7, cylindre pesant 2 livres.

Essai. La longueur des fils de suspension dans toutes les expériences précédentes, étoit de 9 pouces: comme l'on avoit besoin de déterminer la force de torsion, relativement à la longueur des fils, l'on a donné 36 pouces de longueur à la suspension de cette expérience, & l'on a eu jusqu'à trois cercles de torsion & au-dessous, vingt oscillations sensiblement isochrones en..... 222".

X I.

Résultat des Expériences qui précèdent.

LA force ou la réaction de la torsion des fils de métal, doit être relative à leur longueur, à leur grosseur, à leur tension. Ainsi, pour pouvoir déterminer généralement la loi de cette réaction, nous avons été obligés, dans les expériences qui précèdent, de suspendre différens poids à des fils de fer & de laiton, de grosseur & de longueur différentes: voici les résultats que ces expériences présentent.

Si l'on fait tourner autour de son axe le cylindre, sans

Mém. 1784.

Hh

peu la force de torsion. L'on sent en effet qu'à mesure que la tension augmente, le fil s'allonge, son diamètre diminue, ce qui doit ralentir la durée des oscillations.

Nous n'avons pas pu comparer les fils de fer ou de laiton, n.^o 1, sous les tensions d'une demi-livre & de deux livres, parce que, comme nous l'avons dit dans le détail des Expériences, la tension d'une demi-livre n'est pas suffisante pour redresser ces fils.

X I I.

De la force de torsion relativement aux longueurs des fils.

NOUS venons de trouver, dans l'article qui précède, que le plus ou moins de tension des fils n'influoit que d'une manière insensible sur la force de torsion. Nous allons actuellement chercher, d'après les mêmes expériences, de combien, à angle égal de torsion, la longueur du fil de suspension augmente ou diminue cette force. Mais il est clair qu'à mesure que l'on augmente la longueur du fil de métal, l'on peut faire faire, dans la même proportion, un plus grand nombre de révolutions au cylindre, sans changer le degré de torsion; ainsi, la force de réaction de torsion doit être, pour un même nombre de révolutions, en raison inverse de la longueur du fil. Voyons si ce raisonnement s'accorde avec l'expérience.

La formule, de l'article VII, nous donne

$$T = \left(\frac{M a^2}{2 n} \right)^{\frac{1}{2}} . 180 \text{ degrés,}$$

ou pour le même poids T proportionnel à $\frac{1}{(\sqrt{n})}$. Ainsi, si n est en raison inverse des longueurs, comme la théorie l'annonce, T fera comme les racines des longueurs des fils de suspension: comparons avec l'expérience.

Nous trouvons, *dixième expérience*, que le fil de laiton, n.^o 7, de 9 pouces de longueur, étant tendu par le poids d'une demi-livre, fait 20 oscillations en 110".

Nous trouvons, *treizième expérience*, que le même fil de laiton, n.^o 7, de 36 pouces de longueur, tendu par le poids de 2 livres, fait 20 oscillations en 222".

Ainsi les longueurs des fils sont entr'eux :: 1 : 4, tandis que les temps des oscillations des fils sont :: 1 : 2; ainsi l'expérience prouve que les temps d'un même nombre d'oscillations, sont, pour les mêmes fils tendus par les mêmes poids, comme la racine des longueurs de ces fils, ainsi que la théorie l'avoit annoncé.

Nous avons fait beaucoup d'expériences du même genre que les précédentes, qui ont toutes très-exactement confirmé cette loi. Nous n'avons pas cru nécessaire d'en grossir ce Mémoire.

X I I I.

De la force de torsion relativement à la grosseur des fils.

Nous venons de déterminer les loix de la force de torsion relativement à la tension & à la longueur des fils; il ne nous reste qu'à les déterminer relativement à la grosseur des mêmes fils.

Nous avons, dans les six premières expériences, trois fils de fer de différentes grosseurs & de même longueur; & dans les six expériences suivantes, trois fils de laiton de même longueur & de grosseurs différentes: mais comme nous avons le poids d'une longueur de 6 pieds de chacun de ces fils, il est facile d'en conclure le rapport de leur diamètre. Voici ce que le raisonnement doit faire prévoir; le *momentum* de la réaction de torsion doit augmenter, avec la grosseur des fils, de trois manières. Prenons pour exemple deux fils de même nature & de même longueur, que le diamètre de l'un soit double de celui de l'autre, il est clair que dans celui qui a un diamètre double, il y a quatre fois plus de parties tendues par la torsion, que dans celui qui a un diamètre simple; & que l'extension moyenne de toutes ces parties sera proportionnelle au diamètre du fil, de même

que le bras moyen du levier relativement à l'axe de rotation. Ainsi nous sommes portés à croire, d'après la théorie, que la force de torsion de deux fils de métal, de la même nature, de la même longueur, mais d'une grosseur différente, est proportionnelle à la quatrième puissance de leur diamètre, ou pour une même longueur au carré de leur poids. Comparons avec l'expérience.

Nous ne prendrons ici que les expériences où la tension est de 2 livres, pour pouvoir comparer tous les $n.$, les fils du $n.^\circ 1$ n'étant pas assez exactement tendus par le poids d'une demi-livre : nous avons

Fils de fer.	<i>Deuxième expérience.</i> Le fil de fer, $n.^\circ 12$, dont les 6 pieds de longueur pèsent 5 grains, donne 20 oscillations en... 242".
	<i>Quatrième expérience.</i> Le fil de fer, $n.^\circ 7$, dont les 6 pieds de longueur pèsent 14 grains, donne 20 oscillations en... 85".
	<i>Sixième expérience.</i> Le fil de fer, $n.^\circ 1$, dont les 6 pieds pèsent 56 grains, donne 20 oscillations en... 23".
Fils de laiton.	<i>Huitième expérience.</i> Le fil de laiton, $n.^\circ 12$, dont les 6 pieds pèsent 5 grains, a donné 20 oscillations en... 442".
	<i>Dixième expérience.</i> Le fil de laiton, $n.^\circ 7$, dont les 6 pieds pèsent 18 grains $\frac{1}{2}$, donne 20 oscillations en... 110".
	<i>Douzième expérience.</i> Le fil de laiton, $n.^\circ 1$, dont les 6 pieds pèsent 66 grains, donne 20 oscillations en... 32".

Pour déterminer, d'après ces expériences, la loi de la réaction de la force de torsion, relativement au diamètre du fil de suspension, supposons que

$$T : T' :: D^m : D'^m :: \varphi^{\frac{m}{2}} : \varphi'^{\frac{m}{2}},$$

où l'on suppose que T & T' représentent le temps d'un certain nombre d'oscillations pour un fil de métal, dont le diamètre est D & D' , & le poids pour une même longueur

ϕ & ϕ' ; m étant la puissance que l'on cherche à déterminer. De cette proportion, nous tirerons

$$m = \frac{2 (\log. T - \log. T')}{\log. \phi - \log. \phi'},$$

formule qu'il faut comparer avec l'expérience.

La deuxième expérience, comparée avec la quatrième, donne... $m = - 1,82$.

La deuxième expérience, comparée avec la sixième..... $m = - 1,95$.

La huitième expérience, comparée avec la dixième..... $m = - 2,04$.

La huitième expérience, comparée avec la douzième..... $m = - 2,02$.

D'où il résulte que

$$T : T' :: \frac{1}{D^2} : \frac{1}{D'^2} :: \frac{1}{\phi} : \frac{1}{\phi'}.$$

Mais la formule du mouvement oscillatoire

$$T = \left(\frac{M a^2}{2 \pi} \right)^{\frac{1}{2}} 180 \text{ degrés},$$

donne, dans les expériences précédentes, à cause de l'égalité des poids de tension, π proportionnel à $\frac{1}{T^2}$; ainsi la force de torsion, pour des fils de même nature, de même longueur, mais de grosseur différente, est comme la quatrième puissance du diamètre, ainsi que la théorie l'avait annoncé.

X I V.

Résultat général.

IL résulte donc de toutes les expériences qui précèdent, que le *momentum* de la force de torsion, est, pour les fils du même métal, en raison composée de l'angle de torsion de la quatrième puissance du diamètre, & inverse de la longueur du fil; en sorte que si l'on nomme l la longueur du fil, D son diamètre, B l'angle de torsion, l'on aura, pour l'expression qui représente la force de torsion, $\frac{\mu B D^4}{l}$, où μ est un coefficient constant qui dépend de la roideur

naturelle de chaque métal : cette quantité μ , invariable pour les fils du même métal, peut se déterminer facilement par l'expérience, comme on va le voir dans l'article suivant.

X V.

Valeur effective des quantités n & μ .

Nous avons vu, article VII, que $n = \frac{2P \cdot a^2}{3 \lambda}$, où P est le poids d'un cylindre, a son rayon, λ la longueur du pendule isochrone, avec les oscillations du cylindre, qui sont produites par la force de torsion.

Appliquons cette formule à la *deuxième expérience*, où le fil de fer, *n.º 12*, est tendu par un poids de 2 livres, dont le rayon est 9 lignes $\frac{1}{2}$, & où 20 oscillations se font en 242".

Comme le pendule, qui bat les secondes à Paris, est de 440 lignes $\frac{1}{2}$, le pendule isochrone, avec les oscillations du cylindre, sera $440 \frac{1}{2} \left(\frac{242}{20} \right)^2$; ainsi

$$n = \frac{2 \text{ liv. } (9\frac{1}{2})^2}{2 \cdot 440 \frac{1}{2} \left(\frac{242}{20} \right)^2} = \frac{1 \text{ liv.}}{715},$$

ainsi le *momentum* $n B$ du fil de fer, *n.º 12*, ayant 9 pouces de longueur, est égal à $\frac{1}{715}$ livres, multiplié par l'angle de torsion B , agissant à l'extrémité d'un levier d'une ligne de longueur.

Nous avons vu, dans les articles qui précèdent, que pour le même métal, il résultoit de la théorie & de l'expérience que les forces de torsion étoient en raison inverse de la longueur des fils de suspension & de la quatrième puissance du diamètre; Ainsi il est facile d'avoir une valeur déterminée, de la force de torsion d'un fil de fer, d'une longueur & d'une grosseur quelconque; en voici le calcul.

Le

Le pied cube de fer, pesant à peu-près 540 livres, & les 6 pieds de longueur du fil de fer, n.^o 12, pesant 5 grains, le diamètre de ce fil de fer est très-approchant d'un quinzième de ligne; ainsi le *momentum* de torsion d'un fil de fer, d'un quinzième de ligne de diamètre, est égal à $\frac{1}{715}$ livre, multiplié par l'angle de torsion, agissant à l'extrémité d'un levier d'une ligne de longueur.

XVI.

Comparaison de la roideur de torsion de deux métaux différens.

L'ON déduira facilement, de la théorie & des expériences qui précèdent, quel est, dans deux métaux différens, le fer, par exemple, & le cuivre jaune, le rapport de roideur de torsion: prenons le fil de fer, n.^o 12, que nous comparerons avec le fil de laiton, n.^o 12.

Nous venons de calculer à l'article précédent, la quantité n , pour le fil de fer, & nous l'avons trouvée $= \frac{1}{715}$ livre, multiplié par un levier d'une ligne.

Mais comme le fil de laiton, chargé du poids de 2 livres, fait 20 oscillations en 442", nous aurons, par la même formule pour le fil de laiton, $n' = \frac{1 \text{ liv. } (9 \div)^2}{440 \div (\frac{442}{20})^2}$; ainsi

$\frac{n}{n'} = (\frac{442}{242})^2 = 3,34$; ainsi la roideur du fil de fer, n.^o 12, est à la roideur du fil de laiton, n.^o 12, à peu-près :: $3 \frac{1}{3}$: 1.

Mais comme il y a peu de différence entre la pesanteur spécifique du fer & du cuivre, qui, suivant M. Musschembroek, sont :: 77 : 83, l'on peut supposer que le fil de fer, n.^o 12, & celui de cuivre, même numéro, ont à peu-

près le même diamètre ; ainsi pour les fils de fer & de cuivre du même diamètre, tout étant d'ailleurs égal, les roideurs de torsion sont :: $3\frac{1}{3}$: 1, c'est-à-dire qu'en tordant le fil de fer d'un cercle, l'on aura la même réaction de torsion, qu'en tordant le fil de cuivre de $3\frac{1}{3}$ cercles.

Si l'on veut ensuite comparer la roideur de torsion avec la force de cohésion, l'on remarquera que notre fil de fer portoit, au moment de sa rupture, 60 onces, que celui de cuivre ne portoit que 35 onces ; ainsi puisqu'ils ont à peu-près le même diamètre, leur force de cohésion étoit approchant :: 60 : 35, dans le temps que leur force de torsion vient d'être trouvée :: $3\frac{1}{3}$: 1.

Ce dernier résultat ne doit cependant être regardé que comme un cas particulier & non comme un résultat général. Nous verrons dans la deuxième section de ce Mémoire, que la force des métaux varie suivant le degré d'écroutissement & de recuit, & que toutes les expériences dont on s'est servi jusqu'ici pour déterminer la force des métaux, ne peuvent être regardées que comme des cas particuliers.

Mais ce que cette dernière observation semble indiquer ; & ce que la pratique confirme, c'est que si l'on veut soutenir un corps mobile sur la pointe d'un pivot, il y a de l'avantage à préférer un pivot d'acier ou de fer, à un pivot de cuivre, puisque sous le même degré de pression le fer fléchit beaucoup moins que le cuivre ; qu'ainsi le cercle de contact formé par la pointe du pivot, pressée par le corps qu'elle soutient, aura un moindre diamètre pour le fer que pour le cuivre, ce qui, tout étant d'ailleurs égal, diminue le *momentum* du frottement qu'il faut vaincre pour faire tourner un corps sur la pointe d'un pivot : nous aurons occasion par la suite de revenir sur cet article.

Par quelques expériences & par un calcul semblable à celui qui précède, nous avons trouvé qu'en suspendant un cylindre à un fil de soie, formé de plusieurs brins

réunis à l'eau bouillante, & assez fort pour porter jusqu'à 60 onces, ce fil de soie avoit 18 à 20 fois moins de roideur de torsion que le fil de fer qui portoit ce même poids au moment de la rupture.

X V I I.

Usage des expériences & de la théorie qui précède.

D'APRÈS la théorie qui précède, & les expériences sur lesquelles elle est fondée, l'on pourra mesurer des forces très-petites, qui exigent une précision que les moyens ordinaires ne peuvent pas fournir: nous allons en présenter un exemple.

X V I I I.

Balance pour mesurer le frottement des fluides contre les solides.

LA formule qui exprime la résistance des fluides contre un corps en mouvement, paroît composée de plusieurs termes, dont les uns dépendent du choc des fluides contre le corps solide, & dont les autres sont dûs au frottement du fluide: parmi les termes dûs au frottement, il y en a un qui dépend de l'adhérence, & que l'on croit constant; mais ce terme est si petit, que confondu dans les expériences avec les autres quantités qui dépendent du choc, il est très-difficile de l'évaluer: l'on peut voir les expériences que M. Newton a faites pour découvrir cette quantité constante. (*Livre II des Principes mathématiques de la Philosophie naturelle, Scholie du vingt-cinquième théorème.*)

La force de torsion donne un moyen facile de déterminer par l'expérience cette adhérence.

Dans un vase *ADBE*, fig. 3, rempli du fluide dont on veut déterminer l'adhérence, l'on suspend, au moyen d'un fil de cuivre, un cylindre *abcd*, de cuivre ou de

plomb; l'on place dessus le vase un cercle $A'Fb'$, divisé en degrés; ce cercle se trouve au niveau de l'extrémité d d'un index id attaché au cylindre.

Lorsque l'on fera tourner le cylindre autour de son axe vertical, sans le déranger de son à-plomb, l'on pourra observer, au moyen du petit index, de combien chaque oscillation est altérée: & comme la force de torsion du fil qui produit ces oscillations, est connue par les expériences qui précèdent; que l'on peut aussi connoître l'altération due à l'imperfection de l'élasticité, en faisant osciller le cylindre dans le vide ou même dans l'air; l'on peut espérer, par ce moyen, de trouver la quantité constante due à l'adhérence.

Exemple & Expérience.

J'AI suspendu dans un vase plein d'eau, à un fil de cuivre, n.^o 12, de vingt-neuf lignes de longueur, le cylindre de plomb pesant deux livres, qui nous a servi dans les expériences précédentes: le cercle AB , sur lequel l'on observoit les oscillations, avoit quarante-quatre lignes de diamètre; l'on a attendu, avant de commencer les observations, que les amplitudes des oscillations fussent diminuées au point que l'extrémité d de l'index ne parcourût sur le cercle qu'un arc d'une ligne & demie, répondant à peu-près à $3^d 5'$; & en observant la marche de l'index avec une loupe, l'on a aperçu distinctement quatorze oscillations avant que le mouvement fût éteint.

Résultat de cette Expérience.

Si la diminution successive de chaque oscillation est supposée constante, & qu'elle soit attribuée en entier à l'adhérence du fluide contre la surface du cylindre de plomb, l'on aura, art. VIII,

$$(A - S') = \left(\frac{1}{2}\right).$$

où $(A - S')$ est la diminution de chaque oscillation, $\mu(A - S)$ le *momentum* de la force de torsion, & μ le *momentum* de la force retardatrice dûe à l'adhérence.

Mais comme, d'après les observations des oscillations, l'arc parcouru étoit diminué d'une ligne & demie en quatorze oscillations, & que le rayon du cercle sur lequel s'observoit cette diminution, étoit de vingt-deux lignes; en supposant cette diminution constante, l'on aura l'angle $(A - S)$ dont l'amplitude diminue à chaque oscillation $= \frac{3}{2.22.14}$.

Mais nous avons trouvé, *art. XVI*, que pour un fil de laiton de neuf pouces de longueur, n.^o 12,

$$n = \frac{1 \text{ livre. } (9 \frac{1}{2})^2}{449 \frac{1}{2} \cdot (\frac{44^2}{20})^2};$$

& comme nous avons aussi trouvé que les forces de torsion sont proportionnelles à la longueur des fils de suspension, l'on aura pour notre fil de vingt-neuf pouces de longueur.

$$\mu = \frac{1}{3,155,000} \text{ livre} \times 1 \text{ ligne,}$$

c'est-à-dire, que le *momentum* de la force retardatrice constante μ , est à peu-près égal à un trois millionième de livre, suspendu à un levier d'une ligne: quantité qui auroit-été inappréciable par tout autre moyen que celui que nous venons d'employer.

Pour avoir actuellement la valeur de l'adhérence d'après cette expérience, il faut remarquer que la hauteur du cylindre de plomb, submergée par l'eau du vase, étoit de vingt-quatre lignes, & que le diamètre de ce cylindre étoit de dix-neuf lignes. Ainsi, en prenant $\frac{22}{7}$ pour le rapport de la circonférence au diamètre, la surface du cylindre submergée, étoit égale à $\frac{22}{7} \cdot 19 \cdot 24$; & comme le mouvement se fait ici autour de l'axe du cylindre,

254 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

dont le rayon est $9\frac{1}{2}$ lignes, si δ est l'adhérence, le *momentum* de l'adhérence autour de l'axe de rotation, sera $\delta \frac{22}{7} (19)^2 \cdot 12$. Il faut encore ajouter à cette quantité le *momentum* de l'adhérence du cercle qui forme la base du cylindre plongé dans l'eau, dont le *momentum*

$$= \delta \frac{22}{7} \cdot 19^1 \cdot \frac{19^1}{4} \cdot \frac{2}{3} \frac{19}{2},$$

en sorte que le *momentum* total de la résistance du fluide contre le cylindre sera

$$\delta \frac{22}{7} (19)^2 \cdot (12 + \frac{19}{12}) = \delta \cdot \frac{22}{7} \cdot (19)^2 \cdot (\frac{163}{12}).$$

Mais l'expérience nous a fait trouver ce même *momentum*

$$= \frac{1 \text{ livre}}{3,155,000} \cdot 1 \text{ ligne pour un pouce carré; ainsi}$$

$$\delta = \frac{1 \text{ livre}}{3,155,000} \cdot \frac{7 \cdot 12}{22 \cdot 163 \cdot (19)^2},$$

& pour un pied carré l'adhérence sera

$$\delta (144)^2 = \frac{1 \text{ livre}}{2345000},$$

en sorte que la résistance constante due à l'adhérence de l'eau pour une surface de 255 pieds, ne peut pas être évaluée plus d'un grain; ainsi il y a peu de cas où cette altération constante, si elle a lieu, ne puisse être négligée dans l'évaluation du frottement de l'eau. Nous n'avons fait aucun essai sur les autres fluides.

En donnant au cylindre des oscillations de deux ou trois cercles d'amplitude, & comparant les diminutions successives des amplitudes des oscillations avec les formules du mouvement oscillatoire altéré, j'ai cru apercevoir que dans les très-petites vitesses, ce frottement est comme les vitesses, & dans les grandes vitesses, comme le carré; mais ces expériences demandent un travail exprès, & d'être faites dans différens fluides.

XIX.

DEPUIS la lecture de ce Mémoire, j'ai construit, d'après la théorie de la réaction de torsion que je viens d'expliquer, une balance électrique & une balance magnétique; mais comme ces deux instrumens, ainsi que les résultats relatifs aux loix électriques & magnétiques qu'ils ont donnés, seront décrits dans les volumes suivans de nos Mémoires, je crois qu'il suffit ici de les annoncer.

XX.

SECONDE SECTION.

De l'altération de la force élastique dans les torsions des fils de métal. Théorie de la cohérence & de l'élasticité.

LORSQUE l'on tord les fils de fer ou de laiton, tendus, comme dans les expériences qui précèdent, par un poids, l'on observe deux choses; si l'angle de torsion n'est pas considérable, relativement à la longueur du fil de suspension, dans le moment où l'on lâche le poids, il revient à peu-près à la position qu'il avoit avant la torsion du fil de métal, c'est-à-dire, que le fil de suspension se détord de toute la quantité dont il a été tordu; mais si l'angle de torsion que l'on aura donné au fil de suspension, est très-grand, pour lors ce fil ne se détord que d'une certaine quantité, & le centre de réaction de torsion s'avancera de toute la quantité dont le fil ne sera pas détordu. C'est donc d'après ces deux considérations, qu'il faut diriger les expériences que nous devons faire dans cette section, ce qui demande deux suites d'expériences; la première, pour déterminer par la diminution des oscillations, de combien la force élastique de torsion est altérée dans le mouvement oscillatoire, quoique le centre de réaction de torsion ne soit pas déplacé; la seconde, pour déterminer le déplacement de ce centre de réaction, lorsque l'angle de torsion est assez grand pour que ce déplacement ait lieu.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Fil-de-fer, n.° 1, longueur, six pouces six lignes.

L'ON a pris un fil de fer de six pouces six lignes de longueur, il a été chargé d'un poids de deux livres, L même qui a servi dans les expériences de la section précédente. L'on a cherché, en faisant tourner ce cylindre autour de son axe pour tordre le fil de suspension, à déterminer de combien de degré l'amplitude diminueoit à chaque oscillation, & l'on a trouvé :

Premier essai, angle de torsion 90° perd 10° en $3\frac{1}{2}$ oscillat.

Deuxième essai..... 45 $10\frac{1}{2}$.

Troisième essai..... $22\frac{1}{2}$ 23 .

Quatrième essai..... $11\frac{1}{4}$ 46 .

Remarque sur cette Expérience.

Les diminutions des amplitudes des oscillations ont été très-incertaines, lorsque l'angle primitif de torsion a été de plus de 90 degrés; l'on a même observé que pour lors, en faisant tourner le cylindre autour de son axe, il ne revient pas à sa première position, & que la position respective des parties constitutives du fil a été altérée, & par conséquent, que son centre de réaction de torsion a resté déplacé: voici ce que l'expérience fournit sur ce déplacement.

X X I I.

Suite de la première Expérience.

Dans cette partie de la première expérience, l'on a cherché le déplacement du centre de torsion, suivant le degré de torsion que l'on a donné au fil de suspension.

Premier

Premier essai, en tordant de. $\frac{1}{2}C$	$\left. \begin{array}{l} \text{l'index ou le centre} \\ \text{de torsion a été} \\ \text{déplacé de.....} \end{array} \right\} \dots 8^d$	
Deuxième essai.....		1C..... 30.
Troisième essai.....	2.....	310.
Quatrième essai.....	3.....	1C + 300.
Cinquième essai.....	4.....	2 + 290.
Sixième essai.....	5.....	3 + 280.
Septième essai.....	6.....	4 + 260.
Huitième essai.....	10.....	8 + 240.

Neuvième essai. Ayant voulu continuer à tordre toujours dans le même sens de quinze nouveaux cercles, le fil a cassé au quatorzième. Après cette expérience, ce fil étoit droit & très-roide, il s'étoit séparé suivant sa longueur, en deux parties; examiné à la loupe, cette séparation étoit très-sensible, & il avoit exactement la figure d'une corde formée de deux torons.

X X I I I.

Remarque sur cette Expérience.

Cette première expérience & sa suite paroissent annoncer qu'au-dessous de 45 degrés, les altérations sont à peu-près proportionnelles aux amplitudes des angles de torsion, comme on le voit par les deuxième, troisième & quatrième essais de l'expérience première; qu'au-dessus de 45^d, les altérations augmentent dans un rapport beaucoup plus grand; que le centre de réaction de torsion ne commence à se déplacer que lorsque l'angle de torsion est à peu-près d'une demi-circonférence; que ce déplacement croît à mesure que l'on tord le fil; qu'il est assez irrégulier jusqu'à 1 cercle 10 degrés; que, passé ce terme de torsion, la

réaction de torsion reste à peu-près la même pour tous les angles de torsion : ainsi, par exemple, en tordant, dans le quatrième essai, de trois cercles, le centre de réaction de torsion se déplace d'un cercle $+ 300$ degrés, en sorte que la réaction de torsion n'a ramené le cylindre que d'un cercle 60 degrés. Dans le septième essai, nous voyons, qu'après avoir déjà éprouvé dans les essais antérieurs, un déplacement de plus de huit cercles, que six nouveaux cercles de torsion déplacent le centre de réaction de torsion de $4 C + 260$ degrés, en sorte que pour plus de quatorze cercles de torsion, la réaction de torsion n'est encore que d'un cercle plus 100 degrés ; ainsi elle ne diffère que d'un dixième de la réaction de torsion pour trois cercles de torsion que le quatrième essai nous a donnés d'un cercle $+ 60$ degrés : les expériences qui vont suivre éclairciront cette remarque.

X X I V.

DEUXIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de fer, n.° 7, longueur, 6 pouces 6 lignes.

L'ON a cherché, dans la première partie de cette expérience, de combien les amplitudes des oscillations diminuoient à chaque oscillation, lorsque le centre de torsion n'étoit pas encore déplacé.

Premier essai, angle de torsion 180° perd 10° en...	$3 \frac{1}{2}$ oscillat.
Deuxième essai.....	90..... 12.
Troisième essai.....	45..... 27.
Quatrième essai.....	$22 \frac{1}{2}$ 54.

Suite de cette deuxième Expérience.

Dans cette deuxième partie de la même expérience, l'on a cherché le déplacement du centre de torsion.

<i>Premier essai</i> , en tordant de 3 cercles	$\left\{ \begin{array}{l} \text{le centre de réaction} \\ \text{de torsion déplacé} \\ \text{de.....} \end{array} \right\}$	300°
<i>Deuxième essai</i>	4.....	1 C + 180.
<i>Troisième essai</i>	6.....	3 + 90.
<i>Quatrième essai</i>	8.....	5 + 90.
<i>Cinquième essai</i>	12.....	9 + 40.
<i>Sixième essai</i>	20.....	16 + 310.
<i>Septième essai</i>	30.....	26 C + 180.
<i>Huitième essai</i>	50.....	46 + 20.
<i>Neuvième essai</i> , au dix-septième cercle de torsion le fil a cassé.		

XXV.

TROISIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de fer, n° 12, longueur, 6 pouces 6 lignes.

LA première partie de cette expérience a été faite sous le même point de vue que la première partie des deux expériences qui précèdent.

<i>Premier essai</i> , angle de torsion	360° perd..	10° en..	1 oscillat.
<i>Deuxième essai</i>	180.....	10.....	2.
<i>Troisième essai</i>	90.....	10.....	5.
<i>Quatrième essai</i>	45.....	10.....	11.
<i>Cinquième essai</i>	22½.....	10.....	25.

Suite de cette troisième Expérience.

Déplacement du centre de torsion.

<i>Premier essai</i> , en tordant de 4 cercles	$\left\{ \begin{array}{l} \text{le centre de réaction} \\ \text{de torsion déplacé} \\ \text{de.....} \end{array} \right\}$	300°.
<i>Deuxième essai</i>	6.....	2 C + 40.
<i>Troisième essai</i> , aux six autres tours le fil a cassé.		

K k ij

LES expériences précédentes ont été continuées avec des fils de laiton, employés aux expériences de la première section.

QUATRIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton, n.° 1, longueur, 6 pouces 6 lignes.

Premier essai, en tordant de	180 ^d perd..	12 ^d en....	2 oscillat
Deuxième essai.....	90.....	10.....	6.
Troisième essai.....	45.....	10.....	16.
Quatrième essai.....	22½.....	10.....	40.
Cinquième essai.....	11¾.....	10.....	80.

Suite de la quatrième Expérience.

Déplacement du centre de torsion.

Premier essai, en tordant de	2 cercles	{ le centre de torsion a été déplacé de.. }	160 ^d .
Deuxième essai.....	4.....		
Troisième essai.....	6.....	3 C +	300.
Quatrième essai.....	10.....	7 C +	300.
Cinquième essai.....	20.....	17 C +	340.
Sixième essai, au vingt-huitième cercle de torsion le fil s'est rompu.			

CINQUIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton, n.° 7, longueur, 6 pouces 6 lignes.

Diminution des amplitudes dans les oscillations.

Premier essai, en tordant de	360 ^d perd..	10 ^d en...	2½ oscillat.
Deuxième essai.....	180.....	10.....	6.
Troisième essai.....	90.....	10.....	13.
Quatrième essai.....	45.....	10.....	31.
Cinquième essai.....	22½.....	10.....	72.

*Suite de la cinquième Expérience.**Déplacement du centre de torsion.*

En tordant de quatre cercles, le centre s'est déplacé de 220 degrés ; mais en voulant tordre de six cercles, le fil a cassé.

X X V I I.

DANS le fil employé à cette dernière expérience, la torsion altère moins les oscillations, & par conséquent la force élastique, que dans toutes les autres ; c'est ce qui résulte du grand nombre d'oscillations qui a lieu ici avant que le mouvement oscillatoire soit détruit ; c'est ce qui résulte également de la rupture soudaine de ce fil, sans pouvoir déplacer d'un cercle son centre de réaction. J'ai généralement trouvé que les fils de laiton, répandus dans le commerce, entre les n.^{os} 5 & 8, étoient ceux dont l'élasticité de torsion étoit la moins imparfaite : en comparant les fils de fer & de laiton sous les mêmes numéros, l'on trouve également que les fils de laiton ont une amplitude d'élasticité beaucoup plus étendue que les fils de fer.

Au surplus, l'expérience présente beaucoup d'irrégularités dans les résultats : deux bobines du même fil & du même numéro, ne donnent pas toujours le même déplacement au même angle de torsion, ce qui ne peut être attribué qu'à la manière dont les fils sont manufacturés, qu'à la plus ou moins grande pression qu'ils éprouvent en passant sous la lèvre de la filière, qu'au recuit qu'on leur fait éprouver pour réduire successivement le diamètre de numéro en numéro, du gros au petit.

X X V I I I.

Première Remarque.

MALGRÉ l'incertitude qui règne dans les expériences des oscillations pour les amplitudes des étendues, il paroît

qu'en dedans de certaines limites, ces altérations sont à peu-près proportionnelles à l'amplitude de l'oscillation, comme nous l'avons annoncé dans les remarques sur la première expérience, & comme toutes les autres le confirment. La résistance de l'air ne peut altérer que très-peu, dans nos expériences, l'amplitude des oscillations, je m'en suis assuré par le moyen suivant. Le poids de deux livres, qui a servi aux expériences de cette section, avoit 26 lignes de hauteur & 19 lignes de diamètre; j'ai formé avec un papier très-léger, une surface cylindrique du même diamètre que ce poids, mais qui avoit 70 lignes de hauteur; je faisois entrer une partie du cylindre de plomb dans mon enveloppe de papier, & je formois ainsi un cylindre de 78 lignes de hauteur, ou trois fois plus long que le premier, ce qui auroit dû tripler, dans le mouvement oscillatoire, les altérations dûes à la résistance de l'air; mais je n'ai jamais trouvé que ces altérations fussent d'un dixième plus considérable dans ce second cas que dans le premier, le plus souvent elles étoient égales; ainsi la résistance de l'air n'entre dans nos expériences, que pour des quantités que l'on peut négliger.

X X I X.

Seconde Remarque.

POUR former une balance de torsion, il faut toujours choisir les fils qui ont l'élasticité la moins imparfaite; les fils de laiton sont de beaucoup préférables à ceux de fer: le choix de la grosseur dépend des forces que l'on veut mesurer. J'ai une balance magnétique, qui sera décrite dans nos Mémoires, où je me suis servi alternativement d'un fil de laiton de 3 pieds de longueur, des n.^{os} 12 & 7; la force élastique de torsion est telle, qu'en tenant ces fils tordus de huit cercles, pendant trente heures, il n'y avoit pas un degré d'altération ou de déplacement dans le centre de torsion.

X X X.

Troisième Remarque.

DANS tous les fils de métal, la réaction de l'élasticité n'a qu'une certaine étendue: l'isochronisme des oscillations nous apprend que dans les premiers degrés de torsion, la force élastique est presque parfaite; mais au-delà de l'angle de torsion qui sert, pour ainsi dire, de mesure à la force élastique, le centre de réaction de torsion se déplace presque en entier de tout l'angle de torsion qui excède celui de la réaction de l'élasticité. Cependant, comme on peut le remarquer dans les expériences qui précèdent, l'amplitude de la réaction élastique n'est pas une quantité constante pour tous les angles de torsion, elle croît à mesure que la torsion augmente; moins l'élasticité première, dans le fil soumis à l'expérience, a d'étendue, plus cet accroissement est grand. Un fil de laiton, n.^o 1, de 6 pouces & demi de longueur, rougi au feu, pour lui faire perdre par le recuit, la plus grande partie de son élasticité, ne donnoit après cette opération, pour le premier cercle de torsion, que 50 degrés de réaction d'élasticité; mais il avoit acquis, après 90 cercles de torsion, une étendue d'élasticité de près de 500 degrés dans cet intervalle; du 2 au 3.^{me} cercle de torsion, la réaction de l'élasticité s'étoit accrue de 12 degrés; du 40 au 41.^{me} cercle de torsion, la même réaction s'étoit accrue de 6 degrés; & du 90 au 91.^{me} cercle de torsion, à peu-près d'un degré, en sorte que l'accroissement de la réaction élastique, après que le centre de réaction a été déplacé d'un certain angle, étoit à peu-près en raison inverse de l'angle de déplacement. Il faut avertir qu'après ces 90 cercles de torsion, j'ai voulu tordre de 50 autres cercles le même fil, mais qu'il s'est rompu au 49.^{me}, en sorte que ce fil, avant de se rompre, pouvoit être tordu de 140 cercles. Si l'on

compare ce résultat avec la suite de la première expérience, où le même fil, n.^o 1, n'avoit pas été recuit, l'on trouvera qu'après 25 cercles de torsion, la réaction de l'élasticité étoit de 480 degrés, qu'en tordant de 15 nouveaux cercles, le fil s'est cassé; ce dernier fil ne pouvoit donc éprouver, sans se rompre, que 40 cercles de torsion. En suivant dans cette expérience la marche de la réaction élastique, l'on en déduira qu'au point de rupture, cette réaction étoit à peu-près égale à celle du fil recuit dans le même point de rupture; d'où il paroîtroit que l'on est en droit de conclure que par la seule torsion l'on peut donner à un fil recuit toute l'élasticité dont il peut être susceptible, & que l'écroutissement ne peut rien y ajouter; en sorte que réciproquement, si en passant à la filière, ou par un autre moyen quelconque, l'on avoit pu donner à notre fil de laiton un écroutissement tel, que la réaction d'élasticité eût été de 520 degrés, qui me paroît être celle de nos deux fils au moment de la rupture, pour lors la réaction élastique eût été portée à son *maximum* par cette première opération: il n'y auroit plus eu de déplacement possible dans le centre de réaction de torsion; mais toutes les fois que l'on auroit fait éprouver à ce fil une torsion de plus de 520 degrés, il se seroit rompu.

X X X I.

Quatrième Remarque.

D'APRÈS les expériences qui précèdent, voici, à ce qu'il paroît, comme l'on peut expliquer l'élasticité & la cohérence des métaux. Les parties intégrantes du fil de fer ou de laiton, ou d'un métal quelconque, ont une élasticité que l'on peut regarder comme parfaite, c'est-à-dire, que les forces nécessaires pour comprimer ou dilater ces parties intégrantes, sont proportionnelles aux dilatations ou compressions qu'elles éprouvent; mais elles ne sont liées entre elles

elles que par la cohérence, quantité constante & absolument différente de l'élasticité. Dans les premiers degrés de torsion, les parties intégrantes changent de figure, s'allongent ou se compriment, sans que les points par où elles adhèrent entr'elles, changent de place, parce que la force nécessaire pour produire ces premiers degrés de torsion, est moins considérable que la force d'adhérence; mais lorsque l'angle de torsion devient tel, que la force avec laquelle ces parties sont comprimées ou dilatées, est égale à la cohérence qui unit ces parties intégrantes, pour lors elles doivent ou se séparer ou glisser l'une sur l'autre. Ce glissement de parties, a lieu dans tous les corps ductiles; mais si par ce glissement de parties les unes sur les autres, le corps se comprime, l'étendue des points de contact augmente, & l'étendue du champ d'élasticité devient plus grand. Cependant comme ces parties intégrantes ont une figure déterminée, l'étendue des points de contact ne peut augmenter que jusqu'à un certain degré, au-delà duquel ce corps se rompt; c'est ce qui explique les effets détaillés dans l'article qui précède. Ce qui prouve encore qu'il faut distinguer la cause de l'élasticité, de l'adhérence, c'est que l'on peut faire varier la cohérence à volonté par le degré de recuit, sans altérer pour cela l'élasticité. C'est ainsi que lorsque je faisois recuire à blanc mon fil de cuivre, n.^o 1 des expériences précédentes, il perdoit une grande partie de sa force de cohérence : avant d'être recuit, il portoit au point de rupture 22 livres, & après le recuit il portoit à peine 12 à 14 livres; mais quoique l'adhérence fût presque diminuée de moitié par le recuit, & que l'amplitude d'élasticité fût presque diminuée dans la même proportion, cependant dans toute l'étendue de réaction élastique qui restoit au fil recuit, l'élasticité étoit la même, à angle égal de torsion, que dans le même fil non recuit, puisqu'en suspendant à l'un & à l'autre le même poids, le temps d'un même nombre d'oscillations étoit exactement égal dans les deux cas.

X X X I I.

UN effet assez curieux du rapprochement des parties dans la torsion des fils de métal; c'est celui qui a lieu lorsque l'on tord un fil de fer, qui par cette seule opération acquiert par le rapprochement des parties, la qualité de prendre le magnétisme à un plus haut degré qu'il ne l'avoit auparavant. Voici ce que l'expérience m'a appris à ce sujet; j'ai pris un fil de fer, tel qu'on les trouve répandus dans le commerce, de la grosseur de ceux qui servent pour les petites sonnettes; une longueur de six pouces, pesoit 57 grains; ce fil de six pouces, aimanté & suspendu horizontalement par un fil de soie détordu & très-fin, faisoit une oscillation en 18 secondes: ce même fil de six pouces de longueur, tordu jusqu'au point de rupture, & aimanté comme la première fois à saturation, par la méthode de la double touche, faisoit une oscillation en 6 secondes; en sorte que le *momentum* de la force directrice pour deux aiguilles égales & semblables, étant comme l'inverse du carré du temps d'un même nombre d'oscillations, le *momentum* magnétique de l'aiguille tordue, étoit neuf fois plus considérable que celui de l'aiguille non tordue: j'aurai occasion de revenir sur cet article dans un autre Mémoire.

X X X I I I.

POUR confirmer toute la théorie qui précède relativement à la cohérence & à l'élasticité, j'ai fait l'expérience suivante.

L'on a fixé, *fig. 4*, au moyen d'une agrafe *CD*, avec une vis *V*, une lame d'acier *AB*, sur le bord d'une table très-solide; cette lame étoit prise & serrée dans sa partie *Aa*, entre deux plaques de fer *E* & *F*, par la vis *V*: cette lame avoit 11 lignes de large, & demi-ligne d'épaisseur; depuis le point *a* jusqu'au point *B*, où étoit suspendu le poids *P*, il y avoit sept pouces de distance: l'on mesuroit sur la règle verticale *rg*, de combien le poids *P*,

faisoit baisser la lame AB à son extrémité B . Voici le détail des résultats, qui ont eu lieu suivant les différens poids, dont la lame étoit chargée.

L'on a fait rougir la lame à blanc, & on lui a donné une trempe très-roide; ensuite l'on a attaché en B à sept pouces du point a , différens poids. L'extrémité B a baissé,

Avec un poids d'une demi-livre de..... 8 lignes.

Avec un poids d'une livre de..... $15\frac{1}{2}$.

Avec un poids d'une livre & demie de..... $23+$.

L'on a pris cette même lame, & on l'a fait chauffer jusqu'à ce qu'elle eût pris la couleur violette, & qu'elle fût revenue à la consistance d'un excellent ressort; & l'on a trouvé également, qu'en la chargeant comme la première, l'extrémité B a baissé,

Avec $\frac{1}{2}$ livre de..... 8 lignes.

Avec 1 livre..... $15\frac{1}{2}+$

Avec $1\frac{1}{2}$ livre..... $23+$.

Enfin l'on a fait rougir cette même lame à blanc, & on l'a laissé refroidir très-lentement; & l'on a eu, en chargeant l'extrémité B , exactement les mêmes résultats que dans les deux expériences qui précèdent.

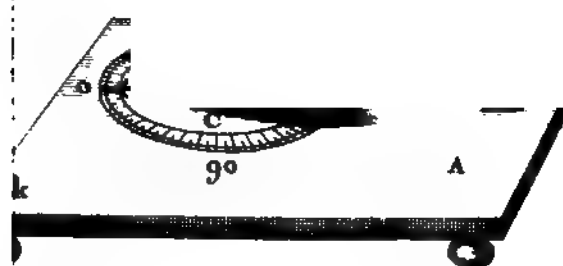
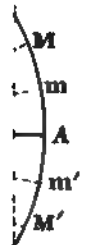
Il nous paroît que ces trois expériences prouvent d'une manière incontestable, que dans quelque état que se trouve la lame, les premiers degrés de sa force élastique ne sont nullement altérés; puisqu'en tenant compte du bras de levier, qui diminue à mesure que la lame est chargée, les mêmes poids la fléchissoient dans les trois états également & proportionnellement à la charge; que lorsqu'on ôtoit ces poids, elle reprenoit exactement sa première position horizontale.

J'ai voulu voir ensuite, quelle étoit la force de cette lame dans ces trois états différens; & dans le cas où le

centre de flexion commenceroit à se déplacer, quel seroit le degré de flexion où la lame commenceroit à être pliée sans revenir à sa première position. Voici le résultat de cette expérience.

J'avois fait tirer d'une planche de tôle d'acier d'Angleterre, trois lames exactement semblables à celle de l'expérience qui précède : une de ces lames avoit été trempée très-roide, la seconde étoit revenue à la consistance d'un excellent ressort ; & la troisième avoit été recuite blanc, & refroidie lentement. J'attachois, *fig. 4*, un poids en *d* à 2 pouces $\frac{1}{2}$ de distance du point *a*, & j'avois soin d'exercer la traction toujours perpendiculairement à la direction de la lame. Voici ce que l'on a observé.

La lame trempée très-roide, se rompoit sous une traction de six livres ; mais sous quelque angle qu'elle fût fléchie, au-dessous de celui de rupture, elle reprenoit exactement sa première position. La lame revenue couleur violette, formant un excellent ressort, ne se rompoit que sous une traction de dix-huit livres ; elle se plioit jusqu'au point de rupture, d'un angle à peu-près proportionnel à l'angle de torsion, & sous quelques angles qu'elle fût fléchie avant celui de rupture, lorsqu'on la lâchoit, elle reprenoit sa première position. La lame recuite à blanc & refroidie lentement, se plioit jusqu'à une traction de cinq à six livres, proportionnellement à cette force de traction, & d'un angle absolument égal sous la même force que dans l'état de trempe & de ressort ; mais en tirant ensuite toujours perpendiculairement à la direction de la lame, pour conserver le même levier, avec une force de sept livres, on la plioit sous tous les angles, sans qu'il fût besoin d'augmenter cette force : en la lâchant, elle se relevoit seulement de la quantité dont elle avoit été primitivement fléchie par une traction de six livres ; en sorte que l'angle de réaction de flexion, se trouvoit changé de tout l'angle dont on l'avoit fléchi avec une force plus grande que sept livres.



—

—

—

—

—

—

—

Ces dernières expériences nous ramènent aux mêmes résultats que celles qui ont précédé. Il est clair que pour avoir une idée de ce qui arrive dans la flexion des métaux, il faut distinguer la force élastique des parties intégrantes, de la force d'adhérence qui réunit ces parties entr'elles: la force élastique dépend, comme nous l'avons déjà dit, de la compression ou dilatation que les parties intégrantes éprouvent, & est toujours proportionnelle aux tractions. Ces parties intégrantes ne sont altérées, ni par la trempe ni par le recuit, puisque nous venons de voir que dans ces différens états, l'élasticité est la même sous les mêmes degrés de flexion; mais ces parties intégrantes, ne sont liées entr'elles que par un certain degré d'adhérence qui dépend probablement de leur figure & de la portion respective des différens fluides dont leurs pores sont remplis, ce qui varie suivant la trempe & le recuit. Dans l'acier trempé roide, & dans les bons ressorts, les molécules intégrantes ne peuvent ni glisser l'une sur l'autre, ni éprouver le moindre déplacement, sans que le corps ne se rompe; mais dans les corps ductiles, dans les métaux recuits, ces parties peuvent glisser l'une sur l'autre, & se déplacer, sans que l'adhérence en soit sensiblement altérée.

Ce que nous venons d'expliquer pour les métaux, paroît pouvoir s'appliquer à tous les corps; leurs parties sont toujours d'une parfaite élasticité, mais les corps sont durs, mous ou fluides, suivant l'adhérence de ces parties intégrantes. Si dans les corps durs, elles peuvent glisser l'une sur l'autre, sans que leur distance soit sensiblement altérée, le corps sera ductile ou malléable; mais si elles ne peuvent pas glisser l'une sur l'autre, sans que leur distance respective soit sensiblement altérée, le corps se rompra lorsque la force avec laquelle le corps sera tiré ou comprimé, sera égale à l'adhérence.



O B S E R V A T I O N S

S U R L E S S C H O R L S .

Par M. l'abbé H A Ü Y.

Lû
le 28 Juillet
1784.

ON a donné le nom de *Schorls* à une multitude de substances très-différentes les unes des autres par leur forme & leur aspect. La Minéralogie ne fournit aucun caractère extérieur qui puisse convenir à toutes ces substances. Plusieurs Chimistes célèbres, entr'autres M.^r Bergmann & Kirwen, nous ont donné l'analyse des *schorls*; mais comme ils n'ont point fait connoître par des descriptions nettes & précises les divers corps sur lesquels ils ont opéré, on ne peut savoir si les résultats de leur analyse s'étendent à tous les minéraux que l'on a compris sous le nom de *schorls*.

Je me suis occupé depuis quelque temps de la structure des cristaux de ce genre, & quoique je sois encore éloigné du terme de mon travail, qui exige une longue suite de recherches délicates, je crois cependant avoir déjà saisi quelques points fixes pour établir des distinctions marquées entre plusieurs des substances dont il s'agit. Je me bornerai à en citer ici deux des plus remarquables, savoir le *schorl* noir à six pans, terminé par des sommets à trois faces romboïdales; & le *schorl* blanc, qui se présente assez communément sous la forme d'un cristal à dix pans, terminé par des sommets à deux faces. Le premier de ces cristaux se divise nettement par des sections parallèles à quatre de ses pans, dont les inclinaisons respectives sont de 120^{d} & 60^{d} . Les cristaux, appelés *schorls blancs*, se divisent aussi parallèlement à quatre de leurs pans, sous les mêmes angles de 120 — 60^{d} , ce qui semble d'abord

rapprocher ces cristaux du schorl noir; mais, 1.^o les deux coupes sont également nettes & brillantes dans ce dernier cristal, au lieu que dans le schorl blanc, l'une des deux résiste beaucoup plus que l'autre à l'instrument tranchant, & présente un poli beaucoup plus terne; 2.^o on peut faire, dans le cristal appelé *schorl blanc*, des coupes très-faciles & d'un poli très-vif, parallèlement à l'une des faces du sommet, tandis que le schorl noir n'admet point de pareilles coupes, sur quoi je remarquerai que les sections ne m'ont jamais paru varier dans toutes les substances d'un même genre dont j'ai examiné la structure, quelque différentes que fussent leurs formes.

Ces observations m'ont fait présumer d'abord, que les cristaux, connus sous le nom de *schorl blanc*, avoient une toute autre structure que les cristaux de schorl noir, d'où il suivroit qu'ils sont aussi très-vraisemblablement d'une nature différente. J'ai cherché ensuite s'il n'y avoit point quelque substance dont la structure eût déjà été expliquée, & à laquelle on pût rapporter les cristaux dont il s'agit, & j'ai trouvé qu'ils admettoient les mêmes divisions que les cristaux de spath étincelant, & que leurs formes, dont quelques-unes s'écartent sensiblement de celles de ce même spath, pouvoient cependant y être ramenées d'après les loix de décroissement que j'ai reconnues dans un grand nombre de cristaux, autant que j'ai pu en juger sur de petits objets qui n'ont communément qu'une ou deux lignes d'épaisseur.

Quant aux autres qualités sensibles des cristaux dont je viens de parler, elles concourent à favoriser le rapprochement indiqué. Les cristaux appelés *schorls blancs* ont à peu près la même teinte, la même dureté & le même poli que des fragmens de spath étincelant blanchâtre, auxquels je les ai comparés.

272 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Tels sont les aperçus auxquels m'ont conduit mes premières recherches sur les schorls. Je me propose de donner des Mémoires plus détaillés sur cette matière, lorsque j'aurai pu me procurer des cristaux en assez grand nombre & d'une forme assez prononcée, pour porter dans ce travail la précision géométrique, qui seule peut imprimer le caractère de la certitude à la nouvelle distribution que je propose.

MÉMOIRE

M É M O I R E
S U R L A S T R U C T U R E
D E S C R I S T A U X D E F E L D - S P A T H .

Par M. l'Abbé H A Ü Y.

ON fait que le Feld-spath, ou spath étincelant, est une des principales parties composantes de ces pierres mélangées, connues sous le nom de *granits*, & répandues si abondamment dans la Nature, où l'on croit qu'elles forment le noyau des plus hautes montagnes. Comme ce spath ne se trouve communément que par fragmens dans le granit, ainsi que dans les porphyres, serpentins, &c. on ne lui a reconnu pendant long-temps d'autre forme que celle de ces fragmens dont Vallerius dit qu'ils sont cubiques ou rhomboïdaux (a), sans doute parce qu'ils ont des faces rectangles, & d'autres en losange. Ces figures avoient été remarquées sur-tout dans les serpentins & les ophites travaillés par l'art, où le spath forme souvent des taches quadrilatères qui tranchent sur la couleur de la matière enveloppante.

Là
le 26 Juin
1784.

M. Desmarest, de cette Académie, parmi plusieurs productions du règne minéral, inconnues jusqu'alors, qu'il a recueillies dans ses voyages, rapporta, en 1770, deux variétés très-intéressantes du feld-spath, dont il avoit trouvé l'une parmi les laves de l'Auvergne, & l'autre dans le Limosin. M. Desmarest a déposé au cabinet du Roi un très-beau cristal de cette dernière variété, qui est en prisme à six pans; la première variété est aussi prismatique, mais ses pans sont au nombre de dix: l'une &

(a) *Systema mineralog.* tom. I, p. 204.

l'autre seront décrites plus au long dans ce Mémoire, comme formes secondaires du feld-spath.

En réunissant les formes dont il s'agit, à celles qui ont été indiquées & décrites par le P. Pini, Professeur d'histoire naturelle à Milan, dans le Mémoire qu'il a publié en 1779, on a l'une des plus nombreuses suites de variétés qui ait été encore observée dans les cristaux d'un même genre. Pour ne point m'engager dans un détail superflu, je réduis toutes les formes du feld-spath, à trois principales, je veux dire celle qui est en prisme à quatre pans, & les deux qui ont été découvertes par M. Desmarest. Il sera aisé, avec un peu d'observation & d'habitude, de ramener les autres à ces deux dernières, dont elles ne s'écartent souvent que par des dimensions respectives différentes, qui font anticiper quelques-unes des faces sur les voisines, & diversifient l'aspect de certains cristaux que l'on reconnoît, par un examen plus approfondi, pour avoir été travaillés en quelque sorte sur un modèle commun.

Outre que les cristaux de feld-spath méritent déjà de fixer l'attention des Naturalistes, pour cette seule raison qu'ils appartiennent à l'une des substances les plus intéressantes du règne minéral, j'ai été encore excité à faire part à l'Académie de mon travail sur cet objet, par les nouvelles preuves qu'il m'a paru fournir des principes que j'ai exposés dans l'essai d'une théorie sur la structure des cristaux, publié vers la fin de l'année 1783.

Je n'ai pas encore vu le feld-spath sous sa forme primitive simple & dégagée de toutes facettes accidentelles. Cette forme seroit celle d'un prisme quadrilatère dont les pans feroient, par leurs inclinaisons respectives, des angles de 120^{d} — 60^{d} , & dont les bases seroient perpendiculaires sur deux pans opposés du prisme, & inclinées sur les deux autres pans, de $111^{\text{d}}29'30''$, d'une part; & de $68^{\text{d}}30'30''$, de l'autre, ainsi que je le prouverai plus bas.

FORMES SECONDAIRES.

Feld-spath en prisme oblique, quadrangulaire & rectangle.

Développement. Deux rectangles situés aux deux bases du prisme; deux nouveaux rectangles, formant deux des pans opposés du même prisme; deux parallélogrammes obliques *MRKL* (fig. 1), qui en forment les deux autres pans.

Angles des parallélogrammes obliques;

$$RML = LKR = 115^{\text{d}} 0' 8'',$$

$$MRK = MLK = 64^{\text{d}} 59' 52''.$$

Les prismes que je viens de décrire, se divisent; 1.^o parallèlement à leurs bases & à ceux de leurs pans qui sont des rhombes allongés; 2.^o parallèlement à deux plans qui feroient avec ces rhombes, des angles de $120^{\text{d}} - 60^{\text{d}}$: ces dernières sections sont beaucoup plus difficiles à obtenir que les quatre autres, & présentent un poli beaucoup plus terne & plus mat. Nous verrons bientôt les conséquences qui résultent de cette observation, relativement aux dimensions respectives des faces de la molécule constituante.

Quant à la loi de décroissement, qui a lieu dans ce cristal, il sera aisé de la déterminer d'après la structure des variétés suivantes.

Feld-spath à 10 pans, avec des sommets à deux faces & deux facettes (b). Fig. 3.

Développement. Deux hexagones irréguliers, tels que *girkme*; quatre trapèzes, *oirn*, *edqm*, &c. disposés des deux côtés des hexagones *girkme*, de manière que leurs

(b) Je supprime ici, pour ne point trop compliquer la description du cristal, deux autres facettes, que l'on observe très-souvent à la place des angles solides *e*, *g*: je reviendrai dans la suite sur ces facettes.

angles, respectivement égaux, sont tournés en sens contraire; quatre autres trapèzes *sonp*, *dxlq*, &c. disposés pareillement dans des situations renversées; deux pentagones, tels que *zasoc*, situés chacun à l'un des sommets du cristal & parallèles entr'eux; deux ennéagones, tels que *zbfhxdeg*, formant les facettes en biseau des sommets.

Angles de l'hexagone *girkme*, $ige = rkm = 99^{\circ} .41'.8''$. $rig = kme = 115^{\circ} .0'.8''$. $kri = gem = 145^{\circ} .18'.44''$.

Angles des trapèzes *oirn*, *edqm*. *ion* ou *dgm* $= 81^{\circ} .35'.32''$. *oir* ou *emq* $= 98^{\circ} .24'.28''$. *irn* ou *dem* $= 38^{\circ} .37'.58''$. *onr* ou *edq* $= 141^{\circ} .22'.2''$.

Angles des trapèzes *sonp*, *dxlq*. *son* ou *dql* $= 76^{\circ} .52'.28''$. *osp* ou *xlq* $= 103^{\circ} .7'.32''$. *onp* ou *xdq* $= 54^{\circ} .9'.22''$. *npf* ou *dxl*. $125^{\circ} .50'.38''$.

Angles du pentagone *zasoc*. $aso = 115^{\circ} .0'.8''$. $faz = soe = 122^{\circ} .29'.56''$. $azc = ocz = 90^{\circ}$.

Angles de l'ennéagone *zbfhxdeg*. $dxh = 89^{\circ} .10'.32''$. $edx = fhx = ged = bfh = 157^{\circ} .42'.22''$. $cge = zbf = 135^{\circ} .24'.42''$. $gcz = bzc = 134^{\circ} .35'.18''$.

Angles des trapèzes *coig*. $cgi = 83^{\circ} .7'.3''$. $gio = 135^{\circ} .36'.45''$. $coi = 44^{\circ} .23'.15''$. $gco = 96^{\circ} .52'.57''$.

Les cristaux de cette forme se divisent parallèlement aux hexagones *girkme*, aux pentagones *zasoc*, & aux trapèzes *dxlq*: ces dernières divisions sont les moins nettes. On voit par-là ce qu'il y auroit à faire pour mettre à découvert le noyau prismatique qui représente la forme primitive. Je ne m'arrêterai point ici à décrire la structure des différentes lames que l'on détache à l'aide des sections indiquées. Il sera aisé, d'après ce que je dirai dans la suite,

de concevoir que chacune de ces lames n'est qu'un assemblage de molécules constituantes parfaitement semblables entr'elles, comme cela a lieu pour tous les autres cristaux dont j'ai exposé la structure dans l'ouvrage cité.

Cherchons maintenant les dimensions respectives des molécules & les loix de décroissement qu'elles subissent dans les lames appliquées sur le noyau. Les plans des hexagones *igemkr*, & ceux des trapèzes *dxiq*, *sonp*, &c. étant censés prolongés jusqu'à ce qu'ils se rencontrent, forment une espèce de prisme hexagone, dans lequel tous les pans adjacens ont leurs inclinaisons respectives égales entr'elles. De plus, les pans *oirn*, *edqm*, &c. font avec les pans voisins, des angles pareillement égaux de part & d'autre. Cela posé, soit *acdgefmymno* (fig. 4), la coupe horizontale géométrique du prisme. Les angles *oac*, *yfe*, & ceux qui sont formés par *ac*, avec *dg*, par *ao*, avec *nm*, &c. étant tous sensiblement égaux entr'eux, auront chacun pour mesure 120 degrés: de plus, puisque l'on a $acd = dge = gef$, &c. chacun de ces derniers angles sera de 150 degrés. D'après ces données, la supposition la plus naturelle & qui m'a paru la plus propre à expliquer, par des loix régulières de décroissement, les positions des diverses faces du cristal, & en même-temps à rendre raison de la différence de poli entre les coupes que l'on peut y faire, est celle où le grand côté *su* du rhombe alongé *krus*, est double du petit côté *ru*. Dans cette hypothèse, la position des côtés *ca*, *fy*, résulte d'une loi de décroissement par deux rangées de molécules en allant de *f* vers *B*, & de *a* vers *C*; celle des côtés *on*, *ge*, est donnée par une semblable loi; celle des côtés *cd*, *my*, résulte d'une loi de décroissement double de la précédente, c'est-à-dire, par quatre rangées de molécules (*c*). Enfin les côtés

(*c*) J'ai remarqué en général, que ces décroissemens moins communs, se faisoient le plus souvent sur les faces latérales des cristaux: mais le rapport que j'ai adopté ici entre *su* & *ru*, donne

ao , mn , fe , dg , étant parallèles aux faces mêmes des molécules, ne sont sujets à aucune loi de décroissement: On voit par-là, que tout est parfaitement semblable dans les parties du cristal, situées sur les parallélogrammes $fBAa$ d'une part, & $fDCa$ de l'autre, quoique les décroissemens qui donnent les côtés correspondans entr'eux se fassent suivant des loix différentes. L'uniformité qui en résulte, est une suite des propriétés des angles de 120^d & 60^d (d).

En effet, dans le triangle acp , nous avons $cap = 60^d$, $pcp = pa$; d'où il suit, que $acp = 60$ degrés: d'ailleurs, on a aussi $pcx = 60^d$, & $dcx = 30^d$, à cause de $cx = 2xd$; donc, l'angle acd sera de $60^d + 60^d + 30^d = 150^d$. On trouvera de même, que les angles aon , nmy , fym , feg sont de 150 degrés, & que les angles oac , yfe sont de 120 degrés, comme les donne l'observation.

Il suit de-là, que l'épaisseur rc d'une des molécules, est à sa largeur ru , dans le rapport de $\sqrt{3}$ à 1 , ou de 3 à $\sqrt{3}$. Supposons que la figure 2 représente cette molécule qu'il faut concevoir située par rapport au cristal, fig. 3, de manière que $GOBR$ soit parallèle à $zasoc$, $GOAD$ parallèle à $igemkr$, & $BOAH$ parallèle à $dxlq$; ayant mené les lignes Gp , pL , CS , perpendiculaires, l'une sur OA , l'autre sur BH , & la troisième sur GO , on aura, suivant ce qui vient d'être dit, $GP = \sqrt{3}$, $CS = 3$, & $PL = 2\sqrt{3}$.

Cherchons maintenant la valeur de CA . hauteur du parallélogramme $GOAD$. J'ai observé que l'angle formé

pour toutes les faces des sommets, dans les différentes variétés du feld-spath, des loix ordinaires de décroissement, par une & par deux rangées de molécules.

variété, la position des faces inclinées par rapport aux bases du prisme, est indiquée par la ligne oc , perpendiculaire sur oy ; d'où l'on conclura aisément que les décroissemens qui donnent ces mêmes faces, se font par une rangée de molécules.

(d) Dans le cristal de la première

par le pentagone *zasoc* (fig. 3) avec le trapèze *coig*, étoit sensiblement égal à celui que forme ce même trapèze avec le plan de l'hexagone *girkme*. Supposons que les décroissemens qui donnent le trapèze *coig*, se fassent par des soustractions d'une simple rangée de molécules (nous verrons bientôt cette hypothèse se vérifier par l'accord des calculs avec l'observation) : d'après l'égalité des angles cités, il est facile de voir que l'on aura la hauteur *CA* du rhombe *GOAD* (fig. 2) égale à la hauteur *CS* du rhombe *GOBR*; donc $CA = 3$.

Il faudroit maintenant connoître un des angles du rhombe *GOAD*, d'où l'on déduiroit tous les autres angles-plans de la molécule constituante, ainsi que ceux du cristal, fig. 3. Soit *OGD* l'angle qu'il s'agit de déterminer: cet angle est le même que *rig* (fig. 3); or, d'après les mesures prises sur le cristal, l'angle *rig* est sensiblement égal à l'angle *osa* (fig. 5) au sommet du pentagone *zasoc*. Concevons que *aso* (fig. 5) soit le même triangle isocèle que l'on auroit, en faisant passer une droite par les points *a, o*, (fig. 3). Le prisme du cristal étant supposé dans une situation verticale, imaginons un second plan triangulaire isocèle, dont le sommet soit en *s*, & qui s'abaisse au-dessous du plan *aso*, en prenant une position horizontale; soit *tsu* (fig. 5) ce dernier plan, dans lequel il faut concevoir *tu* égale à la base *ao* du triangle *aso*. Menons les hauteurs *fy*, *fk* des deux triangles; menons aussi *ky*: il est aisé de voir que l'angle *fyk* est égal au supplément de *gir* (fig. 3); donc, cet angle sera aussi le supplément de *aso* (fig. 5); donc, ayant prolongé *as* indéfiniment, & mené la perpendiculaire *on*, on aura $syk = osn$: d'ailleurs, les deux triangles *sky*, *son* sont rectangles; donc, ils sont semblables. Remarquons maintenant que l'angle *ust* étant égal à celui que forment sur le prisme de la figure 3, les pans qui donnent l'hexagone régulier, on a $ns = 2sk$; d'où l'on tire $sk = ku\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Cela posé, à cause des triangles semblables *ksy*, *son*,

on a $on : os :: sk : sy$, ou bien $on : os :: ku\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)} : sy$
 $:: \frac{1}{3}ao\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)} : sy$. De plus, $os = \sqrt{[(on)^2 + (ns)^2]}$;
 substituant, & élevant tout au carré, $(on)^2 : (on)^2 + (ns)^2$
 $:: \left(\frac{1}{3}\right) : (ao)^2 : (sy)^2$.

D'ailleurs, $(ns)^2 = (os)^2 - (on)^2$: donc, $(on)^2$
 $: (os)^2 :: \frac{1}{12}(ao)^2 : (sy)^2$. Maintenant, $on \times os = sy \times ao$;
 donc, $(on)^2 = \frac{(sy)^2 \times (ao)^2}{(os)^2}$: substituant, la proportion
 deviendra $\frac{(sy)^2 \times (ao)^2}{(os)^2} : os :: \frac{1}{12}(ao)^2 : sy^2$; d'où l'on tire
 $sy = os \sqrt[4]{\left(\frac{1}{12}\right)}$.

Maintenant, si l'on prend pour le rayon r la ligne os ,
 alors sy sera le sinus de l'angle soy ; donc $\log. \sin. soy$
 $= \log. r + \frac{1}{4} \cdot \log. \frac{1}{12} = 97302047$, qui répond à 32^d
 $29' 56''$; donc, puisque le triangle aos est isocèle, on
 aura $aso = 115^d . 0' 8''$. Cette valeur sera aussi celle
 de l'angle OGD (fig. 2), & l'une & l'autre se trouvent
 confirmées par les mesures prises sur le cristal.

D'après ces données, il sera facile de trouver le déve-
 loppement de la molécule constituante, & l'on aura OGD
 $= 115^d . 0' 8''$. $GOA = 64^d . 59' 52''$. $GOB = 122^d$
 $29' 56''$. $OBR = 57^d . 30' 4''$. $BOA = 103^d . 7'$
 $32''$. $OBH = 76^d . 52' 28''$.

Quant aux dimensions respectives des faces de la même
 molécule, nous avons $GOAD = GO \times AC = GO$
 $\times 3$. $OG = GO \times CS = GO \times 3$, c'est-à-dire,
 que les deux faces dont il s'agit, sont parfaitement égales.
 De plus, $GOAD = AO \times GP = AO \times \sqrt{3}$, &
 $BOAH = AO \times PL = AO \times 2\sqrt{3}$; d'où il
 suit que la face $BOAH$ est double de chacune des deux
 autres, ce qui explique la différence des coupes que l'on
 fait dans le cristal, parmi lesquelles celles qui répondent
 aux deux faces égales des molécules sont nettes & d'un
 beau poli, tandis que celles qui se font parallèlement à
 la plus grande face n'offrent qu'un poli terne & mat,
 ainsi que je l'ai dit plus haut, parce que les molécules
 adhèrent

adhèrent entr'elles de ce côté par un plus grand nombre des points.

Maintenant, ayant mené OK, OT , perpendiculaires sur BO , imaginons un plan coupant qui passe par ces deux lignes; ce plan interceptera, sur la face de la molécule, un parallélogramme obliquangle, dont OK, OT seront deux côtés. Il faut prouver que OK est double de OT .

$AC \times GO = GP \times AO$; or, $AC = 3 \cdot GP = \sqrt{3}$; donc, $3GO = \sqrt{3}AO$; donc, $GO:AO :: \sqrt{3}:3$; d'ailleurs $CS = 3 \cdot PL = 2\sqrt{3}$; donc, $GO \times CS:AO \times PL :: 3 \cdot \sqrt{3}:3 \cdot 2\sqrt{3}$; donc, $AO \times PL = 2GO \times CS$; donc, aussi $OK \times BO = 2OT \times BO$; donc, $OK = 2OT$. Cette propriété nous sera nécessaire dans la suite.

Un plan coupant qui passeroit par GPL , intercepteroit un autre parallélogramme obliquangle, dont le grand côté seroit pareillement double du petit côté; mais si l'on faisoit passer un troisième plan coupant par ACS , on auroit un carré.

Cherchons maintenant la loi des décroissemens qui donnent l'ennéagone $zbfhxdegc$ (fig. 3). Soit $girkme$ (fig. 6) le même hexagone que celui de la fig. 3, l'angle ige représentera celui que forme le pentagone $zafoc$ (fig. 3), par son inclinaison sur l'ennéagone $zbfhxdegc$. Or, l'arête cz étant perpendiculaire sur co & za , il est aisé de voir que les décroissemens se font parallèlement à ro, uz (fig. 4), c'est-à-dire, sur les angles des lames composantes. Soit gof (fig. 6) le triangle mesurateur; la ligne gf est plus inclinée sur gk , que ne l'est celle qui fait la même fonction dans un autre variété que nous considérerons plus bas, ce qui annonce des décroissemens par une seule rangée de molécules pour le cristal de la fig. 3, & par deux rangées pour l'autre cristal. Dans le triangle fgo , nous avons $go = OA$ (fig. 2), & par la supposition, $of = DA$ ou GO . Or, à cause des triangles semblables GOP, CAO ; $OA:GO::CA:GP::3:\sqrt{3}$;

Mém. 1784.

N n

donc nous pouvons faire go (*fig. 6*) $= 3,0000$, & $of = v(3) = 1,7320$. De plus, l'angle gof est de $64^{\circ} 59' 52''$, comme on l'a vu plus haut. D'après ces données, on trouve, pour la valeur de l'angle ogf , $34^{\circ} 41' 16''$; partant, l'angle igf qui mesure l'inclinaison respective de deux faces de chaque sommet, est de $64^{\circ} 59' 52'' + 34^{\circ} 41' 16'' = 99^{\circ} 41' 8''$, ce qui s'accorde avec l'observation.

J'ai dit que les deux angles solides, c , z (*fig. 3*), étoient souvent remplacés par des facettes, dont une est représentée par le quadrilatère $\mu\phi\xi\delta$ (*fig. 7*). Pour expliquer cette facette, j'observe d'abord que la ligne $\mu\phi$ est parallèle au côté fa ; or, ce côté étant dans le sens d'une des divisions que l'on peut opérer dans le cristal, il s'ensuit que la facette dont il s'agit, résulte d'une loi de décroissemens sur les bords des lames composantes. Reprenons le prisme de la *fig. 2*, qui représente une des molécules constitutives. Le parallélogramme $GOBR$ est censé être situé parallèlement à la face $zasoc$ du cristal, *fig. 3*, & le parallélogramme $BOAH$ est parallèle au pan $dxlq$. De plus, l'angle TOK mesure l'inclinaison de $GOBR$ sur $BOAH$. Soit $TOKM$ (*fig. 10*), le parallélogramme formé par les sections d'un plan coupant qui passeroit par TO , OK , *fig. 2*: En faisant usage des données indiquées ci-dessus, on trouvera l'angle TOK de $68^{\circ} 30' 30''$. Supposons maintenant que les décroissemens qui donnent la facette dont il s'agit, se fassent par des soustractions de deux rangées de molécules. Soit tmz (*fig. 8*) le triangle mesurateur dans lequel on aura $tm = TM$ (*fig. 10*), $tmz = TMK = 68^{\circ} 30' 30''$, & par la supposition $mz = 2MK = TM$, comme je l'ai prouvé plus haut; donc l'angle mzt , ou son égal mzt , sera de $55^{\circ} 44' 45''$. Ajoutant à cet angle la valeur de TOK (*fig. 10*) $= 68^{\circ} 30' 30''$, on a l'angle total de $124^{\circ} 15' 15''$ pour la mesure de l'inclinaison que forme la facette $\mu\phi\xi\delta$ (*fig. 7*), sur le plan $zaso\mu$, ce que confirme l'observation.

Quant à l'autre facette qui remplace l'angle solide γ , quoiqu'elle soit différemment située par rapport aux molécules intégrantes, elle a cependant, à l'égard du cristal entier, la même position que la facette $\mu\phi\xi\delta$, à laquelle elle est tout-à-fait semblable. Pour le concevoir, observons que les décroissémens qui donnent la facette $\mu\phi\xi\delta$, étant apportés au plan horizontal $DCAB$ (fig. 4), se font parallèlement à des lignes ao , it , po , qui interceptent entr'elles deux rangées de molécules. Maintenant, si l'on mène $b\gamma$ parallèle à ca , la portion $cb\gamma a$ de l'assortiment de rhombes, comprise entre ces deux lignes, sera égale & semblable aux parties $iaot$, $pitw$, renfermées entre les lignes qui mesurent les décroissémens relatifs à la facette $\mu\phi\xi\delta$ (fig. 7): d'où l'on conclura que la facette correspondante résulte d'un décroissement sur les angles des lames composantes, qui se fait parallèlement à ca (fig. 4), par des soustractions de deux rangées de molécules, & de plus que cette facette a la même inclinaison que l'autre. Je me borne ici à donner la position des facettes dont il s'agit; je m'abstiendrai aussi de donner le calcul des angles plans du cristal. Ceux qui voudront vérifier les valeurs de ces angles, indiquées ci-dessus dans le développement, trouveront toutes les données nécessaires, parmi celles qui m'ont servi à déterminer les loix de décroissement auxquelles est assujettie la structure du même cristal.

Feld-spath à 6 pans, avec des sommets à deux faces
(fig. 9.).

Développement. Deux hexagones irréguliers $octqfh$; quatre trapèzes $ofgh$, $trlq$, disposés des deux côtés de chaque hexagone; deux pentagones $\gamma asoc$, formant chacun l'une des faces situées au sommet du prisme; deux autres pentagones $\gamma ertc$, formant chacun l'autre face du sommet correspondant.

Angles de l'hexagone $octqfh$. $oct = hfq = 128^{\circ}$
N n ij

$$55'.40''.coh = fqt = 115^d.0'8''.ohf. = ctq \\ = 116^d.4'12''.$$

$$\text{Angles du trapèze } fohg. \ ofg = 103.7'32''. \\ foh = 76^d.52'.28''.ohg = 76^d.15'.17''.fgh \\ = 103^d.44'43''.$$

$$\text{Angles du pentagone } zafoc. \ afo = 115^d.0'8''. \\ faz = foc = 122^d.29'56''.azc = ocz = 90^d.$$

$$\text{Angles du pentagone } zertc. \ ert = 114^d.32'30''. \\ zer = ctr. 122^d.43'45''.ezc = tcz = 90^d(e).$$

Il est facile de se former une juste idée de ce cristal, en le comparant avec celui de la *fig. 3*, qui est l'objet de l'article précédent. Supposons que dans ce dernier cristal, les biseaux *coig*, *zavb*, &c. se trouvent supprimés, ainsi que les trapèzes *oirn*, *edqm*, & les deux qui leur correspondent dans la partie opposée. On aura un solide à 6 pans, terminé par des sommets à deux faces pentagones. Concevons de plus que le pentagone qui remplace l'ennéagone

(e) Les angles du trapèze *trlq* sont disposés dans une situation renversée par rapport à ceux du trapèze *fohg*, comme cela a lieu pour le cristal de la *figure 3*, c'est-à-dire, par exemple, que l'angle supérieur *o* du trapèze *fohg* est égal à l'angle inférieur *q* du trapèze *trlq*. On voit ici que les angles *c*, *h*, sur la base de l'un quelconque des trapèzes dont il s'agit, ne diffèrent guère entr'eux de plus d'un demi-degré: il en est de même de quelques autres des angles cités, entre lesquels il se trouve des différences si légères, qu'il seroit difficile de les saisir à l'aide d'un instrument; en sorte qu'il semble qu'on auroit pu regarder ces angles comme égaux, & prendre

les égalités pour données, ce qui ne laisseroit plus subsister les autres égalités que j'ai adoptées plus haut, comme base des calculs. Mais celles-ci m'ont paru s'accorder plus rigoureusement avec la mesure des autres angles du cristal, & d'ailleurs nous avons vu qu'une partie de ces égalités conduisoit à déterminer des étendues égales, relativement à deux des faces de la molécule constituante, & une étendue double pour la troisième; ce qui fournit une raison de préférer les égalités dont il s'agit, à celles qui ne sont relatives qu'à des quantités secondaires, telles que des mesures d'angles qu'une nouvelle loi de décroissement peut faire varier.

$bzcgedxf$, soit moins incliné sur le pentagone adjacent que dans le cas présent, en sorte que les décroissemens qui donnent le pentagone dont il s'agit, se fassent par deux rangées de molécules, au lieu de se faire par une rangée seulement; le cristal qui résultera de cette modification de structure, sera parfaitement semblable à celui de la *figure 9*.

Il n'y a donc ici autre chose à faire que de chercher l'inclinaison respective des deux pentagones $zasoc$, $zertc$, d'après la loi de décroissement indiquée. Soit ogn (*fig. 6*) le triangle mesurateur dans lequel nous aurons toujours $go = 3,000$. Quant à la ligne on , qui mesure la loi des décroissemens, elle sera double de of , c'est-à-dire, que $on = 2 \sqrt{3} = 3,4640$: d'ailleurs l'angle $gon = 64^{\circ}.59'52''$. Le triangle ogn , résolu d'après ces valeurs, donne pour la mesure de l'angle ogn , $63^{\circ}.55'48''$, & par conséquent l'angle ign , qui mesure l'inclinaison des deux faces du sommet, dans le cristal dont il s'agit ici, est de $64^{\circ}.59'52'' + 63^{\circ}.55'48'' = 128^{\circ}.55'40''$, conformément à l'observation.

Il y a des cristaux dans lesquels la partie du pentagone $zertc$, située vers son extrémité r , est remplacée par un triangle qui a précisément la même inclinaison que l'enneagone $zbfhxdegc$ (*fig. 3*). Cette modification qui réunit les deux loix de décroissement observées dans les cristaux de forme secondaire que nous venons de considérer, est une des plus intéressantes que j'aie rencontrée, parmi les variétés nombreuses que nous offre le feldspath (*f*).

(*f*) *Nota*. J'ai dit, vers le commencement de ce Mémoire, que les coupes parallèles à $BOAH$ (*fig. 2*) étoient très-difficiles à obtenir: on seroit même tenté de croire, d'après l'aspect de quelques fragmens qui se détachent des feld-spats de certains granits, que la face $BOAH$ est perpendiculaire sur $GOAD$, & j'ai été moi-même quelque temps dans cette opinion. Mais

ayant depuis répété mes épreuves un grand nombre de fois sur des cristaux qui avoient un certain degré de pureté, j'y ai observé des lames continues, & qui avoient un poli assez sensible, situées de la même manière que je l'ai indiqué dans l'explication de la *figure 2*. Au reste, les formes des cristaux du feld-spath ont cette propriété particulière, que la molécule dans laquelle les faces *BOAH*, *GOAD*, seroient perpendiculaires l'une sur l'autre, satisfait elle-même à la théorie; & si l'on se donne la peine d'en faire le calcul, on trouvera que les cristaux secondaires se déduisent de cette forme, par des loix simples & régulières de décroissement: mais l'observation détermine ici notre choix entre les deux formes dont il s'agit.

Fig. 2.

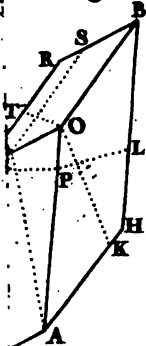


Fig. 3.

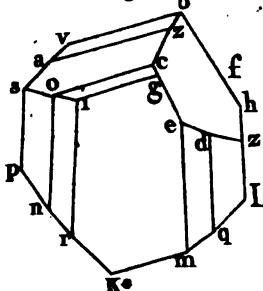


Fig. 5.

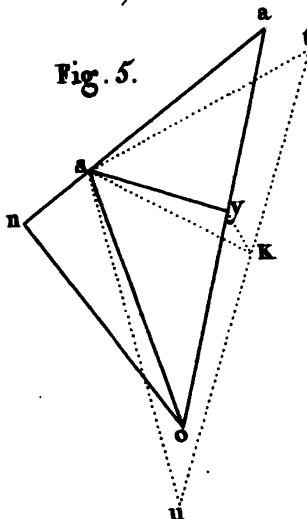


Fig. 7.

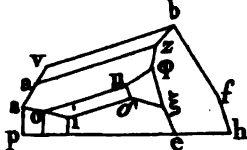


Fig. 10.

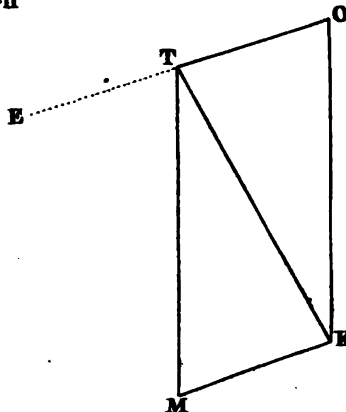
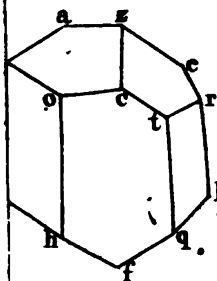


Fig. 9.



M É M O I R E

SUR L'EFFET DE L'AIR INFLAMMABLE

SUR LES CORPS ORGANISÉS.

Par M. S A G E.

ON favoit que l'air inflammable n'étoit point propre à entretenir la vie des animaux, mais on ignoroit qu'il eût la propriété de détruire & de dissoudre le tissu animal. C'est à M. Charles que je dois la connoissance de ce fait : ce Physicien ayant mis des grenouilles dans des flacons remplis d'air inflammable, elles y perdirent promptement la vie, & au bout de quinze jours ou trois semaines, il les trouva résoutes en un fluide d'un gris-rougeâtre. Les parties cartilagineuses avoient aussi été détruites, puisque les os étoient tous séparés, comme on peut le reconnoître en regardant le flacon que je mets sous les yeux de l'Académie.

La
le 24 Mars
1784.

Desirant répéter l'expérience de M. Charles, j'ai mis une grenouille dans un flacon rempli d'air inflammable, le 15 Février de cette année; elle s'est tuméfiée, & il en sortit une liqueur sanguinolente dont la quantité augmente tous les jours. Si la dissolution de cette grenouille est beaucoup plus lente que celle de M. Charles, c'est qu'il a fait ses expériences dans le mois de Juillet.

M. Charles a reconnu que des grenouilles mises dans des flacons remplis d'air nitreux, d'acide méphitique & d'air déphlogistiqué, y périssent, mais conservoient leur forme sans se résoudre en fluide.

La dissolution des corps organisés, par le moyen de l'air inflammable, servira peut-être à faire connoître d'où proviennent les maladies dont on est attaqué, lorsqu'on habite des pays marécageux, dans des temps chauds.

Je terminerai cette observation en hasardant une conjecture sur le mécanisme de la digestion. Nous avalons, avec les substances qui nous servent d'aliment, une grande quantité d'air atmosphérique qui se décompose dans l'estomac; l'air déphlogistiqué, qui en est principe, s'y convertiroit-il en air inflammable, ou modifieroit-il en air inflammable une portion de la matière huileuse, principe des alimens? dans ce cas, l'air inflammable dissolvant les viandes & les alimens, ne les rend-il point propres à se convertir en chyle?

EXPÉRIENCES

EX P É R I E N C E S

Qui font connoître la nécessité d'employer une grande quantité de Plomb pour extraire l'Argent contenu dans des terres.

Par M. S A G E.

DE toutes les opérations métallurgiques, ce sont celles qui ont pour but l'extraction de l'or ou de l'argent, auxquelles on a porté le plus d'attention, à cause de la valeur de ces métaux. Ayant présidé à une fonte qui a rendu pour quatre cents mille livres d'argent mêlé d'or, on fut obligé de faire usage de beaucoup de creusets de Paris, & d'autres de plombagine. Le nitre qui fut employé pour accélérer la fusion du brûlé, détruisoit promptement ces creusets qui retenoient dans leurs pores des grenailles de fin; pour les extraire, on commença par pulvériser & laver ces creusets, ensuite on les passa au mercure, il resta environ dix quintaux de cendrées; les ayant essayées, je trouvai qu'elles contenoient encore six marcs d'argent par quintal, tandis qu'après avoir passé au mercure, elles ne retiennent ordinairement guère plus d'une once de fin.

Lû
le 20 Nov.
1784.

Ceux qui font métier de fondre ces cendrées, n'ayant offert que deux ou trois louis de ces dix quintaux de cendrées, qui contenoient, d'après mes essais, environ pour mille écus d'argent mêlé d'or, je me déterminai à les traiter par la scorification & la coupellation.

Pour scorifier ces cendrées, j'en fis mêler dix quintaux avec quinze cents livres de chaux de plomb, huit cents livres de scories vitreuses, & cinquante livres de chaux éteinte: je fis fondre ces trois mille cinq cents livres de matière dans un fourneau à manche, qui avoit six pieds de haut, huit pouces de large & dix-huit de long. Ce

Mém. 1784.

O o

mélange fut fondu en cinquante heures, & produisit six cents livres de plomb d'œuvre; il y a, comme on voit, plus de moitié de plomb de perdu, dont une partie s'est exhalée pendant la fonte, sous forme de massicot, l'autre s'est combinée avec les terres des creusets, & a déterminé leur vitrification.

Les six cents livres de plomb ayant été coupellées au fourneau allemand, rendirent quarante-huit marcs d'argent; mais ce produit n'étant pas relatif à celui que j'avois obtenu des cendrées, je m'assurai par l'essai, de la quantité de fin que contenoient les scories vitreuses, & je reconnus qu'elles produisoient quatre onces d'argent par quintal.

Les trois mille six cents livres du mélange de la première scorification, m'ayant fourni vingt quintaux de scories, je les fis mêler avec trois cents livres de litharge & quatre cents livres de crasse de plomb; cette seconde scorification fut faite en vingt-quatre heures, & produisit quatre cents livres de plomb d'œuvre: les scories étoient à l'état de verre verdâtre, semblable à celui des bouteilles de Sève.

Ces quatre cents livres de plomb ayant été coupellées, rendirent neuf marcs quatre onces d'argent: ces deux quantités réunies offrent un produit net, conforme à l'essai des cendrées.

Il résulte de ces expériences & de celles que j'ai faites en petit, qu'il faut au moins trois parties de chaux de plomb pour enlever l'argent qui se trouve mêlé avec une partie de terre.

Je dois prévenir qu'il faut préférer dans la scorification, la litharge à la crasse des plombiers, qui est une chaux de plomb souvent mêlée d'étain. Lorsque ce dernier métal se trouve avec le plomb, dans la proportion d'un quart, il est impossible de lithargirer le plomb, parce que la coupelle se hérissé, & quand on enlève la chaux d'étain avec le rincart, elle entraîne toujours une portion d'argent; d'ailleurs, le plomb qui reste sur la coupelle avec l'argent, retient toujours de l'étain qui empêche la coupelle de

passer. M'étant trouvé dans un cas semblable, j'ai affiné l'argent en le fondant à diverses reprises avec du nitre qui a calciné & scorifié le plomb & l'étain qui restoient dans le gâteau d'argent.

A N A L Y S E

D'une Mine de plomb terreuse, jaunâtre, antimoniale & martiale, en masse formée de différens lits, se trouvant par filons à Bonvillars en Savoie, à six lieues de Chambéri, sur la route de Piémont.

Par M. S A G E.

CETTE mine ayant été exposée au feu dans un têt, n'exhala aucune odeur; après avoir été tenue rouge pendant une demi-heure, elle a perdu dix livres par quintal. Dans cette expérience, il n'y a que l'eau qu'elle contient qui se dégage; on peut l'obtenir si l'on distille cette mine dans une cornue au fourneau de réverbère.

Si l'on mêle cette mine de plomb terreuse antimoniale avec de la poudre de charbon, & si on la calcine ensuite dans un têt, il s'en dégage de l'arsenic sous forme de vapeurs blanches; il s'exhale ensuite de l'acide sulfureux & des fleurs blanches d'antimoine. Cette expérience fait connoître que, dans cette mine, les terres métalliques y sont combinées avec les acides arsenical & vitriolique; acides qui sont fixes au feu, quand ils sont engagés dans des terres, & qu'ils ne sont pas combinés avec du phlogistique.

Ayant distillé de la mine de plomb terreuse antimoniale, avec de la poudre de charbon, il s'est sublimé dans

le col de la cornue un peu de régule d'arsenic mêlé d'orpin.

La mine de plomb terreuse antimoniale, ayant été réduite avec du flux noir & de la poudre de charbon, a produit, par quintal, cinquante-quatre livres d'un régule gris à facettes; il s'étend un peu sous le marteau, & s'y pulvérise.

Ce régule mixte, composé d'environ parties égales de plomb & d'antimoine, ayant été coupellé, l'antimoine a été rejeté, & a fait un bourlet d'un jaune-brunâtre * sur le bassin de la coupelle où il est resté une minicule d'argent.

* Il doit cette couleur à du fer.

OBSERVATION

SUR UNE SUBSTANCE

Ramassée aux pieds de jeunes Peupliers d'Italie.

Par M. l'abbé TESSIER.

LE 4 Juillet dernier, j'allai visiter, sur le soir, une pépinière royale qui est à une demi-lieue de la ville de Tours. En parcourant les différentes sortes d'arbres qu'elle renfermoit, j'aperçus, dans un carré rempli de jeunes peupliers d'Italie, la surface de la terre couverte en partie d'une matière blanche, assez semblable de loin au gresil : c'étoit sur-tout autour des pieds des plus jeunes peupliers que cette matière étoit en plus grande quantité; pour peu qu'on la touchât, ses parties se divisoient & se réunissoient comme des globules de mercure. Je ne lui trouvai qu'une foible odeur de miel, mais elle avoit la saveur sucrée, & s'attachoit aux doigts si on la pressoit.

La
le 28 Février
1784.

Les peupliers avoient sept à huit pieds de hauteur au plus; leurs feuilles, à la partie supérieure, étoient pour la plupart enduites de la même matière qui paroissoit luisante. Il s'y étoit formé un grand nombre de gales d'un rouge vermeil extérieurement, & remplies d'insectes vivans, & d'une grande quantité de la matière que j'avois vue aux pieds des tiges.

J'ai remarqué que les rangées de peupliers, qui étoient le plus exposées au soleil, étoient aussi le plus environnées & couvertes de la substance dont il s'agit. Les autres arbres de la pépinière, de jeunes peupliers de la Caroline, des peupliers d'Italie même à tiges élevées, n'en avoient pas autour de leurs pieds.

Le temps ne me permit de ramasser que quelques gros

ou environ de cette substance; je les enfermai, avec la terre & les feuilles qui s'y étoient jointes, dans du papier qui est resté sur ma table pendant plus de quatre mois, sans que la substance en ait reçu la moindre altération. M. Berthollet a bien voulu l'examiner; après l'avoir gardée aussi quelque temps, il l'a fait dissoudre dans l'eau & évaporer à petit feu. Sa couleur blanche, moins sensible dans le papier, où elle étoit mêlée à de la terre & à des insectes, qu'aux pieds des arbres & sur leurs feuilles, s'est perdue entièrement par l'évaporation, en sorte que la matière qui en a résulté est d'un brun-foncé: la concentration a rendu l'odeur de miel plus forte & la saveur plus douce. C'est une substance sucrée, mêlée, à ce qu'il paroît, d'un peu de gomme; mais cette substance sucrée a les caractères du véritable miel. On aperçoit quelquefois pendant l'été, sur les feuilles de diverses plantes, une matière blanche, pareille à celle qui fait l'objet de cette observation; on lui a donné le nom de *miellat*. Les melons & autres cucurbitacées élevées sur des couches, y sont particulièrement sujets, comme j'ai eu occasion de le voir, sur-tout le matin; mais je ne crois pas que cette matière se rencontre en aussi grande abondance que je l'ai trouvée dans la pépinière de Tours, sur les feuilles & aux pieds des peupliers d'Italie, puisque les feuilles de ces arbres, & la terre qui environnoit leurs tiges, en étoient pour ainsi dire couvertes.

C'est à la chaleur sans doute qu'on doit attribuer cette extravasation de la matière sucrée des peupliers d'Italie; car elle a paru dans un pays dont la latitude est propre à causer une chaleur assez forte. La Touraine, comme on fait, produit des fruits plus succulens que n'en produisent les provinces qui s'écartent de sa position; l'alberge & les prunes y sont meilleures qu'ailleurs; le cardon, le choux-fleur & l'anis, plantes originaires des pays chauds, y donnent de bonnes graines: d'ailleurs, c'étoit au mois de Juillet, & dans une année regardée comme plus chaude que beaucoup d'autres. La matière sucrée s'est trouvé mêlée à une

partie gommeuse, ce qui n'est pas étonnant, vu l'analogie & les rapports de ces substances contenues dans les vaisseaux des arbres. Des insectes, assurés d'une nourriture convenable pour leurs petits, ayant piqué les feuilles des peupliers en cet état, ont formé les gales que j'y ai vues.

Les abeilles sont très-avides de la matière sucrée qui s'extravase & s'amasse sur les feuilles des végétaux; c'est un miel tout fait qui leur coûte moins à recueillir que celui qu'elles pompent dans les nectaires des fleurs. Aussi voit-on, dans les momens où cette matière est abondante, leur activité au travail se renouveler; alors elles vont aux champs de grand matin, & ne cessent d'y aller que très-tard, comme si elles avoient du regret de ne pas tout ramasser. Les personnes qui soignent des ruches s'en aperçoivent, & ont soin d'y mettre des hausses que les abeilles remplissent en peu de temps. C'est sans doute dans une circonstance favorable par l'abondance du miellat répandu sur les plantes, que le Curé du Tillay-le-Péleux, au rapport de M. Duhamel, retira quatre cents livres de miel d'un seul essaim, dont la ruche étoit posée sur un cuvier percé qui se trouva tout rempli de gâteaux.

O B S E R V A T I O N

*Sur les suites d'une Grêle tombée le 25 Mai 1783,
dans un canton de la Beauce.*

Par M. l'Abbé TESSIER.

Lû
en 1784.

LA grêle est un des fléaux que les cultivateurs redoutent le plus; elle leur enlève en un instant le fruit de leurs peines, les moyens de subsister & d'entretenir leurs bestiaux; elle les met dans l'impuissance de satisfaire à leurs engagements. C'est au vigneron, propriétaire de vignes, qu'elle fait le plus grand tort, parce que les vignes frappées de grêle, sont quelquefois plusieurs années sans rapporter, ou ne rapportent que très-peu les années suivantes: le laboureur y perd seulement la récolte de l'année, perte toujours trop considérable pour lui. Les orages qui lancent la grêle, ont lieu le plus souvent, un mois ou environ avant le temps de la moisson, parce que c'est la saison des plus grandes chaleurs. Les grains, à cette époque, sont formés dans les épis, les tiges fortes & capables de résistance; aussi la grêle les coupe-t-elle presque toutes, si elle n'est pas accompagnée de beaucoup de pluie, & réduit des campagnes belles & riches, à l'état le plus triste & le plus malheureux.

L'année dernière, qui fut remarquable par ses brouillards, le fut encore par les orages multipliés & funestes qu'ils occasionnèrent: on vit même avant que les brouillards parussent, la grêle exercer ses ravages dans différens pays. Celle qui fait l'objet de cette observation, tomba le 25 Mai, dans un canton de la Beauce, que j'habite souvent; elle étoit grosse & abondante; en quelques minutes, la plus grande partie des seigles & des fromens fut détruite entièrement: il ne resta que quelques débris de paille,
comme

comme après la récolte faite. Les autres grains, tels que les avoines, les orges, & ceux des prairies artificielles, n'étoient pas assez avancés pour en souffrir.

Les premières idées qui se présentèrent, furent de labourer les champs grêlés, & d'y semer des grains d'une végétation rapide; mais en y réfléchissant, on pensa que la terre, fortement battue par la grêle & par la pluie qui la suivit, ne pourroit être assez-tôt ameublie pour être ensemencée avec avantage: quelques particuliers seulement le tentèrent. Les laboureurs qui avoient de grandes exploitations, abandonnèrent ce projet, & préférèrent de ne point interrompre leurs autres travaux, espérant d'ailleurs que l'année suivante ils en seroient dédommagés en partie par une augmentation de produit en avoine dans ces mêmes champs.

Bientôt après on vit de nouvelles tiges s'élever à la place de celles qui avoient été détruites, & en plus grand nombre même que les premières. En un mois elles parvinrent à la hauteur ordinaire, & l'on ne s'aperçut plus des effets de la grêle dans les champs de froment, où elle n'avoit rien épargné; dans ceux où une partie des tiges avoit été conservée, les repousses formoient avec elles un contraste de vert & de jaune, capable d'étonner le voyageur. Il n'y avoit pas une seule repousse dans les champs de seigle, trop avancés quand la grêle survint, pour fournir de nouvelles tiges; on sait d'ailleurs que le seigle a moins de facilité pour taller, que le froment.

Le temps fut favorable à la végétation des repousses de froment; de fréquens orages amenèrent des pluies chaudes très-avantageuses; chaque souche produisit trois ou quatre tiges, plus fines que les premières. Il s'y forma des épis aussi beaux, qui fleurirent à la fin de Juin & au commencement de Juillet, c'est-à-dire, un mois après le terme ordinaire de la floraison du froment.

Ce seroit ici le lieu de peindre la satisfaction du laboureur, dont l'espérance renaissoit à la vue d'une récolte inattendue: on se la représente facilement, & je dois m'occuper

plus particulièrement des faits physiques. Les laboureurs, dont les champs avoient été le plus maltraités, se regardoient comme les mieux partagés, parce que tout ayant repoussé, ils ne devoient pas craindre, en attendant la maturité des nouveaux épis, de perdre le grain contenu dans les anciens, plus hâtifs de beaucoup; c'étoit ce que craignoient avec raison ceux dont les champs n'avoient été grêlés qu'à moitié ou au quart.

Tout se passa bien jusqu'au 1.^{er} Août; ce jour-là, & les suivans, il fit une chaleur considérable, accompagnée d'un vent du sud, qui en accélérant trop promptement la dessiccation des tiges de repousses, échauda les grains, qui restèrent petits & retraits. On commença à les couper vers le 18 Août.

Persuadé qu'il seroit intéressant de suivre jusqu'au bout cette observation que je me suis trouvé à portée de faire, j'ai comparé entr'eux les produits des récoltes des champs de même nature, dont les uns ont repoussé de nouvelles tiges, après avoir été ravagés par la grêle, & les autres ont été à l'abri de ce fléau.

Un arpent de terre qui n'a point été exposé à la grêle, communément l'année dernière, année moins abondante qu'on ne l'a cru, a produit vingt douzaines de gerbes, qui ont rendu par douzaine deux boisseaux de froment, mesure de Paris, ou trois setiers & un tiers de setier. Un arpent de terrain grêlé a fourni à peu-près la même quantité de gerbes, mais on n'en a obtenu qu'un boisseau de froment par douzaine, ou un setier & demi & un sixième de setier par arpent.

Chaque gerbe d'un champ non grêlé, contenoit environ neuf livres de paille; chaque gerbe d'un champ grêlé, n'en contenoit que sept: celle-ci étoit beaucoup plus fine, plus tendre & plus agréable aux bestiaux. J'observerai ici que les bêtes à laine ne veulent ni la paille de blé, ni les herbes des prairies hachées par la grêle, quelque soin qu'on prenne pour les y forcer.

Quatre boisseaux & un quart de froment non grêlé, pesoient quatre-vingt-cinq livres, ou vingt livres par boisseau; la même mesure de froment grêlé, étoit du poids de quatre-vingt-deux livres, c'est-à-dire, pesoit trois livres de moins; ce qui fait par setier une différence de sept à huit livres: ce dernier froment étoit plus petit & plus maigre.

J'ai fait moudre, avec toute l'attention possible, les quatre-vingt-cinq livres de froment non grêlé; ils ont produit cinquante-six livres de farine blanche, huit livres & demie de farine bise, huit livres de recoupe & huit livres de son. Le froment grêlé, pesant quatre-vingt-deux livres, a aussi été moulu de la même manière; on en a retiré cinquante-six livres de farine plus blanche que la précédente, huit livres de farine un peu plus bise que la précédente, dix livres de recoupe & sept livres de son: les gruaux des farines blanches ont été moulus deux fois, & ceux des farines bises une fois.

Les pains que j'ai fait faire avec deux livres de chacune de ces quatre farines & six onces de levain, étoient, pour la blancheur, conformes à celle des farines dont ils avoient été formés. La farine blanche du blé grêlé est celle qui, au pétrissage, a absorbé le plus d'eau; il lui en a fallu une once & demie & un demi-gros de plus, c'est-à-dire, une livre six onces & cinq gros & demi, au lieu d'une livre cinq onces & un gros qu'on a employés pour chacune des autres. Je ne suis pas assez sûr du poids des pains pour en faire mention ici; ils étoient bien levés & de bon goût: les deux blancs m'ont paru avoir une saveur égale.

Cette observation n'a rien sans doute de très-important en soi, mais elle offre un fait physique observé avec attention, & mieux suivi peut-être qu'il ne l'a encore été; sous ce point de vue, j'ai cru qu'il méritoit d'être conservé. On en peut conclure que, quand la grêle ravage des champs avant l'époque où les grains sont formés dans les épis, il y a lieu d'espérer que si le temps est favorable, il repoussera d'autres tiges qui produiront du grain de bonne qualité: alors les vaisseaux des racines ne sont pas encore oblitérés,

& peuvent élever de la terre les fucs ou l'humidité nécessaires à la formation de nouvelles tiges ; ce qui ne peut avoir lieu que dans un bon terrain comme celui dont il s'agit dans cette observation, un terrain de mauvaise qualité feroit trop épuisé pour procurer le même avantage. Il faut encore se rappeler que l'année dernière a été singulièrement favorable à une seconde végétation, par les pluies chaudes & fréquentes qui sont tombées ; en sorte que dans une année sèche, telle que celle-ci, par exemple, où, dans quelques endroits du pays Chartrain, on n'a pas eu de pluie depuis plus de quatre mois, les repousses eussent été foibles, & n'eussent vraisemblablement porté que des épis imparfaits. Des particuliers ont retourné leurs champs immédiatement après la grêle, pour y semer de l'orge, ils n'en ont presque pas récolté, parce que la saison étoit trop avancée ; d'autres ont préféré d'y semer de la vesce, qu'ils ont fait manger en herbe à leurs bestiaux ; mais ceux qui ont tout abandonné à la Nature, me paroissent avoir gagné davantage, puisque indépendamment du fourrage, ils ont retiré une certaine quantité de froment.



E X A M E N

DE LA DERNIÈRE RÉVOLUTION DE JUPITER,

Et des élémens actuels de son orbite.

Par M. DE LA LANDE.

DEPUIS l'impression de mes Tables astronomiques, en 1771, j'ai continué d'examiner les oppositions des Planètes, pour constater les élémens que j'avois adoptés, ou reconnoître les variations qui pourroient y arriver. Jupiter & Saturne, sont les deux Planètes les plus susceptibles de dérangement à cause de la lenteur de leur mouvement; il y faudra joindre la planète de Herschel, lorsque nous l'aurons observée assez long-temps pour apercevoir ses inégalités. Celles de Jupiter, produites par l'action de Saturne, ont été calculées par M. Euler (*Prix de 1752*). & par Mayer, (*Connoissance des Temps, 1763 & 1764* *). M. Wargentin, avoit employé dans ses Tables de Jupiter, ces inégalités, & en les publiant dans mon *Astronomie*, en 1771, j'avois adopté, comme M. Wargentin, une augmentation de $2' 15''$ par siècle, dans l'équation de l'orbite de Jupiter, avec des perturbations produites par l'action de Saturne, dont la plus forte étoit de $4' 38''$, & dont la somme va jusqu'à $10' 14''$; mais je vois que tout cela ne sauve point les inégalités, & je trouve encore $5'$ d'erreur dans l'opposition de 1784. Je crois donc qu'il est plus naturel de laisser encore aux Tables leur ancienne simplicité, & de chercher les élémens de l'orbite de Jupiter en la supposant purement elliptique; mais en variant & combinant un grand nombre d'oppositions dans les divers

Là
le 24 Nov.
1784.

* Dans le volume de 1763, page 128, il faut changer les signes des Tables II & III.

A la suite des longitudes observées par rapport à l'écliptique, j'ai mis les réductions qu'il faut employer pour les réduire à l'orbite de Jupiter; ensuite la correction de mes Tables, ou la quantité qu'il faut y appliquer pour avoir les longitudes observées, mais sans avoir égard aux perturbations, ni à l'augmentation de l'équation, depuis 1760.

J'ai mis ensuite l'anomalie moyenne de Jupiter, suivant mes Tables, pour servir à mes différentes hypothèses; enfin les mouvemens observés, ou les différences des longitudes vraies sur l'orbite, qui doivent être représentées exactement, & servent à vérifier mes hypothèses.

Première hypothèse. Avec des anomalies & les équations qui sont dans mes Tables, je trouve le mouvement total de 1773 à 1780, trop fort de $4' 54''$, comme on le voit par la somme des erreurs des Tables qui sont en sens contraire.

En diminuant l'aphélie, ou augmentant les anomalies moyennes, de $20'$, je trouve cet excès diminué de $3' 51''$.

Ainsi, pour le faire disparaître en entier par le seul changement de l'aphélie, il faut ajouter $25' 27''$ aux anomalies; la plus grande équation étant supposée comme dans mes Tables, de $5^d 34' 1''$.

Seconde hypothèse. Avec les anomalies augmentées de $25' 27''$, & les Tables d'équations qui sont dans Halley, je ne trouve plus le mouvement trop fort que de $12''$, entre 1773 & 1780. Pour corriger cet excès, je trouve qu'il suffit d'ajouter encore $1' 2''$ de plus aux anomalies, c'est-à-dire, en total, $26' 29''$; la plus grande équation étant comme dans Halley, $5^d 31' 36''$.

Troisième hypothèse. Ayant calculé la seconde observation, ou la longitude pour 1777, dans chacune de ces deux hypothèses qui satisfont au mouvement total, $6^d 17^d 56' 48''$; je trouve dans la première hypothèse, que le mouvement de 1773 à 1777, seroit trop petit de $51''$,

& dans la seconde hypothèse, de $3' 36''$, ce qui fait $1' 45''$ de plus. Ainsi ces deux hypothèses qui diffèrent de $1' 2''$ pour les anomalies, & de $2' 23''$ pour la plus grande équation, produisent $2' 45''$ de différence pour le mouvement de 1773 à 1777. Par le moyen de deux petites proportions, je trouve que, pour augmenter de $51''$, ce mouvement, & corriger l'erreur de la première hypothèse, il faut augmenter l'équation de $45''$, & diminuer de $19''$ la correction de l'aphélie; & par-là on satisfera au mouvement $3' 15^d 55' 51''$, comme au mouvement total, $6' 17^d 56' 48''$.

Pour calculer les trois longitudes avec des anomalies augmentées de $25' 8''$, & avec la plus grande équation $5^d 34' 46''$, il faut augmenter les trois équations de $5''$, de $45''$ & de $9''$, à proportion de la différence qu'il y a entre les Tables de Halley & les miennes. C'est le moyen le plus facile d'avoir promptement les équations comme on le voit dans la Table ci-dessous, où j'ai mis pour trois degrés d'anomalie moyenne, les équations de Jupiter, suivant mes Tables & suivant celles de Halley.

ANOMAL. MOYENNE.	ÉQUATIONS.		POUR 45 secondes de DIFFÉRENCE.
	Mes TABLES.	HALLEY.	
	S. D.	D. M. S.	
5. 24	0. 37. 9	0. 36. 52	5.
9. 4	5. 31. 14	5. 28. 51	45.
0. 13	1. 10. 54	1. 10. 26	9.

Par les quantités dont ces équations diffèrent, on trouve aisément de combien différeroient celles qui supposeroient pour

pour la plus grande équation $45''$ de plus que ma Table; par exemple, pour $5^{\text{e}} 24^{\text{e}}$, les équations diffèrent de $17''$ dans les deux Tables, ou la plus grande équation diffère de $2' 23''$; donc pour $45''$, il y auroit $5''$, & l'équation feroit $37' 14''$ dans une nouvelle Table que l'on auroit dressée d'après cette plus grande équation, $5^{\text{e}} 34' 46''$.

Ayant ainsi calculé les trois longitudes, je les trouve plus grandes de $1' 39''$ que celles qui ont été observées; c'est ce qu'il faudroit ôter des époques de Jupiter, dans mes Tables, pour satisfaire aux trois oppositions que je viens d'employer, en même temps qu'on ajouteroit $45''$ à la plus grande équation, & qu'on ôteroit $24' 57''$ de l'aphélie.

Voici trois autres oppositions de Jupiter, dont les lieux sont assez voisins des apsidés & du point de la plus grande équation, pour pouvoir donner assez bien les mêmes élémens.

ANNÉES.	MOIS & J O U R S.	TEMPS MOYEN de l'opposit.	LONGITUDE sur L'ÉCLIPTIQUE.	REDUCT.	CORRECT. des TABLES.	ANOMALIE moyenne de JUPITER.
		H. M.	S. D. M. S.	S.	M. S.	S. D. M. S.
1779.	Mars 12	12. 31	5. 28. 18. 37	+ 14	— 4. 0	11. 9. 40. 28.
1782.	Juin 14	17. 14	8. 24. 6. 40	— 14	— 0. 31	2. 18. 33. 49.
1784.	Août 25	2. 21	11. 2. 54. 4	+ 26	+ 2. 37	4. 25. 13. 51.
2. 10 $\frac{1}{2}$			11. 2. 53. 40.	M. MALLET.		

En faisant les mêmes calculs avec ces trois longitudes, j'ai trouvé qu'il faudroit ôter $47''$ des époques de mes Tables, $1' 6''$ de la plus grande équation, & $33' 12''$ du lieu de l'aphélie.

Si l'on prend un milieu entre ces deux résultats, on aura les élémens qui répondent le mieux à la dernière

Mém. 1784.

Q q

306 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

révolution de Jupiter, en ôtant 1' 12" des époques de mes Tables, 11" de la plus grande équation & 29' de l'aphélie. Cette dernière correction est un peu forte; elle peut produire trois minutes d'erreur sur le lieu de Jupiter; mais on ne peut guère assurer, quant à présent, que ce soit une irrégularité survenue dans le mouvement de Jupiter, puisque les meilleures Tables ne représentoient pas les révolutions précédentes avec une plus grande exactitude.

Les deux principales corrections de mes Tables, sont en sens contraire de celles de Halley, comme on le peut voir par la comparaison suivante; d'où il résulte que mes Tables sont plus exactes pour Jupiter, que celles de ce grand Astronome, en négligeant comme lui les perturbations de cette Planète.

	LONGITUDE	APHÉLIE.	ÉQUATION.
	MOYENNE		
	en 1780.		
	S. D. M. S.	S. D. M.	D. M. S.
Dans les Tables de Halley..	6. 15. 4. 14	6. 11. 10	5. 31. 36.
Dans mes Tables.....	6. 15. 2. 1	6. 10. 54	5. 34. 0.
Suivant ce Mémoire.....	6. 15. 0. 49	6. 10. 24	5. 33. 49.

Je prouverai ailleurs la même supériorité pour mes Tables des autres Planètes; cela n'est pas surprenant, puisque j'ai été à portée d'employer des observations plus nombreuses & plus récentes.

Pour qu'on puisse mieux juger des inégalités de Jupiter, je vais donner ici la comparaison de mes Tables, avec les quatre-vingt-quinze oppositions observées depuis un siècle, c'est-à-dire, la quantité qu'il faut appliquer au calcul pour l'accorder avec l'observation. J'y ai joint l'anomalie de Jupiter & sa distance vraie à Saturne. Par ce moyen, l'on

verra l'influence que peuvent avoir sur le progrès de ces erreurs, & les élémens de l'orbite de Jupiter, & l'attraction de Saturne. Cette Table est le premier secours qu'on doit se préparer pour discuter les élémens de la Planète qui nous occupe.

ERREURS des Tables de Jupiter, en négligeant les perturbations.

ANNÉES.	ERREURS.	ANOMALIES de JUPITER.	DISTANCES de JUPITER à Saturne.
	M. S.	S. D. M.	S. D. M.
1680.	— 2. 13	7. 27. 25	10. 23. 41.
1682.	— 2. 6	9. 0. 31	11. 13. 1.
1683.	— 1. 4	10. 3. 29	0 0. 12.
1684.	+ 0. 36	11. 6. 21	0. 16. 34.
1685.	+ 1. 6	0. 9. 13	1. 2. 41.
1686.	+ 1. 2	1. 13. 9	1. 19. 24.
1687.	— 0. 17	2. 14. 2	2. 7. 32
1688.	— 2. 34	3. 18. 26	2. 27. 38.
1689.	— 4. 46	4. 21. 50	3. 21. 2.
1690.	— 5. 7	5. 23. 18	4. 14. 15.
1691.	— 4. 33	6. 28. 43	5. 8. 41.
1692.	— 1. 22	8. 1. 59	6. 2. 9.
1694.	+ 0. 55	9. 3. 4	6. 23. 46.
1695.	+ 2. 39	10. 8. 1	7. 13. 32.
1696.	+ 2. 46	11. 10. 53	8. 2. 1.
1697.	+ 1. 56	0. 13. 45	8. 19. 53.
1698.	+ 1. 27	1. 16. 41	9. 7. 51.
1699.	— 0. 50	2. 19. 46	9. 27. 2.
1700.	— 3. 17	3. 23. 2	10. 17. 35.
1701.	— 2. 1	4. 26. 26	11. 9. 50.
1702.	+ 0. 27	5. 29. 55	0. 3. 0.
1703.	+ 0. 40	7. 3. 19	0. 25. 47.
1704.	+ 1. 58	8. 6. 33	1. 16. 53.
1706.	+ 2. 27	9. 9. 37	2. 5. 44.
1707.	+ 1. 30	10. 12. 32	2. 23. 35.
1708.	+ 0. 25	11. 15. 24	3. 8. 14.

ANNÉES.	ERREURS.	ANOMALIES	DISTANCES
		JUPITER.	de JUPITER à Saturne.
	N. S.	S. D. M.	S. D. M.
1709.	+ 0. 16	0. 18. 16	3. 23. 3.
1710.	+ 0. 22	1. 21. 14	4. 8. 48.
1711.	+ 2. 6	2. 24. 20	4. 25. 50.
1712.	+ 3. 31	3. 27. 38	5. 14. 59.
1713.	+ 4. 39	5. 1. 4	6. 6. 16.
1714.	+ 5. 57	6. 4. 32	6. 29. 1.
1715.	+ 3. 3	7. 7. 54	7. 21. 47.
1716.	+ 2. 17	8. 11. 7	8. 13. 32.
1718.	+ 0. 48	9. 14. 9	9. 3. 38.
1719.	— 1. 51	10. 17. 4	9. 22. 20.
1720.	+ 2. 7	11. 19. 55	10. 10. 14.
1721.	+ 4. 16	0. 22. 48	10. 28. 8.
1722.	+ 2. 55	1. 25. 47	11. 16. 43.
1723.	+ 4. 8	2. 28. 55	0. 6. 46.
1724.	+ 2. 10	4. 2. 13	1. 8. 43.
1725.	+ 6. 8	5. 5. 40	1. 22. 33.
1726.	+ 1. 37	6. 9. 8	2. 17. 4.
1727.	— 3. 12	7. 12. 29	3. 11. 2.
1728.	— 0. 57	8. 15. 40	4. 3. 13.
1730.	— 2. 50	9. 18. 41	4. 23. 10.
1731.	— 2. 20	10. 21. 35	5. 11. 13.
1732.	— 1. 13	11. 24. 26	5. 27. 59.
1733.	+ 0. 14	0. 27. 20	6. 14. 18.
1734.	+ 3. 3	2. 0. 20	7. 1. 4.
1735.	+ 4. 14	3. 3. 29	7. 18. 53.
1736.	+ 2. 39	4. 6. 49	8. 8. 23.
1738.	— 0. 19	6. 13. 43	9. 21. 12.
1739.	— 0. 56	7. 17. 4	10. 12. 23.
1740.	— 1. 22	8. 20. 13	11. 2. 4.
1742.	— 1. 8	9. 23. 13	11. 20. 0.
1743.	— 0. 9	10. 26. 7	0. 6. 46.
1744.	+ 0. 28	11. 28. 58	0. 23. 30.
1745.	+ 1. 3	1. 1. 52	1. 9. 32.
1746.	— 1. 36	2. 4. 53	1. 27. 12.
1747.	— 5. 0	3. 8. 3	2. 16. 45.

ANNÉES.	ERREURS.	ANOMALIES			DISTANCES		
		de JUPITER.			de JUPITER à Saturne.		
	M. S.	S.	D.	M.	S.	D.	M.
1748.	— 7. 19	4.	11.	24	3.	8.	34.
1749.	— 8. 49	5.	14.	52	4.	2.	20.
1750.	— 7. 17	6.	18.	19	4.	27.	50.
1751.	— 5. 33	7.	21.	38	5.	21.	27.
1752.	— 0. 51	8.	24.	47	6.	13.	8.
1754.	+ 1. 34	9.	27.	45	7.	3.	28.
1755.	+ 1. 46	10.	0.	38	7.	22.	14.
1756.	+ 1. 4	0.	3.	30	8.	10.	9.
1757.	— 0. 19	1.	6.	24	8.	28.	2.
1758.	— 2. 49	2.	9.	26	9.	16.	58.
1759.	— 5. 30	3.	12.	38	10.	6.	35.
1760.	— 6. 37	4.	16.	0	10.	28.	14.
1761.	— 4. 8	5.	19.	29	11.	21.	9.
1762.	4. 19	6.	22.	55	0.	14.	5.
1763.	— 1. 52	7.	26.	13	1.	5.	43.
1765.	— 0. 56	8.	29.	19	1.	25.	10.
1766.	— 1. 3	10.	2.	17	2.	12.	30.
1767.	— 1. 58	11.	5.	9	2.	28.	19.
1768.	— 2. 54	0.	8.	1	3.	13.	23.
1769.	— 3. 31	1.	10.	56	3.	28.	46.
1770.	— 3. 52	2.	14.	0	4.	15.	20.
1771.	— 2. 9	3.	17.	14	5.	3.	49.
1772.	— 0. 9	4.	20.	37	5.	24.	45.
1773.	+ 0. 55	5.	24.	6	6.	17.	6.
1774.	+ 0. 18	6.	27.	31	7.	10.	10.
1775.	+ 0. 40	8.	0.	47	8.	2.	27.
1777.	— 1. 4	9.	3.	54	8.	23.	7.
1778.	— 2. 45	10.	6.	49	9.	12.	19.
1779.	— 3. 58	11.	9.	40	10.	0.	23.
1780.	— 4. 11	0.	12.	32	10.	18.	15.
1781.	— 2. 24	1.	15.	31	11.	7.	37.
1782.	— 0. 32	2.	18.	34	11.	27.	6.
1783.	— 3. 24	3.	21.	54	0.	17.	37.
1784.	+ 2. 37	4.	25.	14	1.	10.	49.
1785.	+ 0. 43	5.	28.	42	2.	5.	21.

J'ai supposé 20' d'erreur dans la longitude de 1727, rapportée par M. Cassini, comme l'indique le temps de l'opposition.

En comparant les années 1725 & 1784, dans lesquelles Jupiter & Saturne étoient à peu-près à pareilles situations, on voit que l'erreur des Tables a diminué de 4', ce qui indiqueroit une diminution à faire sur le moyen mouvement de Jupiter, employé dans mes Tables.

En comparant 1690 & 1749, 1714 & 1773, on trouve aussi une différence de 4'; ainsi depuis un siècle, le mouvement de Jupiter paroît toujours le même. Il n'y a qu'une seule erreur qui passe 7', c'est celle de 1749; il est vrai qu'il n'y a pour cette opposition, qu'une seule observation du passage de Jupiter (*Mém. de 1754, p. 326*). Mais l'erreur surpasse à peine de 4' celle qui avoit lieu cinquante-neuf ans auparavant; ainsi elle diminueroit si l'on faisoit le mouvement plus petit. Cependant, on augmenteroit par-là celle de 1725, qui est déjà très-forte, mais elle seroit au moins la seule. Ainsi cela n'empêche pas que je ne regarde le mouvement de Jupiter comme étant réellement plus petit que dans mes Tables, du moins dans ce siècle-ci, quoique Halley l'ait fait un peu plus grand.

Enfin, on ne voit rien dans ces erreurs, qui ne puisse être attribué, soit au défaut dans les élémens de Jupiter, soit à l'attraction de Saturne, & rien n'indique une altération sensible dans le mouvement de Jupiter, dans la dernière révolution, ni même dans ce siècle-ci.

Depuis la lecture de ce Mémoire, M. de la Place a reconnu, en 1786, par la théorie, une équation d'environ vingt minutes, dont la période est de huit cents soixante-dix-sept ans, & qui est produite par l'action de Saturne. Elle servira probablement à expliquer, non-seulement, l'équation séculaire de Jupiter, mais encore une partie des inégalités qu'on aperçoit dans la Table précédente.

Je terminerai ce Mémoire, en rapportant le calcul que

j'ai fait des anciennes observations de Jupiter, qui sont dans l'Almageste, pour en conclure le mouvement moyen de Jupiter, en faisant aux observations les corrections que j'ai expliquées (*Mémoires de 1766, page 467.*) J'y ai ajouté la parallaxe annuelle & l'équation de l'orbite, afin d'avoir la longitude moyenne déduite de l'observation & la quantité dont elle diffère de celle des Tables. Cette quantité que l'on a appelée jusqu'ici *équation séculaire*, est produite, suivant M. de la Place, par cette équation de 20', dont la période est d'environ huit cents soixante-dix-sept. ans; mais en attendant qu'on puisse appliquer cet élément aux observations anciennes, j'ai mis dans la dernière colonne de la Table suivante, le nombre de secondes qu'il faudroit ôter du mouvement annuel de mes Tables, 3^o 20' 37",68, suivant chacune de ces observations.

ANNÉES.	MOIS & JOURS.	TEMPS moyen à PARIS.	L I E U OBSERVÉ corrige.	Parallaxe annuelle.	ÉQUAT. de l'ORBITE.	LONGIT. MOYENNE déduite de l'Observation.	DIFF. des Tables	Chang. du mouv. ann.
		H. M.	S. D. M.	D. M.	D. M.	S. D. M.	D. M.	S.
Av. J. C. 240	Sept. 3	13. 45	3. 7. 6	— 9. 25	— 4. 31	2. 23. 10	3. 9	5,67.
Ap. J. C. 133	Mai 17	9. 8	7. 24. 13	+ 0. 4	+ 4. 45	7. 29. 2	2. 10	4,79.
136	Août 31	8. 8	11. 8. 57	— 0. 28	+ 0. 20	11. 8. 49	1. 55	4,23.
137	Oct. 7	15. 8	0. 15. 26	— 0. 20	— 2. 35	0. 22. 31	2. 10	4,78.
139	Juill. 10	15. 8	2. 16. 49	— 5. 34	— 4. 57	2. 6. 18	2. 34	5,66.

Le milieu, entre les cinq résultats est 5",02, ce qui donne pour le mouvement annuel moyen 1^o 20' 32",66, plus petit de 1" $\frac{1}{3}$ seulement, que dans les Tables de M. Cassini.

Le mouvement annuel que j'ai conclu de ces observa-

tions, exigera quelques corrections relativement aux perturbations, mais c'est du moins la quantité qu'il faut employer d'abord pour connoître la période de la nouvelle équation; sauf à rectifier le moyen mouvement lorsqu'on connoîtra les changemens de l'aphélie, de l'excentricité & de la longitude moyenne, que l'action de Saturne a dû produire dans le mouvement de Jupiter.

J'ai fait de semblables calculs pour le mouvement annuel de Saturne, que j'ai trouvé par les anciennes observations, $12^d\ 13'\ 34'',48$. Cinq fois ce mouvement & deux fois celui de Jupiter, donnent des quantités qui ne diffèrent que de $26'\ 47''$, ce qui ne feroit 360^d qu'au bout de huit cents six ans; telle est à peu-près la période de l'équation qui peut résulter de cette configuration des deux Planètes, ou de cinq fois le mouvement de Saturne, moins deux fois celui de Jupiter. Ce n'est-là qu'un premier essai, puisque l'équation dont il s'agit est le résultat de plusieurs autres, & qu'elle dépend de l'excentricité, qui est variable, du mouvement de l'aphélie, qui n'est pas uniforme; mais les observations que je viens de rapporter avec les corrections que j'y ai faites, sont les données auxquelles il faudra tâcher de satisfaire par la théorie,



M É M O I R E
CONTENANT LES OBSERVATIONS
DE LA PREMIÈRE COMÈTE DE 1784,
Observée à Paris, de l'observatoire de la Marine (a);
& de la seconde Comète observée à Malte (b).

Par M. MESSIER.

M. LE COMTE DE CASSINI découvrit cette Comète à la simple vue, le 24 Janvier; vers les 6 heures & demie du soir, près de la queue de la Baleine; formant un triangle à peu-près isocèle avec β & l'étoile γ de la queue: elle paroissoit alors dans le voisinage de la Lune, qui étoit dans son premier quartier. La Comète avoit une queue de deux degrés environ de longueur; le diamètre du noyau avoit une demi-minute.

Le lendemain 25, M. le Comte de Cassini me fit part de la découverte de cette Comète, & des circonstances que je viens de rapporter.

Le mouvement de la Comète, le 24, par une seule observation, n'avoit pu se reconnoître, de manière qu'on ignoroit la direction de la route qu'elle devoit tenir dans le ciel.

Depuis le 24, jour où elle fut découverte, jusqu'au 3 Février suivant, le ciel fut constamment couvert le jour & la nuit d'un brouillard très-épais: pendant cet intervalle

(a) C'est la vingt-deuxième des Comètes que j'ai observées de l'observatoire de la Marine, à l'hôtel de Clugny; & la soixante-neuvième Comète, dont l'orbite ait été calculée, en suivant la Table des

Comètes, qui est rapportée dans l'Astronomie de M. de la Lande, tome III, page 366; & tome IV, page 704.

(b) Qui est la soixante-dixième dont l'orbite a été calculée.

de temps, il tomba une assez grande quantité de neige, & le froid avoit également augmenté. Le 31 Janvier, à 7 heures 30' du matin, le thermomètre, à mon observatoire, marquoit onze degrés 3 quarts au-dessous de zéro ou de la glace, & le 1.^{er} Février au matin, la rivière fut gelée en plusieurs endroits.

Le 3 Février, le ciel s'éclaircit pendant la journée, le soir, il n'y avoit plus qu'un peu de brouillard dans l'air, & la Lune, qui approchoit de son plein, répandoit une grande lumière. La Comète n'avoit pas été vue depuis le 24 Janvier, à cause du mauvais temps, & comme on ignoroit son mouvement & le lieu du ciel où il falloit la chercher, je plaçai ma grande lunette achromatique dans le plan du méridien, & je lui fis parcourir une grande partie du ciel, dans tout l'espace où la Comète pouvoit se trouver, si par son mouvement depuis le 24 Janvier elle s'étoit élevée au-dessus de l'horizon. Après bien des recherches, je la découvris, vers 5 heures 54 minutes du soir, sur le parallèle de l'étoile λ des Poissons, cinquième grandeur; je la comparai trois fois à cette Étoile, une fois à la 506.^e du catalogue zodiacal de feu M. l'Abbé de la Caille, & à deux Étoiles de septième grandeur, dont les lieux n'avoient pas encore été déterminés; mais je les comparai à λ des Poissons.

A cause du brouillard qui étoit répandu dans l'air, & de la grande lumière de la Lune, la Comète ne pouvoit le voir à la simple vue, mais elle se voyoit très-bien avec une petite lunette de nuit de 15 pouces de foyer: en la voyant dans la grande lunette achromatique, on lui soupçonnoit une queue fort courte, & dirigée vers la partie du ciel E. S. E.

Je mesurai, au moyen du micromètre à fils qui étoit adapté à la lunette, le diamètre du noyau de la Comète, qui avoit beaucoup de lumière; je le trouvai de 40 secondes, & celui de l'atmosphère qui environnoit le noyau, de 1'31".

• La comparaison de la Comète avec l'étoile λ des Poissons,

m'a donné sa position. Le 3 Février, à $6^h 5' 9''$ de temps vrai, la Comète suivoit l'Étoile au fil horaire du micromètre, de $1^d 46' 30''$; la Comète étoit plus au nord que l'Étoile, de 13 secondes : ainsi l'ascension droite de la Comète étoit de $354^d 32' 14''$, & sa déclinaison $35' 57''$, boréale.

Je ne rapporte ces détails que pour la première observation ; on trouvera les autres positions de la Comète, & celles des Étoiles qui ont servi à sa détermination, dans deux Tables que je rapporte à la suite de ce Mémoire. La première contient les déterminations de la Comète en ascension droite & en déclinaison pour chaque jour d'observation, avec les différences de passage entre la Comète & les Étoiles avec lesquelles la Comète a été comparée, ainsi que les différences en déclinaison. La seconde Table contiendra la position des Étoiles, soit celles qui étoient déjà connues, soit celles que j'ai déterminées par de nouvelles observations : la plupart de ces Étoiles ont été employées à la détermination des lieux de la Comète, à chaque jour où elle a été observée.

Le 4 Février au soir, le ciel qui avoit été couvert toute la journée d'un brouillard élevé, s'éclaircit vers les quatre heures du soir, les Étoiles parurent ; mais la Lune qui approchoit de son plein, répandoit une lumière qui empêchoit de bien juger des apparences de la Comète ; on la voyoit cependant un peu plus belle, & la queue plus sensible que le 3, ce qui pouvoit provenir de ce que la Lune étoit plus éloignée de la Comète que le jour précédent. Je déterminai le lieu de la Comète par trois étoiles des Poissons ; les positions sont rapportées dans la première Table, & celles des trois Étoiles dans la seconde.

Depuis le 4 Février jusqu'au 10 du même mois, le ciel fut couvert les soirs d'un brouillard épais & constant ; le 10 au soir, le ciel s'éclaircit en grande partie, il étoit sans Lune ; la Comète se faisoit voir à la simple vue, avec une queue de 2 degrés $\frac{1}{2}$ de longueur, d'une lumière très-

foible; le noyau étoit brillant, environné de nébulosité. Auprès de la Comète étoit une Étoile de septième grandeur, qui n'avoit pas encore été déterminée; je trouvai sa position, en la comparant directement à l'étoile C^2 des Poissons, ainsi qu'une autre Étoile de même grandeur: la Comète fut comparée à ces deux nouvelles Étoiles & aux étoiles connues C^1 , C^2 des Poissons. Les positions de la Comète, qui ont résulté de ces observations, sont rapportées dans la première Table, & celles des Étoiles dans la seconde.

Les 11, 12 & 13 Février, il ne fut pas possible de voir la Comète, à cause du brouillard. Le 14, vers les sept heures du soir, le ciel s'éclaircit en partie, mais l'horizon étoit tellement couvert de brouillard, qu'il ne fut pas possible de voir la Comète. Le ciel continua d'être couvert jusqu'au 23, qu'il commença à s'éclaircir, le Soleil parut le matin & l'après-midi; après son coucher, le ciel se couvrit d'un léger brouillard qui affoiblissoit la lumière des Étoiles. Je cherchai la Comète assez long-temps dans l'endroit du ciel où elle devoit se trouver d'après mes précédentes déterminations; je la vis enfin, mais près de l'horizon où le ciel étoit devenu le plus clair: on la voyoit assez bien à la lunette; mais le peu de temps qui me restoit, ne me permit d'en faire qu'une observation. J'observai le passage de la Comète au fil horaire du micromètre, & j'attendis, après ce passage, celui de quelqu'Étoile. Il en passa une qui ne m'étoit pas connue, & sa lumière se trouvoit fort affoiblie par le brouillard; elle laissa une petite incertitude à son passage au fil horaire, de manière que cette détermination de la Comète doit être regardée comme un peu douteuse. Je recherchai ensuite l'Étoile, & je la comparai, le 7 Mars, à la soixante-seizième de Pégase, suivant Flamstéed; ayant obtenu sa position, je déterminai celle de la Comète: on la trouvera dans la première Table qui est à la suite de ce Mémoire.

Depuis le 23 Février jusqu'au 29, le ciel couvert ne

permit pas de revoir la Comète; mais le 29, le ciel devint parfaitement beau toute la journée: ce jour sembloit être le seul de l'hiver qui fût presque sans brouillard. Je cherchai, malgré un grand crépuscule, l'étoile γ (algenib), de l'aile de Pégase, qui me servit à trouver la Comète; ses apparences étoient bien diminuées depuis ma dernière observation; on ne faisoit plus que lui soupçonner une queue bien foible; on distinguoit encore fort bien la nébulosité, le noyau étoit très-apparent. La Comète paroissoit entre les deux étoiles S & ϕ de Pégase, j'estimai cette dernière Étoile de cinquième grandeur; Flamsteed, dans son Catalogue, la rapporte de la sixième. Je comparai la Comète à ces deux Étoiles, & à deux autres Étoiles de septième grandeur, qui n'étoient pas connues; leurs positions furent déterminées en les comparant à l'étoile S . De ces observations j'ai conclu le lieu de la Comète en ascension droite & en déclinaison; on les trouvera dans la première Table.

Le 1.^{er} Mars au soir, le ciel étoit assez beau au couchant. Je cherchai avec la grande lunette l'étoile ϕ de Pégase, près de laquelle la Comète étoit le jour précédent; je ne tardai pas à voir la Comète, elle fut comparée trois fois à cette Étoile: les positions en sont rapportées dans la première Table. Les apparences de la Comète étoient bien affoiblies, soit par les vapeurs de l'horizon, soit par la grande lumière de la Lune; le noyau avoit encore de la lumière, il étoit environné d'une nébulosité sensible, mais sans aucune apparence de queue.

Le 2 Mars au soir, je vis la Comète un moment sans pouvoir l'observer; elle étoit près de l'horizon & dans les vapeurs.

Depuis le 2 jusqu'au 8, je ne pus revoir la Comète, à cause du mauvais temps; mais le 8 au soir, le ciel fut très-beau. Pour trouver la Comète, je cherchai les étoiles ϕ & r de Pégase, la Comète devoit être sur le parallèle de cette dernière; mais le crépuscule alors étoit encore

de la Comète qui a résulté de ces observations , est rapportée dans la première Table , celles des Étoiles sont dans la seconde.

Le 26 de Mai au matin , par un beau temps , le ciel pur , j'observai la Comète pour la dernière fois ; elle avoit perdu depuis la dernière observation presque toute sa lumière , on ne faisoit plus que la soupçonner dans le champ de la lunette , quoique les fils du micromètre ne fussent point éclairés ; ce n'étoit plus qu'une tache de lumière très-foible & égale , sans aucune apparence de noyau ; son passage au fil horaire du micromètre ne fut qu'estimé. L'observation fut répétée plusieurs fois avec des Étoiles , & j'ai pris un milieu pour avoir sa position ; on la trouvera dans la première Table , & celles des Étoiles dans la seconde : cette observation est la dernière que j'aie pu faire sur cette Comète. Mes observations vont depuis le 3 Février au soir jusqu'au 26 de Mai au matin , ce qui fait cent quatorze jours. Pendant cet intervalle de temps , j'ai eu huit jours d'observations le soir , avant que la Comète entrât dans les rayons du Soleil ; & cinq le matin , après sa conjonction , ce qui fait treize jours : ces treize jours d'observations m'ont donné cinquante-sept déterminations du lieu de la Comète , en ascension droite & en déclinaison ; elles sont rapportées dans la Table qui suit.

La première Table contient les lieux de la Comète en ascension droite & en déclinaison , avec les différences de passage entre la Comète & les Étoiles au fil horaire du micromètre , & les différences en déclinaison entre la Comète & l'Étoile , à laquelle elle a été comparée. Ces différences sont marquées des signes $+$ & $-$; le premier , indique qu'il faut ajouter ces différences observées , aux positions des Étoiles , avec lesquelles la Comète a été comparée , pour avoir celles de la Comète ; le second qu'il faut ôter , & l'on aura l'ascension droite & la déclinaison de la Comète.

La seconde Table renferme les ascensions droites & les
déclinaisons

déclinaisons des Étoiles qui ont été employées à la détermination du lieu de la Comète, tant celles qui ont été prises en différens Catalogues, que les nouvelles Étoiles que j'ai déterminées : ces nouvelles Étoiles sont au nombre de vingt-quatre. Leurs positions sont réduites au temps des observations ; je n'y ai fait d'autre réduction que celle qu'on trouve dans les Catalogues, sous le titre de *Variation annuelle*.

Je joins aussi à ce Mémoire une Carte céleste que j'ai construite d'après mes observations. Cette Carte est divisée en degrés d'ascension droite & de déclinaison ; j'y ai rapporté les positions & la route apparente de la Comète parmi les Étoiles fixes : à l'inspection de cette Carte, il sera aisé de juger de la position de la Comète observée & de celles des Étoiles qui ont servi à sa détermination ; je les ai renfermées dans un cercle. J'ai rapporté aussi, sur cette Carte, la première observation, de M. le Comte de Cassini, du 24 Janvier. On verra par cette Carte, que la Comète a commencé à paroître près de la queue de la Baleine ; qu'elle a traversé l'Écliptique & l'Équateur dans les premiers jours de Février ; qu'elle a passé dans les Poissons, traversé Pégase, & qu'elle a cessé de paroître entre le Léopard & la main droite d'Andromède.

Cette Comète avoit été vue, à l'Isle-de-Bourbon le 15 Décembre 1783 ; au Cap de Bonne-espérance, le 10 Janvier suivant ; le 16, à la Guadeloupe, par M. Tondu ; le 20, à Malte, par M. le Chevalier d'Angos : aucune de ces observations ne m'est parvenue.

M. Méchain a calculé les élémens de l'orbite de cette Comète, d'après ses observations, depuis le 24 Janvier jusqu'au 26 de Mai : les voici comme il les a donnés dans la Connoissance des Temps de 1788, page 334.

Lieu du nœud ascendant.	1 ^r 26 ^d 49' 21"
Inclinaison de l'orbite.	51. 9. 12.
Lieu du périhélie.	2. 20. 44. 24.
Logarithme de la distance périhélie.	9,849946.
Passage au périhélie, 21 Janv. 1784, à 4 ^h 56' 47", t. moyen à Paris,	
Sens du mouvement, rétrograde.	

Mém. 1784.

S f

TABLE I.

*Des Lieux apparens de la première Comète de 1784,
comparée aux Étoiles fixes.*

1784.	T E M P S V R A I.	ASCENSION droite de la Comète observée.	DÉCLINAIS. de la Comète observée. Éorcale	DIFFÉRENCE en ascenſ. dr. de la Comète avec les Étoiles.	DIFFÉRENCE en déclinaif. entre la Comète & les Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	Lettres & N. ^o des Étoiles.	É T O I L E S avec lesquelles la Comète a été comparée.	
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.				
Février	3	6. 5. 9	354. 32. 14	0. 35. 57	+ 1. 46. 30	+ 0. 13	5	λ	des Poissons.
		6. 5. 9	354. 32. 14	0. 35. 57	+ 0. 5. 45	— 24. 51	7	17	déterminée.
		6. 5. 9	354. 32. 14	0. 35. 57	— 0. 28. 37	— 26. 12	7	19	déterminée.
		6. 36. 13	354. 32. 14	0. 37. 1	+ 1. 46. 30	+ 1. 17	5	λ	des Poissons.
		6. 36. 13	354. 32. 21	0. 37. 1	— 0. 58. 15	— 17. 22	6	506	de la Caille.
		6. 36. 13	354. 32. 14	0. 37. 14	+ 0. 5. 45	— 23. 29	7	17	déterminée.
		6. 36. 13	354. 32. 6	0. 37. 16	— 0. 28. 45	— 24. 53	7	19	déterminée.
		7. 3. 55	354. 32. 14	0. 38. 29	+ 1. 46. 30	+ 2. 45	5	λ	des Poissons.
	4	6. 19. 12	354. 32. 26	1. 40. 52	+ 0. 41. 52	— 36. 23	5	501	de la Caille.
		6. 23. 18	354. 32. 26	1. 40. 44	+ 0. 41. 52	— 36. 31	5	501	la même.
		6. 57. 10	354. 32. 18	1. 42. 32	+ 8. 2. 45	— 23. 54	4	γ	des Poissons.
		7. 1. 24	354. 32. 41	1. 42. 40	+ 0. 42. 7	— 34. 35	5	501	} de la Caille.
		7. 6. 37	354. 32. 34	1. 42. 43	+ 0. 42. 0	— 34. 32	5	501	
		7. 6. 37	354. 32. 34	1. 42. 43	— 0. 41. 30	— 1. 23	6	22	des Poissons.
	10	6. 39. 31	354. 23. 24	7. 1. 26	+ 0. 6. 0	— 1. 30	7	16	déterminée.
		6. 47. 13	354. 23. 16	7. 1. 36	— 3. 28. 30	— 15. 27	5.6	c ²	} des Poissons.
		6. 47. 13	354. 23. 47	7. 1. 45	— 3. 26. 30	— 43. 10	6	c ¹	
		6. 47. 13	354. 23. 16	7. 1. 36	— 1. 44. 45	0. 0	7	20	} déterminées.
		6. 47. 13	354. 23. 16	7. 1. 36	+ 0. 5. 52	— 1. 20	7	16	
		7. 17. 33	354. 23. 1	7. 2. 56	+ 0. 5. 37	0. 0	7	16	} des Poissons.
		7. 17. 33	7. 2. 49	— 14. 14	5.6	c ²	
	23	6. 14. 11	353. 47. 59	14. 45. 7	— 4. 3. 45	— 17. 57	7	23	déterminée.
	29	6. 46. 38	353. 29. 42	17. 20. 54	+ 1. 45. 0	+ 9. 18	6	5	de Pégase.
		6. 46. 38	353. 29. 46	17. 20. 58	+ 0. 37. 0	— 6. 19	7	13	déterminée.
		6. 55. 40	353. 30. 4	17. 20. 58	+ 1. 45. 22	+ 9. 22	6	5	de Pégase.
		6. 55. 40	353. 30. 1	17. 21. 0	+ 0. 37. 15	— 6. 18	7	13	} déterminées.
		6. 55. 40	353. 30. 4	17. 20. 58	+ 1. 10. 30	+ 20. 18	7	12	
		6. 59. 53	353. 30. 10	17. 21. 59	— 1. 51. 30	— 32. 55	5	φ	} de Pégase.
		7. 9. 36	353. 29. 55	17. 22. 9	— 1. 51. 45	— 32. 45	5	φ	
Mars..	1	6. 37. 25	353. 27. 10	17. 45. 11	— 1. 54. 30	— 9. 43	5	φ	

Suite de la Table des Lieux apparens de la première Comète, &c.

1784.	TEMPS vrai.	ASCENSION droite de la Comète observée.	DÉCLINAIS. de la Comète observée, Boréale.	DIFFÉRENCE en ascens. dr. de la Comète avec les Étoiles.	DIFFÉRENCE en déclinais. de la Comète avec les Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	Letres & N. ^o des Étoiles.	ÉTOILES avec lesquelles la Comète a été comparée.
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.			
Mars... 1	6. 46. 49	353. 27. 33	17. 45. 17	— 1. 54. 7	— 9. 37	5	φ	de Pégaſe.
	6. 56. 17	353. 27. 40	17. 45. 23	— 1. 54. 0	— 9. 31	5	φ	
8	6. 54. 22	353. 12. 8	20. 21. 56	— 2. 12. 37	— 10. 7	6	r ^a	
	6. 54. 22	353. 12. 8	20. 21. 56	— 2. 8. 37	— 5. 38	6	r ¹	
	6. 54. 22	353. 12. 12	20. 21. 52	— 0. 19. 45	+ 10. 32	7	r ⁵	déterminée.
	7. 6. 54	353. 11. 45	20. 22. 14	— 2. 13. 0	— 9. 49	6	r ^a	de Pégaſe.
	7. 6. 54	353. 11. 45	20. 22. 8	— 2. 9. 0	— 5. 26	6	r ^a	
	7. 6. 54	353. 11. 42	20. 22. 18	— 0. 20. 19	+ 10. 58	7	r ⁵	
11	7. 13. 20	353. 6. 30	21. 25. 20	— 1. 29. 0	— 14. 13	7	18	déterminées.
	7. 13. 20	353. 6. 30	21. 25. 13	— 3. 19. 0	— 1. 46	7	22	
Mai... 15	14. 9. 39	346. 22. 33	41. 28. 20	+ 3. 22. 15	+ 18. 5	3.4	0	d'Andromède.
	14. 9. 39	346. 22. 33	41. 28. 20	+ 3. 12. 0	— 7. 46	6	2	
	14. 9. 39	346. 22. 33	41. 28. 20	— 1. 2. 0	+ 34. 15	6	10	
17	14. 3. 41	345. 48. 10	42. 4. 41	+ 2. 37. 37	— 28. 35	6	2	
	14. 3. 41	345. 48. 10	42. 4. 41	— 6. 5. 30	+ 0. 8	4	1	d'Andromède.
	14. 3. 41	345. 47. 49	42. 5. 5	+ 0. 40. 45	— 18. 29	6.7	6	
	14. 3. 41	345. 48. 10	42. 4. 41	— 3. 23. 15	+ 20. 59	6	13	
20	13. 24. 46	344. 49. 21	42. 59. 26	— 0. 25. 7	+ 29. 36	7	6	déterminée.
	14. 10. 20	344. 48. 49	42. 59. 54	— 0. 18. 15	+ 36. 20	6.7	6	d'Andromède.
	14. 34. 17	344. 48. 19	42. 59. 50	— 0. 18. 45	+ 36. 16	6.7	6	
22	13. 32. 27	344. 6. 35	43. 36. 5	+ 6. 22. 0	+ 26. 13	5	11	du Léopard.
	13. 42. 41	344. 7. 20	43. 36. 32	— 0. 25. 30	+ 12. 13	8	5	déterminées.
	13. 50. 10	344. 7. 28	43. 36. 33	— 0. 25. 22	+ 12. 14	8	5	
	14. 0. 2	344. 7. 35	43. 36. 58	— 8. 18. 45	+ 28. 6	4	x	
25	13. 11. 11	342. 59. 53	44. 30. 13	— 1. 27. 45	— 43. 44	6	4	d'Andromède.
	13. 58. 19	342. 59. 38	44. 30. 14	— 1. 28. 0	— 43. 43	6	4	
	14. 19. 36	342. 59. 46	44. 30. 17	— 1. 27. 52	— 43. 40	6	4	

TABLE I.

Des Ascensions droites & des Déclinaisons des Étoiles avec lesquelles la première Comète de 1784 a été comparée.

Leurs positions sont réduites au temps de l'Observation.

ASCENSION droite des Étoiles.	DÉCLINAISON Boréale des Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	N. ^o des Étoiles.	N O M S D E S É T O I L E S. qui ont servi à la détermination du lieu de la Comète.
D. M. S.	D. M. S.			
337. 44. 35	43. 9. 52	5	11	du Léopard, comparée à l'Étoile nouvelle n. ^o 5.
339. 8. 5	43. 26. 22	6	1	Comète comparée le 22 Mai.
340. 58. 35	43. 36. 49	6	2	nouvelle, comparée à la onzième du Léopard.
342. 42. 38	44. 13. 53	8	3	nouvelle, déterminée par la onzième du Léopard.
343. 0. 18	41. 10. 15	3.4	0	nouvelle, dét. la Comète en étoit près le 25 Mai.
343. 10. 33	41. 36. 6	6	2	d'Andromède, déduite de la Caille. Comète comparée le 15 Mai.
344. 22. 8	44. 54. 46	7	4	d'Andromède, comparée à 0. Comète comparée les 15 & 17 Mai.
344. 27. 38	45. 13. 57	6	4	nouvelle, déterminée par le n. ^o 4 d'Andromède.
344. 32. 50	43. 24. 19	8	5	d'Andromède, déduite de Flamsteed. Comète comparée le 25 Mai.
345. 7. 4	42. 23. 34	6.7	6	nouvelle, déterminée par x d'Andromède. Comète comparée le 22 Mai.
345. 14. 28	42. 29. 50	7	6	d'Andromède, comparée au n. ^o 2. Comète comp. les 17 & 20 Mai.
346. 15. 53	45. 21. 26	7	7	nouvelle, déterminée par x d'Andromède. Comète comparée le 20 Mai.
346. 29. 33	2. 6. 26	4	7	nouvelle, comparée à l'Étoile n. ^o 4 d'Andromède.
347. 24. 33	40. 54. 5	6	10	des Poissons, déduite de Mayer. Comète comparée le 4 Février.
347. 37. 20	42. 55. 52	7	8	d'Andromède, comp. à 0. Com. comp. le 15 Mai.
349. 11. 25	41. 43. 42	6	13	nouvelle, comparée à la nouvelle Étoile n. ^o 6.
349. 47. 23	45. 17. 4	6	9	d'Andromède, comparée au n. ^o 2. Comète comp. le 17 Mai.
350. 40. 0	21. 18. 56	6	9	nouvelle, déterminée par l'étoile n. ^o 4 d'Andromède.
350. 51. 30	45. 29. 52	6	10	Pégase, déterminée par son passage au Méridien.
351. 44. 28	43. 14. 42	5	11	nouvelle, déterminée par l'Étoile n. ^o 4 d'Andromède.
351. 44. 42	17. 11. 36	6	5	nouvelle, déterminée par l'Étoile x d'Andromède.
351. 53. 40	42. 4. 33	4	1	Pégase, déduite de Flamsteed. Comète comparée le 29 Février.
352. 19. 34	17. 0. 40	7	12	d'Andromède, déd. de l'étoile n. ^o 2 d'Andromède. Comète comparée le 17 Mai.
				nouvelle, comparée à 5 de Pégase. Comète comparée le 29 Février.

Suite de la Table des Ascensions droites, &c.

ASCENSION droite des Étoiles.	DÉCLINAISON Boréale des Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	N. ^o des Étoiles.	NOMS DES CONSTELLATIONS qui ont servi à la détermination du lieu de la Comète.
D. M. S.	D. M. S.			
352. 26. 20	43 . 8. 52	4	x	d'Andromède, déduite de Flamstéed. Comète comparée le 22 Mai.
352. 45. 44	0. 35. 44	5	λ	Poissons, déduite de Mayer. Comète comparée le 3 Février.
352. 52. 46	17. 27. 18	7	13	nouvelle, déterminée par δ de Pégase. Comète comparée le 29 Février.
352. 55. 44	15. 8. 1	6	76	de Pégase, déduite du catalogue de Flamstéed.
353. 30. 27	42. 33. 36	7	14	nouvelle, déterminée par l'Étoile x d'Andromède.
353. 31. 57	20. 11. 20	7	15	nouvelle, déterminée par r^2 de Pégase. Comète comparée le 8 Mars.
353. 50. 34	2. 17. 15	5	501	de la Caille, milieu pris avec Mayer. Comète comparée le 4 Février.
354. 17. 24	7. 2. 56	7	16	nouvelle, déterminée par c^2 des Poissons. Comète comparée le 10 Février.
354. 26. 29	1. 0. 48	7	17	nouvelle, déterminée par λ des Poissons. Comète comparée le 3 Février.
354. 35. 30	21. 39. 33	7	18	nouvelle, déterminée par γ de Pégase. Comète comparée le 11 Mars.
355. 0. 51	1. 2. 9	7	19	nouvelle, déterminée par λ des Poissons. Comète comparée le 3 Février.
355. 14. 4	1. 44. 6	6	22	Poissons, Flamstéed, comp. à la cinq cent-unième de la Caille. Comète comparée le 4 Février.
355. 20. 45	20. 27. 34	6	r^1	de Pégase, détermin. par r^2 . Com. comp. le 8 Mars.
355. 21. 40	17. 54. 54	5	ϕ	Pégase, déduite de Flamstéed. Comète comparée les 20 Février & 1. ^{er} Mars.
355. 24. 45	20. 32. 3	6	r^2	Pégase, déduite de Flamstéed. Comète comparée le 8 Mars.
355. 30. 36	0. 54. 23	6	506	de la Caille, milieu avec Flamstéed. Comète comparée le 3 Février.
356. 8. 1	7. 1. 36	7	20	nouvelle, déterminée par c^2 des Poissons. Comète comparée le 10 Février.
356. 14. 7	19. 52. 20	6	21	nouvelle, déterminée par r^1 de Pégase.
356. 25. 30	21. 26. 59	7	22	nouvelle, déterminée par γ de Pégase. Comète comparée le 11 Mars.
357. 50. 17	7. 44. 55	6	c^1	Poissons, déduite de Flamstéed. Comète comparée le 10 Février.
357. 51. 44	15. 3. 4	7	23	nouvelle, déterminée par la soixante-seizième de Pégase. Comète comparée le 23 Février.
357. 51. 46	7. 17. 3	5.6	c^2	Poissons, déduite de Flamstéed & de la Caille, milieu. Comète comparée le 10 Février.
1. 46. 4	2. 35. 25	7	24	nouvelle, déterminée par l'Étoile cinq cent unième de la Caille.

Nota. L'étoile α de Pégase, sixième grandeur, ne se trouvoit dans le grand catalogue de Flamsteed, mais il l'a rapportée à ses Cartes : j'ai déterminé sa position par α . Pour l'étoile σ , la plus voisine d'Andromède, dans le catalogue de Flamsteed, la distance au pôle est rapportée de $40^d 19' 30''$; on doit lire $49^d 19' 30''$: l'ascension droite de cette Étoile est bonne quoique j'aie mis (*Mém. de l'Académie* année 1775, page 458) qu'il y avoit $12' 15''$ d'erreur.

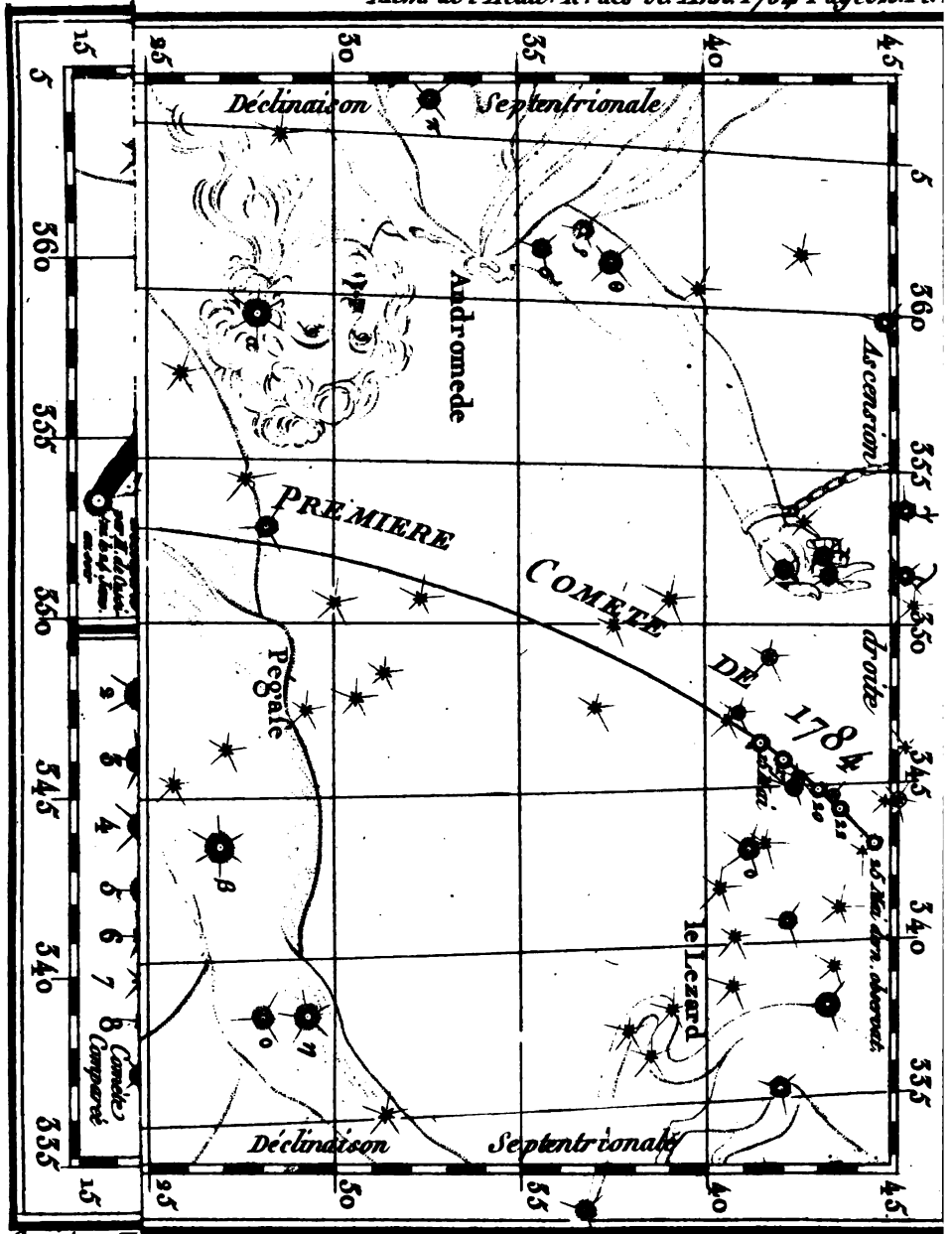
SECONDE COMÈTE de 1784

CETTE seconde Comète, de 1784, fut découverte à Malte, dans la constellation du Renard, le 11 Avril par M. le chevalier d'Angos.

Le 14 du mois de Mai suivant, je reçus une Lettre datée de Malte, le 15 Avril, dans laquelle il me donnoit : voici l'extrait de sa Lettre.

« J'ai découvert une nouvelle Comète, le 11 Avril dans la constellation du Renard; elle est fort petite, sans queue, & n'a qu'une légère apparence de nébulosité : je l'ai pris pour une nébuleuse; cependant je déterminai sa position. Je ne pus la voir le lendemain à cause du brouillard. Le 13 je fus assuré que c'étoit une Comète; mais les nuages m'empêchèrent de l'observer : le 14 je fus pas plus heureux, je vis seulement à peu-près la direction de son mouvement; mais je l'ai bien observée aujourd'hui 15, je l'ai jugée un peu plus lumineuse; peut-être cela vient-il de ce que l'atmosphère étoit plus pure; mes premières observations de chaque jour ».

ANNÉE	TEMPS	ASCENSION.	DÉCLIN.
1784.	VRAI.	DROITE.	BORÉALE.
	H. M.	D. M.	D. M.
Avril 11	2. 31	315. 18	22. 21.
15	3. 18	307. 55	15. 28.



Gravé par Y.

Le lendemain de la réception de la Lettre, le 15 Mai, par un ciel parfaitement beau & pur, je cherchai cette Comète avec ma grande lunette achromatique; je parcourus non-seulement toute la constellation du Renard, mais aussi une grande partie du ciel. Je fis ces recherches non-seulement le 15, mais plusieurs autres nuits, & il ne me fut pas possible de l'apercevoir; je ne trouvai, dans le Renard, que la belle nébuleuse, sans étoile, & sous une forme ovale que j'avois découverte le 12 Juillet 1764, qui avoit alors $297^d\ 21'\ 41''$ d'ascension droite, & $22^d\ 4'$ de déclinaison boréale. Cette nébuleuse est rapportée dans mon Mémoire imprimé dans le volume de l'Académie, *année 1771, page 435*, sous le *N.º 27*. C'est dans le voisinage de cette belle nébuleuse, que M. le chevalier d'Angos a découvert cette Comète.

Cette Comète a été sans doute très-petite & de peu de durée, & il ne paroît pas qu'aucun Astronome de l'Europe l'ait observée. Il n'en est parvenu aucune observation à l'Académie, ni à ma connoissance, & M. le chevalier d'Angos paroît être le seul qui l'ait observée. Il a eu assez d'observations pour calculer les élémens de son orbite: les voici comme il me les a envoyés, & comme M. Pingré les a donnés à l'Académie, le 7 Décembre 1784.

Lieu du nœud ascendant.....	$2^f\ 26^d\ 52'\ 9''$
Inclinaison de l'orbite.....	47. 55. 10.
Lieu du périhélie.....	10. 28. 54. 57.
Logarithme de la distance périhélie.....	9,8132683.
Passage par son périhélie, le 9 Avril 1784, à $21^h\ 16'\ 46''$, temps moyen, méridien de Paris.	

Sens du mouvement..... rétrograde.

M. le chevalier d'Angos ne nous a envoyé d'autres observations de cette Comète, que les deux déterminations de son lieu, que je viens de rapporter.



O B S E R V A T I O N
D E L'ÉCLIPSE DE LUNE,
Faite à l'observatoire de la Marine, hôtel de Clugny,
la nuit du 6 au 7 Mars 1784.

Par M. MESSIER.

LA Lune, avant le commencement de l'éclipse, paroït-
 soit à travers des nuages rares, & sa lumière en étoit
 affoiblie; ces nuages continuèrent d'exister, de manière
 que le commencement de l'éclipse fut douteux, on ne
 pouvoit juger des limites de l'ombre que très-imparfai-
 tement. Les observations du commencement de l'éclipse,
 des immersions des taches, & la mesure de la grandeur de
 l'ombre, furent incertaines jusqu'à $14^h 45' 27''$, que la Lune
 se découvrit; l'ombre alors sur la Lune, paroïssoit belle,
 brune & bien terminée: on observoit que l'ombre étoit
 plus foncée au bord, que dans la partie intérieure qui
 couvroit déjà une partie de la Lune. Les observations qui
 furent faites pendant le temps que la Lune parut claire,
 durèrent jusqu'à $15^h 31' 50''$; des nuages alors très-épais
 s'élevèrent de l'horizon, poussés par un vent assez fort du
 Sud-est, & couvrirent la Lune entièrement: vers 16^h ,
 il commença à pleuvoir. La Lune ayant reparu dans un
 intervalle de nuage, j'observai la grandeur de l'ombre;
 ensuite des nuages épais la couvrirent de nouveau jusqu'à
 la fin: la pluie augmenta, & elle tomboit très-fort à 6
 & à 7 heures du matin, le 7.

J'ai employé à cette observation, une grande lunette
 achromatique de 40 lignes d'ouverture, & un grossisse-
 ment de quarante fois; elle étoit garnie d'un micromètre
 à fils, qu'on pouvoit incliner dans tous les sens.

L'éclipse

L'éclipse commença entre les taches de *Aristarchus* & *Harpalus*.

TABLE des Observations des Taches.

TEMPS VRAI.			N. ^{os} des Taches.	TACHES OBSERVÉES.
H.	M.	S.		
14.	16.	1	Pénombre foible.
14.	22.	0	Pénombre plus forte.
14.	25.	0	Commencement de l'éclipse, douteux.
14.	31.	53	7	<i>Harpalus</i> au bord de l'ombre.
14.	36.	13	8	<i>Heracles</i> au bord de l'ombre.
14.	38.	32	12	<i>Helicon</i> au bord de l'ombre.
14.	39.	48	3	<i>Aristarchus</i> au bord de l'ombre.
14.	45.	27	17	<i>Plato</i> au bord de l'ombre.
14.	46.	36	17	<i>Plato</i> entré.
15.	2.	2	Tache entre <i>Copernicus</i> & <i>Helicon</i> , au bord de l'ombre.
15.	2.	34	2	<i>Galileus</i> au bord de l'ombre.
15.	3.	34	4	<i>Keplerus</i> au bord de l'ombre.
15.	5.	23	F	<i>Mare-Serenitatis</i> entre dans l'ombre.
15.	16.	56	27	<i>Possidonius</i> au bord de l'ombre.
15.	17.	1	G	<i>Mare-Imbrium</i> entré dans l'ombre.
15.	19.	15	27	<i>Possidonius</i> à moitié dans l'ombre.
15.	20.	41	27	<i>Possidonius</i> dans l'ombre.
15.	21.	59	11	<i>Copernicus</i> au bord de l'ombre.
15.	24.	41	F	<i>Mare-Serenitatis</i> à moitié dans l'ombre.
15.	25.	50	2	<i>Galileus</i> s'éloigne de l'ombre, elle étoit restée au bord de l'ombre.
15.	31.	50	La Lune disparoit dans un nuage très-épais.

Il est tombé de la pluie ensuite, qui a continué. *Keplerus*
Mém. 1784.

T t

330 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

n'est entré dans l'ombre que de $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{3}$. *Copernicus* étoit resté jusqu'à ce moment au bord de l'ombre.

La fin de l'éclipse n'a pu être observée à cause du mauvais temps.

OBSERVATION de la grandeur de l'ombre , & du diamètre de la Lune.

T E M P S.			GRANDEUR		
V R A I.			observée.		
H.	M.	S.	M.	S.	
14.	34.	38	3.	21	Grandeur de l'ombre.
14.	41.	21	4.	39	Grandeur de l'ombre.
14.	48.	30	7.	17	Grandeur de l'ombre.
14.	50.	56	30.	24	Diamètre de la Lune , perpendiculaire à son parallèle.
14.	55.	28	8.	13	Grandeur de l'ombre.
15.	7.	0	10.	16	Grandeur de l'ombre.
15.	23.	16	12.	7	Grandeur de l'ombre.
16.	7.	34	10.	13	Grandeur de l'ombre.

Nota. Une minute après cette dernière observation de la grandeur de l'ombre, la Lune entra dans un nuage très-épais , & ce que je viens de rapporter , est tout ce que j'ai pu observer de cette éclipse.

Pendant tout le temps de ces observations , j'avois toujours vu le bord éclipsé de la Lune à travers l'ombre.



VÉRIFICATION (a)

DES NOUVELLES DÉCOUVERTES

Faites en Angleterre, sur les Étoiles fixes.

Par M. CASSINI.

LORSQUE le célèbre Huygens eut fait connoître en 1655, un satellite auprès de Saturne, on crut pendant long-temps qu'il ne pouvoit plus rester d'autre planète à découvrir. Cette opinion étoit en partie fondée sur l'idée assez singulière, que le nombre des satellites, qui se trouvoit alors de six, ne pouvoit surpasser celui des planètes principales du même système. Mais les découvertes de Jean-Dominique Cassini, prouvèrent par la suite, que la Nature n'est point asservie à de superstitieuses loix de nombre & d'égalité.

Après les dernières découvertes de Cassini, on devoit croire, à bien plus juste titre, que notre système planétaire étoit complet, & qu'à l'exception des Comètes, nous pouvions nous flatter de connoître toutes les planètes compagnes de la Terre, & soumises comme elle à l'empire du Soleil; en effet, les plus grandes lunettes & les recherches des plus infatigables observateurs, pendant un siècle, n'avoient pu rien découvrir de nouveau. On fut donc bien étonné d'apprendre, dans ces derniers temps, environ cent années après la découverte du dernier satellite de Saturne, qu'il existoit encore une planète du premier ordre, mue autour du Soleil, comme Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter & Saturne, suivant les mêmes loix, & décrivant une orbite également peu inclinée au plan de l'écliptique.

(a) L'Extrait de ce Mémoire a été lu à la rentrée publique de la Saint-Martin de l'année 1784.

Cette découverte, si inattendue, eut d'ailleurs des circonstances singulières. En effet, elle ne fut pas due à un Astronome, & le télescope merveilleux qui perça jusque dans la retraite éloignée de ce nouvel astre, ne fut point l'ouvrage d'un Opticien ; enfin, ce fut M. Herschell, Musicien Allemand, à qui l'on dut la connoissance de cette septième planète principale, qui depuis tant de milliers d'années se promenoit en silence dans l'immense étendue d'une sphère reculée, ignorée & confondue avec les plus petites étoiles.

Dans l'usage ordinaire de l'Astronomie, lorsqu'il s'agit d'observer les éclipses des satellites de Jupiter, de distinguer leurs ombres, d'apercevoir les bandes & les taches qui se remarquent sur le disque de plusieurs planètes ; la distinction parfaite de l'image, sa netteté, sa clarté, sont les effets les plus essentiels à obtenir dans l'exécution d'une lunette ou d'un télescope. Mais dans d'autres circonstances, comme celle où il s'agit principalement de découvrir & de percer dans les régions du ciel les plus reculées, de rapprocher de soi & de rendre plus visible un corps infiniment éloigné ou très-petit, c'est au grossissement alors qu'il convient particulièrement de s'attacher. Renonçant à la parfaite distinction, qui n'est plus la première condition, il faut, sans s'embarrasser des règles & des proportions prescrites, chercher à procurer à son télescope le plus grand pouvoir amplifiant, aux dépens même, jusqu'à un certain point, de la netteté des images. Qu'importe en effet que cette distinction soit moins parfaite, pourvu qu'elle permette de distinguer entr'eux les objets, & de s'assurer de leur existence.

On n'avoit point osé, avant M. Herschell, pousser plus loin qu'à trois ou quatre cents fois le grossissement des plus forts télescopes. M. Herschell franchit cette limite, il travailla lui-même avec un soin, des peines & une adresse infinies, des miroirs de télescope, dont il porta le grossissement jusqu'à trois mille fois. Quelle que fut la perfection

du travail de ces miroirs, un tel pouvoir amplifiant ne pouvoit certainement avoir lieu avec une parfaite distinction des images ; mais cette distinction toutefois fut suffisante pour distinguer dans le ciel & faire connoître un nombre considérable d'Étoiles fixes, que l'on n'avoit point encore remarquées, doubles, triples, quadruples, offrant par leurs différens groupes, leur diversité de grandeur & de couleur, l'aspect le plus singulier & le plus curieux.

L'annonce de ces nouveautés devoit faire, & fit en effet une grande sensation parmi les Savans. La nouvelle planète avoit à peine été annoncée, que tous les Astronomes avoient fixé sur elle leurs regards. Leurs instrumens, à la vérité, n'ayant point la force & la perfection de celui de M. Herschell, ils ne l'avoient aperçue que comme une étoile fort petite, n'ayant rien d'abord qui pût la faire distinguer des fixes qui l'environnoient ; mais le mouvement propre qu'ils lui reconnurent, & la conformité aux loix que suivent les autres planètes, les forcèrent bientôt de l'admettre dans notre système. Il n'en fut pas tout-à-fait de même par rapport aux étoiles doubles, triples & quadruples, annoncées par M. Herschell ; comme personne n'avoit, ou ne croyoit avoir d'instrument assez fort pour distinguer ces merveilles, il fallut y croire sur sa parole, & les Savans, comme l'on fait, ne sont point crédules : c'est-là, & ce doit être leur caractère distinctif, de celui de l'ignorant & de l'enthousiaste, qui croient tout sans examen, admettent tout sans preuve, & finissent toujours par rougir d'avoir été les jouets de l'erreur. M. Herschell annonçoit dans les Étoiles doubles une variété de couleur assez singulière, ce qui fit penser à plusieurs que cette apparence n'étoit produite que par une illusion optique, & que ces Étoiles paroissent doubles, de la même façon que Vénus avoit paru anciennement accompagnée d'un satellite. Il étoit donc bien important pour la gloire de M. Herschell, & pour l'intérêt de la vérité, de pouvoir vérifier ces nouvelles découvertes, & c'est ce que j'ai essayé de faire.

Il existoit à Paris, depuis deux ans environ, chez M. Sykes, un télescope de 5 pieds de foyer, supérieurement exécuté, parfaitement monté, tel, en un mot; qu'ont coutume de sortir des mains de M. Dollond, tous les ouvrages de cet illustre artiste: j'avois anciennement essayé ce télescope sur Jupiter & sur Saturne, avec un pouvoir amplifiant de 460 fois, & l'avois trouvé très-bon. Je fus averti au mois d'Août de cette année, que M. Dollond, encouragé par l'exemple & les essais de M. Herschell, venoit d'envoyer d'Angleterre, à M. Sykes, pour le télescope qui étoit à Paris, six nouveaux oculaires, dont le moindre devoit grossir sept cents cinquante fois, & le plus fort trois mille. Je fus infiniment curieux de connoître l'effet de ces nouveaux oculaires, de voir, sur-tout, comment de pareils grossissemens seroient supportés par un miroir fait sur les principes ordinaires, & sans intention d'y appliquer des oculaires d'une si grande force. M. Sykes eut l'honnêteté de me confier son instrument pour le soumettre aux différens essais que je jugerois à propos d'en faire (b).

J'essayai d'abord successivement ces oculaires sur Saturne, & comme je m'y attendois bien, Saturne, avec le grossissement de trois mille, ne me parut que comme une masse de lumière. Avec celui de deux mille, je commençai à distinguer un peu l'anneau d'avec le globe; avec celui de mille, j'obtins plus de distinction dans l'image; mais il faut l'avouer, si je n'eusse été prévenu, mon œil, peu satisfait de ces premiers essais, eût dès-lors mis au rebut tous ces oculaires, sur-tout après les avoir essayés sur Jupiter, dont aucun ne put me faire voir les bords terminés.

Je passai ensuite aux Étoiles, & me proposant de parcourir successivement toutes celles que M. Herschell annonce comme remarquables, dans son catalogue imprimé dans les *Transactions Philosophiques de 1782*, j'engageai M. Méchain, membre de cette Académie, à vouloir bien se

(b) Ce télescope a depuis été acquis pour l'Observatoire royal.

joindre à moi dans mes premières recherches ; le témoignage d'un si bon observateur ne devant laisser aucun doute au public & à moi-même, sur ce que nous allions observer & remarquer de particulier.

Dans un Mémoire imprimé dans le soixante-douzième volume des *Transactions Philosophiques pour l'année 1782*, M. Herschell, rendant compte de ses découvertes, a divisé en six classes les Étoiles qu'il a observées avec son excellent télescope, & qu'il a trouvées dignes d'être distinguées par leur rapprochement entr'elles, leur position respective, leur petitesse, leur couleur.

On connoissoit bien déjà dans le ciel quelques Étoiles que l'on avoit appelées *doubles*, c'est-à-dire, qui à la vue ou avec de foibles lunettes, n'offrant l'apparence que d'une seule Étoile, se trouvoient composées de deux Étoiles séparées, sitôt qu'on les observoit avec des lunettes un peu fortes : telles sont les étoiles ζ de la Lyre, γ du Bélier, α des Gémeaux, γ de la Vierge, α de l'Hydre, &c. M. Herschell a appelé pareillement *étoiles doubles, triples, & quadruples*, celles qui, observées avec son nouveau télescope, lui ont présenté un groupe de deux, trois & quatre Étoiles ; il en a même remarqué qu'il appelle *doubles-doubles, doubles-triples*, parce qu'elles offrent l'assemblage de deux groupes peu éloignés, composés chacun de deux ou trois étoiles.

Dans la première classe, M. Herschell a rassemblé les Étoiles les plus difficiles à voir, parce qu'elles sont infiniment proches l'une de l'autre, & ne paroissent séparées qu'en faisant usage de très-forts grossissemens ; il en compte 24 de cette espèce, savoir, 19 doubles & 5 triples (c). La seconde classe composée de 38, renferme les Étoiles un peu plus séparées entr'elles, comme d'environ 5". La troisième

(c) Depuis la lecture de ce Mémoire, M. Herschell, en 1785, a fait imprimer un nouveau catalogue d'Étoiles doubles, où la première classe se trouve portée à 97 Étoiles ; la seconde, à 102 ; la troisième, à 114 ; la quatrième, à 132 ; la cinquième à 137 ; & la sixième à 121.

classe comprend celles encore plus éloignées entr'elles, depuis 5 jusqu'à 15 secondes; elles sont au nombre de 46. La quatrième, composée de 44 étoiles, comprend celles qui sont distantes de 15 à 30". La cinquième, celles qui sont distantes depuis 30 secondes jusqu'à une minute; elles sont au nombre de 51. Enfin, la sixième classe renferme les étoiles distantes entr'elles, depuis une minute jusqu'à deux: M. Herschell en rapporte 66.

Ce fut dans les mois d'Août, Septembre & Octobre, que profitant d'une saison & d'un ciel favorables, je me livrai à la recherche & à la vérification de ces Étoiles. Pour mieux accoutumer mon œil à ces observations, & connoître mon télescope, je commençai par observer les Étoiles les moins difficiles à voir, telle que la Polaire, qui est de la quatrième classe, & que M. Herschell désigne ainsi, *double, extrêmement inégale, la plus grosse Étoile de couleur blanche, la petite de couleur rouge*. En effet, la Polaire nous offrit l'assemblage de deux Étoiles, dont l'une très-brillante & blanche, l'autre au-dessus sur la droite, distante de la première d'environ 20 secondes, infiniment petite, de couleur plutôt bleuâtre que rouge: nous employâmes divers grossissemens qui nous présentèrent la même apparence.

Je ne rapporterai point ici toutes les Étoiles que j'observai pendant le cours de deux mois où je passai en revue toutes les Étoiles du catalogue de M. Herschell, visibles alors. M. Méchain s'étant joint plusieurs fois à moi, nous observions alternativement la même Étoile, & portant chacun séparément notre jugement sur la grandeur, la couleur & la distance, nous composions, de nos opinions réunies, la description de chaque Étoile, que nous comparions ensuite à celle de M. Herschell. Or nous devons dire que nous avons toujours trouvé exactement les Étoiles annoncées par M. Herschell, telles qu'il les a décrites, à quelques différences près sur les couleurs, différences qui peuvent tenir à la constitution momentanée de l'air,
ou

ou à d'autres circonstances. Il est, nous l'avouons, quelques-unes de ces Étoiles qui ont certainement une couleur marquée & particulière, par exemple, plus ou moins rouge, quelquefois orangée, d'autres fois bleuâtre; mais ces couleurs ne nous ont paru remarquables & distinctes que dans les plus grosses des Étoiles doubles. Il nous a semblé que les couleurs de bleu-de ciel & de bleu-obscur, que M. Herschell attribue souvent aux plus petites Étoiles, n'étoient qu'une apparence dûe à leur petitesse: quant à nous, cette petitesse, la plupart du temps, ne nous a permis de leur distinguer aucune couleur.

La visite générale que ces observations me donnèrent lieu de faire dans tout le ciel, me fit découvrir une quantité considérable d'Étoiles doubles & triples que M. Herschell n'avoit point rapportées dans son catalogue. J'avois même commencé à en noter un certain nombre, mais voyant qu'il augmentoit à mesure que je parcourois de nouvelles constellations, & de plus ne doutant pas que M. Herschell occupé de cette recherche, n'eût, depuis deux ans que son catalogue étoit imprimé, reconnu & fait la description de ces mêmes Étoiles, je jugeai ce travail inutile, & crus même devoir respecter en cela l'espèce de propriété que M. Herschell sembloit avoir acquise sur ces recherches. J'avouerai en outre, que je ne regardai comme vraiment curieuses que les Étoiles renfermées dans les deux premières classes du catalogue, lesquelles, par leur extrême proximité, peuvent seules réellement mériter le titre d'*Étoiles doubles*, qui même n'est qu'un terme fort impropre: en effet, ces Étoiles doubles ne sont autre chose qu'un groupe de deux Étoiles fort proches l'une de l'autre, dont presque toujours l'une est fort brillante, l'autre infiniment petite. Les triples offrent un groupe de trois Étoiles, dont communément l'une est grosse, & les deux autres beaucoup plus petites; l'une est ordinairement très-proche de la plus grosse, & l'autre plus éloignée. Ces petites Étoiles sont, la plupart du temps, comme des points,

souvent d'une lumière assez obscure : mais cette petitesse n'est peut-être dûe qu'à leur seul éloignement ; la proximité réciproque , à leur seule direction par rapport à nous. Il peut donc y avoir des intervalles immenses entre ces deux , trois & quatre Étoiles que nous réunissons en une seule , sous la dénomination d'*Étoiles doubles , triples & quadruples* : or , vouloir étendre ces dénominations à des Étoiles séparées de plusieurs minutes , ce seroit , ce me semble , vouloir d'une constellation entière faire une seule Étoile. On peut donc se borner à distinguer celles dont la distance n'excède pas 5 à 6 secondes ; ces Étoiles sont véritablement difficiles à voir , demandent un œil exercé , un très-bon instrument , de forts grossissemens & des circonstances favorables : c'est en plein air qu'il est plus facile de les observer , cependant on peut le faire du dedans des appartemens , en ayant soin d'ouvrir les fenêtres avant de se mettre à la lunette , un temps assez considérable pour que l'air extérieur & l'air intérieur puissent se mettre en équilibre & devenir uniformes. En mettant l'œil à la lunette , on ne voit rien d'abord , ou plutôt on ne voit qu'une seule & principale Étoile ; mais petit-à-petit l'œil s'accoutume & parvient bientôt à distinguer la petite Étoile voisine , dont on rend la distance ou l'écartement de la grosse plus sensible , en augmentant successivement le grossissement des oculaires.

Il ne faut pas croire cependant qu'il soit nécessaire d'appliquer aux télescopes des oculaires de la plus grande force ; je n'en ai employé que deux d'un grossissement peu commun ; l'un grossissoit 460 fois , l'autre 1350 , & il n'est pas une seule des Étoiles doubles les plus difficiles à voir , que je n'aie aperçu avec le grossissement de 460. M. Herschell n'a eu même besoin que d'un pouvoir amplifiant de 227 pour les voir presque toutes ; il appliquoit ensuite un grossissement de 460 , pour rendre l'intervalle plus sensible & plus grand : d'où l'on conclura facilement que ce n'est pas , comme bien des personnes ont pu le penser ,

à des grossissemens extraordinaires que M. Herschell a dû la découverte de ces Étoiles singulières; car nous l'avons déjà dit plus haut, on avoit poussé jusqu'à 400 fois le grossissement des télescopes, il y en avoit plusieurs de cette force entre les mains de quelques observateurs, suffisans par conséquent pour apercevoir tout ce que M. Herschell a découvert, même la nouvelle Planète, dont le disque est assez sensible avec un grossissement de 250. Mais osons le dire, la découverte des lunettes achromatiques, est jusqu'à présent un service important que l'Optique a rendu plutôt aux Astronomes qu'à l'Astronomie: en effet, elle a procuré à ceux-ci plus de commodités, de facilité, d'agrément, pour ainsi dire, dans les observations; mais d'un autre côté elle les a peut-être un peu trop dégoûtés de l'usage pénible & plus difficile des gros télescopes & des longues lunettes, les seuls cependant à qui l'on doive les grandes découvertes qui ont été faites. Il ne sera pas impossible sans doute de pousser un jour beaucoup plus loin la perfection des lunettes achromatiques; mais en attendant, & dans l'état actuel des choses, il est toujours vrai de dire que le pouvoir de ces lunettes est très-limité, que non-seulement on n'a rien découvert avec elles, au-delà de ce que les lunettes simples ont fait connoître, mais même qu'elles ne font pas l'effet des lunettes de moyenne grandeur. Profitons donc, à l'exemple de M. Herschell, des forces & des moyens que nous prêtent les télescopes, & n'en négligeons plus tant l'usage.

Il n'est pas encore possible aujourd'hui de prononcer sur l'utilité & les conséquences que l'Astronomie peut tirer de la découverte de ces Étoiles doubles & triples, qui nous laissent même de grands doutes & de grandes difficultés à résoudre. En effet, que peuvent être ces petites Étoiles, foibles & obscures compagnes de plus grandes? en sont-elles voisines ou dépendantes? sont-elles d'un autre ordre, d'une autre nature? doit-on les comparer à des Satellites vis-à-vis de leur Planète principale? ou sont-

elles seulement des Étoiles d'une sphère infiniment plus reculée , que leur direction seule fait paroître proches d'autres Étoiles plus brillantes , parce qu'elles sont plus rapprochées de nous ? Enfin la position respective de ces Étoiles restera-t-elle toujours la même ? leur grandeur n'éprouvera-t-elle pas des variations ? parmi ces nombreuses Étoiles ne se trouvera-t-il pas encore quelque nouvelle Planète ? Voilà ce qui mérite d'être suivi long-temps, voilà ce qui sera intéressant à observer dans les siècles futurs, & rend cette découverte digne de notre curiosité. M. Herschell, uniquement occupé de cet objet de recherches, a acquis sans doute plus que personne, une pratique de ces sortes d'observations, & des connoissances qui doivent lui mériter la confiance des Savans, sur toutes les découvertes qu'il annonce. Néanmoins je n'ai pas cru inutile d'aller sur ses traces me livrer à une vérification qui m'a mis dans le cas de confirmer ces découvertes, & de rendre à leur auteur la justice & l'hommage qui lui sont dûs.

Je joins à ce Mémoire une Table des Étoiles les plus curieuses à observer (*voyez Transact. Phil. 1782, 1785*).

ÉTOILES doubles de la première Classe.

Aigle, précéd. γ π 24. ^c préc. 62. ^c Androm. préc. 56. ^c	Petit Cheval, préc. 1. ^c suiv. 2 S. γ Cigne..... δ 18. ^c suiv. 33 Cocher, précéd. μ S. 50. ^c préc. nébul. Coupe, N..... α Couronne, θ — δ Petit Chien, la cuisse	Linx, suiv.... 36 38 39 — 41 préc. 44 la poitrine Lion..... γ ω préc. 44 Lyre, suiv..... δ suiv. γ 18. ^c — β	G. ⁴ c Ourse, préc. 44 65 Persée, préc... 18 Sagittaire..... β Serpentaire.... 38 Serpent..... δ π 49 Taureau, préc... ζ préc. 8 Triangle..... ϵ Verseau. préc... λ préc. β 4 Vierge..... 81
Balance, N. 11. ^c Baleine, suiv. 54. ^c Bélier, précéd. 6. ^c préc. 39. ^c Baleine, suiv. 54. ^c Bouvier..... δ 31. ^c 39. ^c 51. ^c	Dragon, préc... β h ϵ 16 N. 31 39 48 La Flèche, suiv. β Hercule..... ζ suiv. ϕ 46 N. 105	Ophiucus..... λ τ 69 73 Orion..... π préc. τ pr. 10 25 préc. 26 30 32 52 Grande Ourse... ζ	Double-doubles. Balance..... ζ Persée..... 37 Triple-double-double. Lyre..... δ

ÉTOILES triples de la première & de la seconde Classe.

Aigle..... 37. ^c Balance..... 51 Bélier..... π Cancer..... ζ Cassiopee..... 55 Coupe. N..... 4 Cigne, suiv.... π préc. 64 Couronne..... ϵ Flèche, S..... 15	Licorne..... 11 Linx..... 12 Lion..... 90 Lyre, pr..... ρ Orion, suiv... 47 Verseau, suiv.. 13 72 Double-triples. Aigle..... 33. ^c	Cassiopee..... d Orion..... ϵ 44 Quadruples. Cigne, préc.. 25. ^c préc. 77 Lyre..... β Lézard..... 8 Monoceros, préc. 25	Orion..... λ θ Quintuple. Gémeaux, préc. H Multipliées. Cocher..... 15. ^c S. 58 Gémeaux..... β
--	--	---	---

Nota. Les Étoiles de cette Table sont désignées par les lettres de Bayer ou les numéros du catalogue de Flamsteed; suiv. signifie suivante; préc. précédente; N. au Nord; S. au Sud; pr. proche; θ — δ , entre θ & δ .



M É M O I R E
SUR UN NOUVEAU GENRE DE PLANTE
Nommé Brucea ,
E T
SUR LE FAUX BRESILLET D'AMÉRIQUE.

Par M. le Chevalier DE LA MARCK.

21 Janvier
1784.

ON donne le nom de *Brucea*, en Angleterre, à un arbrisseau qui y a été apporté de l'Abyssinie, par M. le Chevalier Bruce, que l'on cultive depuis quelques années au Jardin du Roi, où il fleurit tous les ans, & dont nous croyons qu'aucun Botaniste n'a encore donné la description. Nous le nommerons

Brucé anti-dysentérique ; Brucea anti-dysenterica ; Brucea floribus tetrandris , racemis simplicibus.

Cet arbrisseau, dont la figure approche de celle d'un petit noyer, s'élève à la hauteur de 5 ou 6 pieds en Europe, & peut-être une fois davantage dans son pays natal. Sa tige est droite, recouverte d'une écorce gristâtre, un peu ridée, & se divise, dans la partie supérieure, en quelques rameaux lâches, redressés, & feuillés à leur sommet : ces rameaux ont leur superficie raboteuse, couverte de tubercules épars, qui proviennent des cicatrices un peu saillantes qu'ont laissé les anciennes feuilles après leur chute, & sont garnis, sur-tout vers leur extrémité, d'un duvet court & roussâtre. Les feuilles sont grandes, rapprochées les unes des autres, & éparées autour des sommités des rameaux, où elles forment de belles rosettes étalées & terminales, qui donnent à cet arbrisseau un aspect assez agréable. Chaque feuille est longue d'un pied ou même davantage, ailée avec impaire, &

composée de onze ou treize folioles ovales-lancéolées, pointues, entières, molles, d'un vert-jaunâtre, & glabres, excepté en leurs bords & sur leurs nervures qui sont chargés, de même que les pétioles, de poils courts & roussâtres; ces folioles sont soutenues chacune par un pétiole court, ont environ trois pouces de longueur sur une largeur d'un pouce ou un peu plus, & sont opposées par paires, à l'exception de celles qui sont terminales.

Les fleurs de cet arbrisseau sont d'un seul sexe sur chaque pied, ou *dioïques*, selon l'expression de M. Linné. L'individu mâle de l'espèce dont nous traitons, est peut-être le seul que l'on possède en Europe; il porte des fleurs fort petites, verdâtres, rougeâtres avant leur développement, & ramassées par petits paquets séparés & presque sessiles, sur de longs péduncules communs, grêles & velus: ces péduncules forment des grappes simples, linéaires, axillaires, solitaires dans chaque aisselle, un peu moins longues que les feuilles, & qui ressemblent en quelque sorte à des chatons longs & très-menus. Les paquets de fleurs sont à des distances inégales entr'elles, & vont toujours en se rapprochant d'autant plus les uns des autres, qu'ils sont plus près du sommet des grappes.

Chacune des fleurs dont il s'agit, consiste, 1.^o en un calice velu en dehors, & profondément divisé en quatre découpures ovales-pointues, ouvertes & comme glanduleuses à leur sommet; 2.^o en quatre pétales ovales-pointus, velus ou ciliés, alternes avec les divisions du calice, auxquelles ils ressemblent beaucoup, & ouverts en étoiles; 3.^o en quatre étamines, une fois moins longues que les pétales, opposées aux divisions du calice, & dont les filamens insérés dans les échancrures ou sinuosités du disque qui occupe le centre de la fleur, portent chacun une anthère arrondie, rouge avant de s'ouvrir, blanchâtre dès qu'elle a répandu sa poussière, & divisée en deux loges; 4.^o en un disque plane, charnu, ayant quatre échancrures latérales, qui lui donnent la forme d'une croix.

de Malte, & occupant le centre de la fleur, à la place du pistil qui ne s'y rencontre pas.

Voilà tout ce que nous savons de positif sur la fructification de cet arbrisseau; il commence à fleurir tous les ans dès l'entrée du printemps, & développe les fleurs avec une lenteur si considérable, que dans l'été il s'en épanouit encore; mais il en tire peu d'éclat, à cause de leur petitesse & de leur peu d'apparence; son bois est blanc, & ses rameaux contiennent une moelle assez abondante. On donne à cet arbrisseau le nom de *Brucé anti-dysentérique*, parce qu'on prétend que les habitans du pays où il croît, se servent de ses feuilles pour se guérir de la dysenterie.

M. Smeathman, Anglois, distingué par ses connoissances en Histoire Naturelle, & qui a voyagé en Afrique. a rapporté, de *Siera-Leona*, des morceaux secs d'un autre arbrisseau qui paroît être du même genre que celui dont nous venons de traiter, & auquel, par cette raison, on a donné, en Angleterre, le nom de *Brucea paniculata*, ou *Brucé à panicules*. Il diffère principalement de celui qui précède, en ce que ses grappes de fleurs sont rameuses & paniculées. Ses fleurs, que nous n'avons vues que sur des morceaux secs en très-mauvais état, nous ont paru toutes mâles seulement, & à étamines un peu plus longues que les pétales.

Il suit de ce que nous venons d'exposer sur le genre du *Brucea*, que la privation où nous sommes des individus femelles des espèces de ce genre, nous laissant ignorer & la forme des fleurs femelles, & la nature des fruits qu'elles produisent, nous n'avons pu établir qu'un caractère générique incomplet. Mais on trouve en Amérique, des arbrisseaux qui nous paroissent avoir de si grands rapports avec les *Brucea* d'Afrique, que nous présumons qu'ils sont de la même famille, & d'un genre qui en est très-voisin par ses rapports. Or, comme ces arbrisseaux ne sont pas encore bien connus des Botanistes, nous
allons

allons exposer en peu de mots ce que nos observations & nos recherches nous ont appris à leur sujet.

Des Bréfillots, ou faux Bréfillots d'Amérique.

Le P. Plumier, dans la portion de ses Découvertes botaniques qui n'a point encore vu le jour, fait mention, sous le nom de *Pseudo-Brasilium*, de deux arbrisseaux des Antilles, qui lui paroissent avoir tant de rapports entr'eux, qu'il les réunit dans sa description, regardant l'un comme une simple variété de l'autre. Nous allons néanmoins les distinguer & en traiter séparément, en connoissant un que l'on cultive au Jardin du Roi, où nous l'avons vu fleurir, & qui nous paroît différent de l'autre.

Le premier est le *Bréfillot velu*; *pseudo-brasilium hirsutum*, Plum. mss. C'est aussi vraisemblablement le *tariri guianensis*, Aubl. guian. suppl. pag. 37, tab. 390; & le *tariri arbor tinctoria*, *foliis alternis, obscure violaceis*, Barr. Franc. Equin. 106.

C'est un arbrisseau qui s'élève à la hauteur de huit à dix pieds sur une tige droite, de près de 2 pouces de diamètre, recouverte d'une écorce finement gercée & d'un brun-grisâtre. Cette tige se divise, à son sommet, en plusieurs rameaux alternes, couronnés chacun de grandes feuilles éparées & rapprochées en rosettes terminales; son bois est d'un rouge-brun, ou au moins prend cette couleur quelque temps après qu'il a été exposé à l'air. Ses feuilles sont longues presque d'un pied & demi, ailées avec impaire, & composées de quinze à dix-neuf folioles ovales-pointues, entières ou légèrement anguleuses, lisses, vertes & luisantes en dessus, velues dans leur contour, d'un vert-pâle en dessous, tantôt opposées par paires, & tantôt disposées alternativement, & soutenues par un petiole commun, pubescent & rougeâtre. Ces folioles ont trois à quatre pouces de longueur, & sont portées chacune sur un petiole propre fort court; elles prennent une couleur pourpre-noirâtre en se desséchant.

Les fleurs sont très-petites, d'un rouge-obscur, d'un

Mém. 1784.

Xx

seul sexe sur chaque individu, & viennent sur des grappes rameuses & terminales. Celles qui sont mâles ne nous sont pas connues : les fleurs femelles consistent en un calice velu en dehors, persistant, & profondément divisé en cinq découpures pointues; en cinq pétales lancéolés & un peu plus longs que le calice; & en un ovaire supérieur, ovale, glabre, dépourvu de style, & surmonté d'un stigmate sessile, à deux lobes planes, ouverts & pubescens.

A ces fleurs succèdent des fruits mous, pulpeux, de la forme de nos olives, mais un peu plus petits, d'un rouge de corail dans leur maturité, légèrement acides, & qui contiennent chacun un noyau osseux, de même forme & uniloculaire.

On trouve cet arbrisseau à Saint-Domingue, à la Jamaïque & dans la Guiane. Lorsqu'on entame ses rameaux, ou son tronc, dit le P. Plumier, il en sort un suc qui noircit, & qui, par sa causticité, forme une tache presque ineffaçable s'il tombe sur quelque partie du corps; son bois teint comme le brésillet, mais d'une couleur qui est plus brune que rouge. Aublet dit, que ses feuilles écrasées toutes vertes, & pressées dans un morceau de coton, lui communiquent d'abord une teinture verte, qui peu après devient de couleur violette.

Le second, est le brésillot glabre; *pseudo-brasilium glabrum*. Plum. mss.

A la vérité, ce brésillot a de très-grands rapports avec le précédent; mais il paroît qu'il en diffère, 1.^o en ce qu'il est plus petit, ne s'élevant qu'à la hauteur de 5 à 6 pieds seulement; 2.^o que son bois est d'un blanc-pâle & moins propre à teindre; 3.^o que ses feuilles sont tout-à-fait glabres, moins grandes, & n'ont que onze à treize folioles, dont les supérieures sont plus longues & lancéolées.

Cet arbrisseau croît naturellement à Saint-Domingue; on en cultive un individu femelle au Jardin du Roi, qui y fleurit vers le commencement de Novembre; ses grappes de fleurs sont rameuses, terminales & longues de quatre ou

cinq pouces; les péduncules, communs & particuliers sont un peu pubescens: les fleurs, dans tout le reste, ne paroissent pas différer de celles du brésillot velu.

Quoique d'une part nous ne connoissions pas les fleurs femelles & les fruits des *Brucea*, & que de l'autre nous ignorions les caractères des fleurs mâles des *pseudo-brasilium*, ces divers arbrisseaux nous paroissent néanmoins devoir être tous rapportés à la même famille que le comoclade, les sumacs, le mollé, l'anacarde, &c. genres de plante avec lesquels ils ont des rapports très-marqués.

Observation. On trouve en Amérique, un arbrisseau encore peu connu, nommé par le P. Plumier, *dodonæa aquifolii folio tricuspidato* (Burm. amer. t. 118, f. 1), & qui semble avoir aussi quelques rapports avec le *Brucea*. Néanmoins cet arbrisseau se rapproche encore plus du *comocladia* de Linné, dont il est sans doute une espèce; car ses fleurs ont de même un calice à trois divisions, trois pétales, trois étamines, & un ovaire supérieur qui se change en une baie oblongue, contenant un noyau bifide ou à deux lobes. Nous croyons qu'on peut le nommer

Comocladia (tricuspidata) foliis pinnatis; foliolis ovatis tricuspidatis, racemis subsimplicibus.

R E C H E R C H E S S U R L E C A L C U L I N T É G R A L

Par M. C H A R L E S.

SOIT entre les trois variables x, y, z , l'équation en différences partielles $Mp + Nq + L = 0$; ($dz = pdx + qdy$); je dis que quand la proposée sera homogène entre x, y & z , son intégrale générale dépendra de l'intégration de deux équations ordinaires, chacune entre deux variables.

D É M O N S T R A T I O N.

Multipliant la proposée par dx , l'équation hypothétique par M , & ajoutant, on a

$$Mdz + Ldx = q(Mdy - Ndx);$$

multipliant cette dernière équation par A , & ajoutant de part & d'autre la même quantité $q(Mdz + Ldx)$, on a

$$(Mdz + Ldx)(q + A) = q[Mdz + Ldx + A(Mdy - Ndx)].$$

Je rappelle d'abord que toutes les fois que les équations $Mdz + Ldx = 0$, & $Mdy - Ndx = 0$, pourront s'intégrer, séparées ou combinées ensemble, l'équation en différences partielles sera intégrée, comme l'a observé M. de la Grange, dans les *Mémoires de Berlin*, pour l'année 1779; car dans ce cas, on pourra trouver le facteur A qui rend le coefficient de q multiple R , d'une différentielle exacte; & alors soit $d\nu$, cette différentielle exacte, on aura $(Mdz + Ldx)(q + A) = qRd\nu$. Puisqu'on a $\nu = F(x, y, z)$; (F indiquant une fonction

connue), on a $y = \varphi(x, v, z)$; (φ indiquant une fonction renversée). Substituant cette valeur de y dans M , L , &c. on a $M' dz + L' dx = \frac{\varphi' R'}{\varphi' + A'} dv$, & z est maintenant une fonction cherchée de x & de v . Ainsi, si on fait v constant, dz deviendra une différence partielle relativement à x , & on aura $M' dz + L' dx = 0$, (δ étant le signe de la différence partielle); il n'y a donc qu'à intégrer, en faisant v constant, & prendre, pour arbitraire, une fonction de v , c'est-à-dire, de $F(x, y, z)$.

La question se réduit donc à intégrer l'équation

$$M dz + A M dy + (L - A N) dx = 0,$$

quel que soit M , N & L .

Supposons les homogènes, pour revenir au théorème que je dois démontrer. Soit A une fonction de dimension nulle des trois variables x, y, z , & faisons $x = rz$ & $y = sz$; nous aurons

$$-\frac{dz}{z} = \frac{ams + (l - an) dr}{m + lr + a(ms - nr)},$$

équation dont le second membre doit être une différentielle complète: a est la transformée de A , & les petites lettres l, m, n sont les transformées des majuscules L, M, N divisées par une puissance de z , dont l'exposant indique la dimension de ces majuscules. Maintenant, soit

$$m + lr + a(ms - nr) = \frac{1}{z} \quad \& \quad \frac{m - (m + lr) m \downarrow}{ms - nr} = 0;$$

nous aurons

$$-\frac{dz}{z} = \theta ds + (e - \theta f) dr,$$

e & f sont des fonctions connues de r & s , θ une fonction des mêmes variables qu'il faut déterminer pour que la fonction $\theta ds + (e - \theta f) dr$ soit une différentielle complète: donc,

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} + f \frac{\partial \theta}{\partial s} + \theta f' - e' = 0:$$

δ & ∂ indiquent des différences partielles; f' & e' sont les coefficients de ds dans la différenciation de f & e : donc

$$d\theta + (\theta f' - e') dr = \frac{\partial \theta}{\partial s} (ds - f dr).$$

Il faut donc intégrer complètement l'équation

$$ds - f dr = 0,$$

entre les deux variables r & s , pour avoir l'équation $s = F(r, v)$, v étant l'arbitraire; substituer pour s cette valeur dans l'équation $d\theta + (\theta f' - e') dr = 0$, & satisfaire à cette dernière en faisant v constant.

Difons un mot des équations à un plus grand nombre de variables.

Soit entre les quatre variables x, y, v & z , l'équation linéaire en différences partielles

$$Mp + Nq + Or + L = 0 \quad (dz = p dx + q dy + r dv).$$

Chassant p , on aura

$$Mdz + Ldx = q(Mdy - Ndx) + r(Mdv - Odx);$$

multipliant tout par A , ensuite ajoutant & retranchant différentes quantités, on aura

$$(Mdz + Ldx)(A + r) = (Aq - rB)(Mdy - Ndx) + r[Mdz + AMdv + BMdy + (L - AO - BN)dx].$$

Supposons qu'on puisse rendre la fonction à quatre variables, coefficient de r multiple S d'une différentielle exacte, par le moyen des coefficients, jusqu'à présent indéterminés A & B , & soit $d v'$, cette différentielle; on aura $v' = F(x, y, v, z)$, & par conséquent $v = \eta(x, y, v', z)$. Substituant cette valeur de v dans la proposée, on aura

$$\begin{aligned} & (M' dz + L' dx)(A' + r') \\ &= (A' q' - r' B')(M' dy - N' dx) + r' S' dv'. \end{aligned}$$

Donc, si on fait v' constant, on aura

$$M'dz + L'dx = \frac{A'v' - r'B'}{A' + r'} (M'dy - N'dx),$$

équation linéaire ou qui du moins peut se traiter comme telle.

Supposons maintenant que les coefficients M, N, O, L sont homogènes entre les quatre variables x, y, v, z ; regardons A & B comme des fonctions de dimension nulle de ces variables, & faisons $x = x'z$; $y = y'z$; $v = v'z$; l'équation

$$Mdz + AMdv + BMdy + (L - AO - BN)dx = 0,$$

qui doit être possible, deviendra

$$M'dz + A'M'(v'dz + zdv') + B'M'(y'dz + zdy') + \&c.$$

A' & B' représentent les transformées de A & B , & M' , N' , &c. les transformées des lettres non accentuées correspondantes, divisées par une puissance de z , dont l'exposant indique la dimension des lettres M, N , &c.; donc

$$-\frac{dz}{z} = \frac{A'M'dv' + B'M'dy' + (L' - A'O' - B'N')dx'}{M' + A'M'v' + B'M'y' + (L' - A'O' - B'N')x'},$$

équation, dans le second membre de laquelle z est évanoui. Maintenant si on fait différentes transformations indiquées par la nature de la question, pour rendre la recherche des indéterminées, plus facile, on trouvera facilement qu'on peut faire

$$-\frac{dz}{z} = \theta dv' + \lambda dy' + (A + B\theta + P\lambda)dx';$$

A, B, P étant des fonctions connues de v', y' , & x' ; θ & λ des fonctions inconnues des mêmes variables, qu'il faut déterminer, pour que le second membre de l'équation soit une différentielle exacte, d'où on peut conclure ce théorème.

Pour réduire une équation linéaire homogène en différences partielles du premier ordre, entre un nombre

quelconque de variables, à une équation aussi linéaire & du premier ordre, où le nombre des variables seroit moindre d'une unité, il faut rendre différentielle exacte la fonction

$$\theta dx + \lambda dy + x dv + \&c. \\ + (A + B\theta + D\lambda + Ex + \&c.) ds,$$

le nombre des variables $x, y, v, \dots s$ étant moindre d'une unité que dans la proposée; $A, B, D, E, \&c.$ étant des fonctions données de ces variables; $\theta, \lambda, x, \&c.$ des fonctions inconnues.

M É M O I R E

SUR LA DISPARITION DE L'ÉTOILE

De la constellation du Taureau, que Flamstéed a placée dans son Catalogue, pour 1690, à 51^d 46' 50" de longitude, avec une latitude de 0^d 5' $\frac{1}{3}$ méridionale.

Par M. LE MONNIER.

IL y a huit jours que l'Académie a été informée par une lettre écrite de Limoges, au Président de l'Académie, qu'on ne voyoit plus l'étoile du Taureau, de la fixième grandeur, qui est la huitième de cette même constellation. De plus, l'auteur de cette remarque importante, M. Montaigne, ajoute qu'il a fait cette recherche, soupçonnant, & peut-être avec plus de fondement * que ne doit être une simple conjecture, que cette même étoile pourroit bien être la nouvelle Planète découverte par Herschell, à Bath, le 13 Mars 1781, vers le commencement du signe de l'Écrevisse, ou fin du signe du Taureau.

La
le 15 Déc.
1784.

Cette étoile du catalogue de Flamstéed, ne se trouve point dans la première édition publiée en 1712, du catalogue Britannique : on ne la retrouve pas non plus dans le zodiaque de Senex; mais j'ai eu soin de la faire insérer dans le zodiaque de Dheulland.

J'ai fait part les jours suivans, à M. le Duc de la Rochefoucault & à Limoges, des deux observations que Flamstéed en avoit faites, & que j'ai retrouvées dans l'année 1704, le 29 Septembre & le 1.^{er} Octobre suivant. J'en ai fait un nouveau calcul, ayant égard à l'aberration

* M. Montaigne supposoit pour lors qu'elle avoit été observée à Gréenwich, avant 1690.

& à la nutation de * des Pléiades, dont l'ascension droite apparente a dû être, selon mon catalogue, de $52^{\text{d}} 29' 45''$; d'où ôtant $2^{\text{d}} 56' 6''$, ayant égard à $4''\frac{1}{2}$ de temps, pour l'erreur du plan de l'arc mural, la longitude sera $8 21^{\text{d}} 57' 51''$, avec une latitude australe de $5' 6''\frac{1}{2}$; dans le calcul, j'ai supposé l'obliquité apparente de l'écliptique, $23^{\text{d}} 29'$, & la déclinaison boréale de l'étoile, $18^{\text{d}} 12' 40''$.

En 1757 & 1758, lorsque je travaillois au catalogue des étoiles zodiacales, je n'ai point aperçu cette étoile, mais seulement la double qui suit, & quelques autres qui sont plus au nord, & presque au même degré d'ascension droite.

Opposition de Jupiter au Soleil, observée le 27 Août 1784

A $11^{\text{h}} 51' 49''$, la planète de Jupiter a passé au méridien après la $1.^{\text{re}}$ σ du Verseau $55''\frac{1}{2}$ de temps, à la pendule, & à distance du Zénit de $60^{\text{d}} 36' 50''$.

Donc longitude apparente observée $\chi 2^{\text{d}} 34' 30''$, avec une latitude australe de $1^{\text{d}} 20' 42''$.

Les Tables de Halley, au même instant, indiquent $55''\frac{1}{2}$ de plus, c'est-à-dire la longitude $\chi 2^{\text{d}} 35' 25$ à $26''$.

Quant à l'opposition de Saturne au Soleil, on la déduira de l'observation suivante : le 13 Juillet, à $11^{\text{h}} 53' 2''$ de temps vrai, à distance apparente du Zénit de $70^{\text{d}} 40' 10''$, Saturne a précédé ϵ du Sagittaire de $0^{\text{h}} 5' 10''$, & avoit suivi e du voile de $55''$ de temps; ce qui donne son ascension droite apparente $292^{\text{d}} 10' 30''$, & sa déclinaison méridionale $21^{\text{d}} 50' 45''$, sa longitude $\chi 20^{\text{d}} 30' 27''\frac{1}{2}$, avec une latitude boréale de $3' 31''\frac{1}{2}$. Les Tables de Halley donnent la longitude de Saturne $6' 53''$ moins avancée. au lieu que l'année précédente, le $1.^{\text{er}}$ Juillet, à $11^{\text{h}} 56' 32''$, elles donnoient la longitude de Saturne $8'$ moins avancée.



OBSERVATION

SUR UNE ILLUSION D'OPTIQUE.

Par M. DE FOURCROY.

LE cahier de Septembre dernier, du Journal de physique, en rapportant les effets singuliers d'un treillis sur la vue de M. de Godart, *page 219*, m'a rappelé une petite observation que j'avois écrite en 1776, sur l'ombre d'un treillis, & dont j'avois oublié depuis lors de rendre compte à l'Académie.

Là
le 13 Déc.
1784.

Le 23 Octobre, à Perpignan, vers neuf heures du matin, me trouvant assis, par un beau soleil, dans un petit cabinet vis-à-vis un mur blanc, je remarquai que le treillis de fer d'une fenêtre à laquelle je tournois le dos, étoit légèrement projeté par le soleil sur ce mur; mais avec la singularité, que les raies claires de ce tableau (*figure 2*), me parurent être la projection des fils de fer du treillis (*fig. 1*), & que les losanges moins claires (*figure 2*), me sembloient être la projection de l'ouverture des mailles.

Les figures ci-jointes sont de grandeur naturelle; elles furent crayonnées, tant sur le grillage même, que sur son ombre qui se projetait à 68 pouces du treillis *.

J'avois pensé quelquefois à ce tableau, lorsque le 13 Novembre, revoyant la même image au même lieu, je la reçus sur un carton très-blanc, appliqué contre le mur; puis en rapprochant ce carton de la fenêtre le long d'une règle, j'observai qu'à mesure de sa marche vers le treillis,

* Le fil avoit $\frac{7}{12}$ ligne de diamètre; chaque nœud étoit de $1\frac{1}{4}$ ligne de hauteur, & $1\frac{1}{4}$ ligne de largeur.

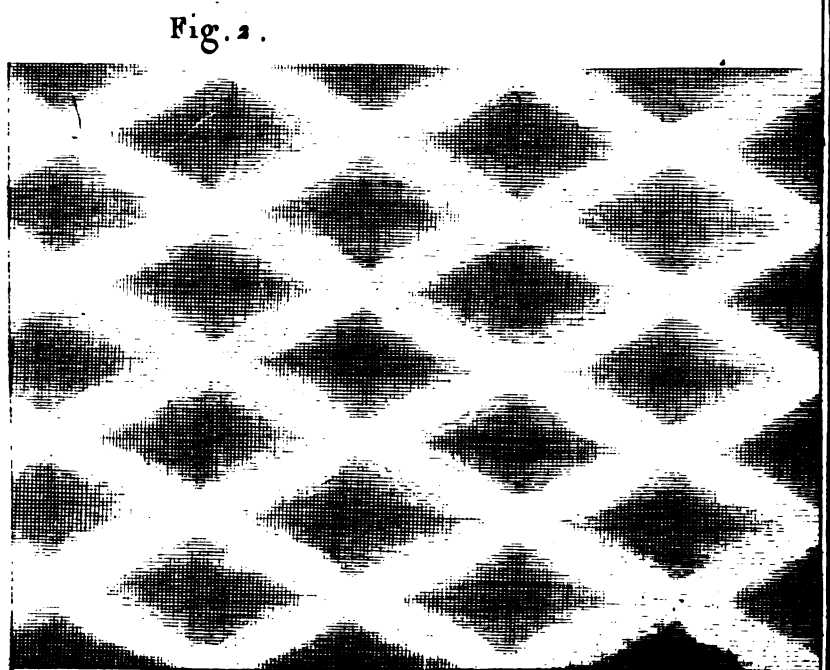
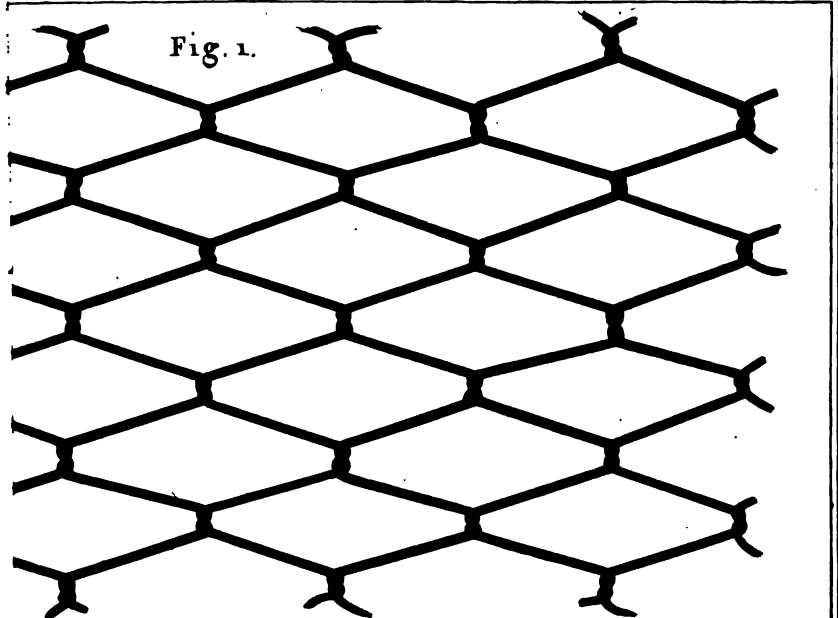
l'intensité des taches obscures se renforçoit dans leur milieu; les raies claires qui les séparoit, augmentoient fort de largeur. Je fis aller & venir lentement mon carton; ce mouvement me démontra le contraire du premier jugement que j'avois porté sur ce tableau: je reconnus parfaitement que ces raies claires & continues étoient la projection du vide des mailles, & que les losanges obscures ou moins claires, étoient celles des nœuds du treillis.

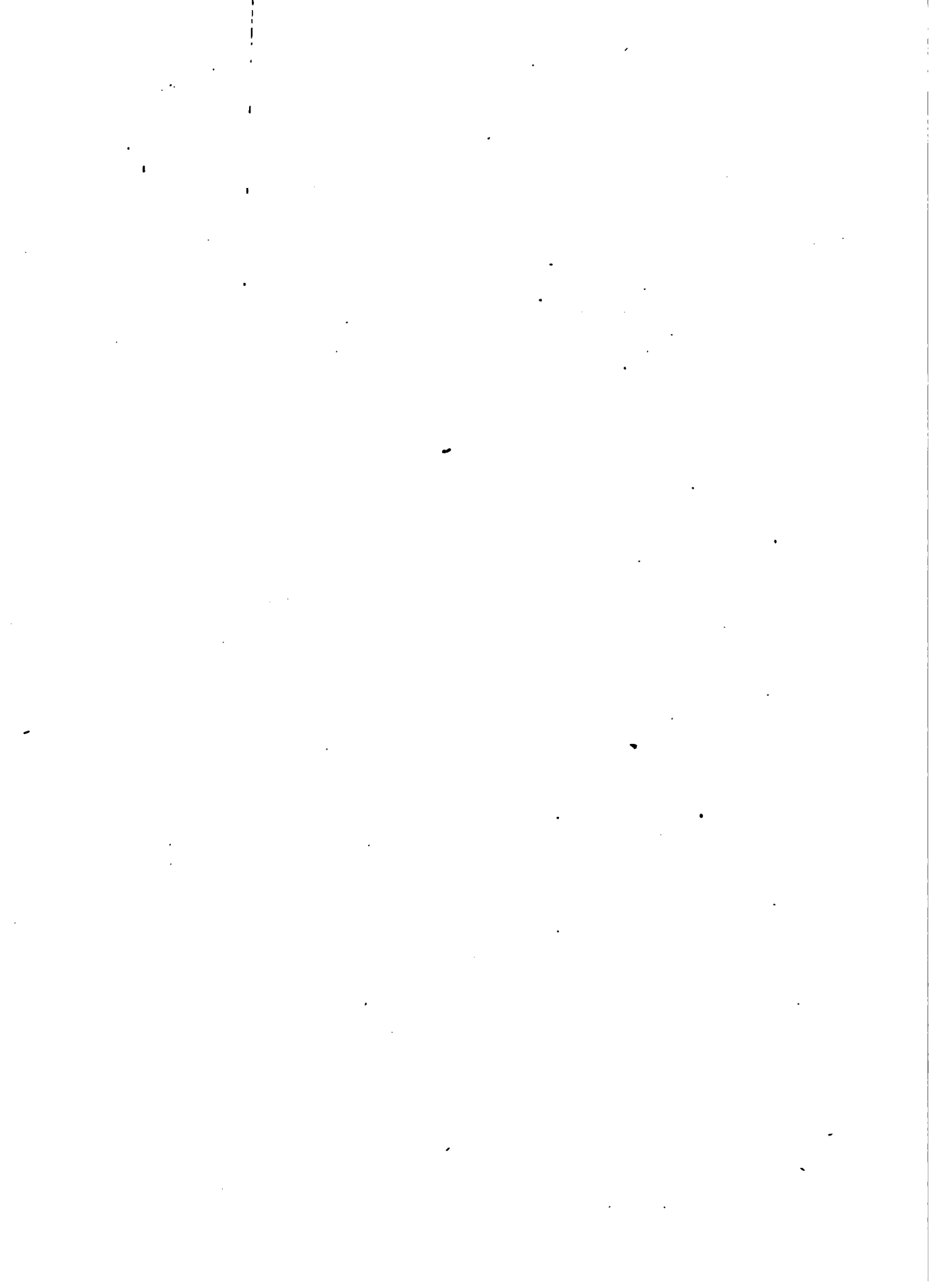
La preuve en fut complète, lorsqu'à mesure du cheminement du carton plus près de la fenêtre, je vis toutes les losanges, qui se rétrécissoient, prendre enfin la vraie forme des nœuds du treillis, tandis que les raies claires, qui s'élargissoient, laissoient insensiblement paroître l'ombre des fils de fer, & acquéroient la vraie forme des mailles.

On trouve tous ces faits très-bien expliqués par M. de Maraldi, dans les Mémoires de l'Académie, *année 1723, page 111.*

Le 11 Décembre suivant, je considérois encore ce tableau sur le mur, lorsqu'un nuage léger vint à passer devant le Soleil; dans ce moment, la projection sur le mur fut entièrement semblable au treillis, toutes les mailles, les fils de fer & les nœuds parfaitement dessinés & tranchés. Dès que le nuage fut totalement passé, la première image reparut: j'avois vu sur le mur, à la fin du passage de ce nuage, les ombres des nœuds croître par degrés fort sensibles, jusqu'à ce que le Soleil eût repris tout son éclat, précisément comme sur mon carton ci-dessus, lorsque je l'avois éloigné du treillis.

Ce dernier fait est celui qui mérite quelque attention; il paroît contraire à la doctrine des ombres & pénombres, ou de la diffraction, & ne pouvoir être expliqué que par celle des réfractions. Il semble nécessaire de prêter à ce nuage la même propriété qu'à nos verres convexes, de





transmettre contre le treillis l'image du disque du Soleil, beaucoup plus petite qu'elle ne l'est naturellement, puisque les fils de fer portèrent leur ombre pleine & terminée, jusqu'à environ quatorze cents fois leur diamètre, au lieu de ne la porter qu'à quarante-deux fois ce diamètre. En l'expliquant ainsi, il seroit propre à confirmer les soupçons déjà fondés sur d'autres faits, que les nuages transmettent quelquefois à la terre des coups de Soleil beaucoup plus chauds que ceux qui nous en viennent par la simple traversée de l'atmosphère.

M É M O I R E

C O N T E N A N T

LES OBSERVATIONS ET LA THÉORIE
DE LA PREMIÈRE COMÈTE DE 1784.

Par. M. MÉCHAIN.

CETTE Comète fut aperçue à Paris, le 24 Janvier, au soir, par M. le Comte de Cassini; il eut la complaisance de m'en donner avis sur le champ, & nous en fîmes de concert la première observation. La Comète, quoique près de l'horizon, paroissoit à la vue simple avec une queue de 2 à 3 degrés; le noyau étoit assez bien terminé & très-lumineux, son diamètre apparent étoit de 33". L'observation que je vais rapporter, & les suivantes, ont été faites avec une lunette achromatique, de trois pieds & demi de foyer, garnie d'un bon micromètre à fils. A 7^h 35' 53", temps moyen, la Comète précédoit l'étoile π de la Baleine, au cercle horaire, de 44^d 57' 34". & elle étoit plus australe de 20' 10", réduction faite du parallèle apparent au vrai; d'où j'ai conclu l'ascension droite de 353^d 30' 25", la déclinaison australe 14^d 26' 40". En comparant de même le passage de la Comète avec ceux des étoiles, n.^{os} 18 & 47 de la Baleine, du catalogue de Flamsteed, j'ai trouvé les mêmes résultats à peu de secondes près, corrigeant d'ailleurs la position de ces étoiles, relativement à celle de π que j'ai tirée du catalogue de Bradley. On ne put cette première fois avoir aucune idée de la vitesse & de la direction du mouvement de la Comète, parce que le long intervalle de temps qui s'écoula entre son passage & celui de quelque étoile bien connue, ne permit point d'en faire une seconde observation.

Depuis le 24 Janvier jusqu'au 3 Février, le ciel fut presque toujours couvert; la Lune augmentoit de jour en jour, j'épiois les instans où les nuages s'entr'ouvroient, pour rechercher la Comète; mais c'étoit toujours sans succès. Enfin, le 3 Février, le ciel étant assez pur, je la retrouvai au-dessous du ventre du Poisson austral: la grande clarté de la Lune empêchoit de la distinguer à la vue simple, & elle en éteignoit totalement la queue. Par un milieu entre plusieurs observations, je trouvais qu'à $7^h\ 38' 47''$, temps moyen, la Comète étoit à l'orient de λ des Poissons de $1^d\ 46' 40''$, & plus boréale de $3' 137''$; ce qui donne l'ascension droite de $354^d\ 32' 12''$, la déclinaison boréale $0^d\ 39' 12''$.

Le 4 Février, à $6^h\ 33' 48''$, temps moyen, la Comète étoit à l'orient de la dix-neuvième des Poissons, de $41' 48''$, & moins boréale de $37' 2''$; ce qui donne $354^d\ 32' 18''$, pour l'ascension droite, & $1^d\ 40' 16''$ pour la déclinaison boréale. A $6^h\ 56' 55''$, la Comète précédoit α du lien des Poissons, de $33^d\ 11' 11''$, & elle étoit moins boréale de $1' 16'' \frac{1}{2}$; donc ascension droite $354^d\ 32' 12''$, déclinaison boréale $1^d\ 41' 32''$.

Le 10, j'ai trouvé la Comète très-près d'une étoile de sept à huitième grandeur, & d'une autre de huit à neuvième. La Lune n'étant pas alors sur l'horizon, je distinguois bien la Comète, à la vue simple; j'ai estimé la longueur de sa queue vue par la lunette de nuit, de deux degrés; le noyau étoit très-brillant, mais entouré d'une légère nébulosité. A $6^h\ 41' 33''$, temps moyen, différence d'ascension avec l'étoile 2^c des Poissons — $3^d\ 28' 4''$, & en déclinaison — $15' 49''$; d'où j'ai conclu l'ascension droite de la Comète $354^d\ 24' 3''$, la déclinaison, $7^d\ 1' 22''$.

Le 13, sur les 7 heures $\frac{1}{4}$ du soir, on a commencé à voir quelques étoiles au zénit, ensuite les nuages se sont dissipés assez promptement. J'ai aperçu la Comète entre la soixante-dix-septième & la quatre-vingt-deuxième

de Pégase; on la voyoit difficilement sans lunette, parce qu'elle étoit près de l'horizon; sa queue avoit encore plus d'un degré, son noyau étoit brillant & entouré de nébulosité. A $7^h 55' 7''$, elle étoit à l'orient de la soixante-dix-septième de Pégase, de $1^d 9' 56''\frac{1}{2}$, & $3' 30''$ plus boréale; j'en ai déduit l'ascension droite de $354^d 15' 55''$, la déclinaison $9^d 11' 27''$. A $7^h 59' 51''$, temps moyen, elle précédoit la quatre-vingt-deuxième étoile de Pégase, de $1^d 8'$, & elle étoit moins boréale de $33' 29''$; ces différences sont corrigées de l'effet de la réfraction: l'ascension droite de la Comète étoit donc à ce dernier instant de $354^d 15' 46''$, sa déclinaison de $9^d 11' 13''$; mais je préfère la première détermination.

Le 14, à $6^h 44' 29''$, temps moyen, la Comète précédoit la quatre-vingt-deuxième de Pégase, de $1^d 11' 0''\frac{1}{2}$; elle étoit plus boréale de $4' 37''$, ce qui donne l'ascension droite de $354^d 12' 45''$, la déclinaison $9^d 49' 19''$.

Le 23, à $7^h 25' 14''$, temps moyen, différence d'ascension droite entre la Comète & la soixante-seizième de Pégase $+ 49' 29''$, & de déclinaison $- 22' 53''$; j'en ai conclu l'ascension droite de la Comète de $353^d 45' 58''$, sa déclinaison $14^d 45' 25''\frac{1}{2}$.

Le 1.^{er} Mars, à $6^h 52' 7''$, la Comète étoit plus occidentale que ϕ de Pégase, de $1^d 54' 4''$, & moins boréale de $9' 41''$; ce qui m'a donné l'ascension droite de $353^d 28' 29''$, la déclinaison $17^d 45' 35''$.

M. Messier vit encore la Comète le 11 Mars, & il a bien voulu me communiquer son observation qui donne pour $7^h 23' 19''$, temps moyen, la différence en ascension droite avec γ de Pégase de $+ 2^d 26' 30''$, celle en déclinaison $+ 6' 17''$. D'après l'observation que j'ai faite de cette étoile au méridien, j'ai conclu pour l'époque de l'observation de M. Messier, l'ascension droite de la Comète de $353^d 6' 30''$, sa déclinaison $21^d 25' 13''$ boréale.

C'est au 11 Mars, que se terminent les premières observations

observations de cette Comète; elle étoit alors trop près de l'horizon, & trop éloignée du Soleil ainsi que de la Terre, pour qu'on pût espérer de la suivre plus long-temps. J'avois déjà présenté à l'Académie, un essai sur les élémens de l'orbite de cette Comète, qui étoit fondé sur mes observations des 24 Janvier, 3 & 14 Février; ce sont ces élémens que M. Pingré a bien voulu insérer, *page 512, du second volume de sa Cométographie*. D'après ces élémens, j'ai tracé la figure de l'orbite de la Comète, & j'ai remarqué, que vers le commencement de Mai, elle ne seroit pas beaucoup plus éloignée de la Terre, qu'elle ne l'avoit été le 11 Mars, & que son élongation du Soleil seroit assez grande; cela me fit concevoir l'espérance de la revoir en Mai, lorsque la Lune ne seroit pas sur l'horizon, & que le ciel seroit bien pur.

Ayant donc calculé la position de la Comète, pour le 9 Mai au soir, je pointai ma lunette, avant le lever de la Lune, à l'endroit où le calcul m'avoit indiqué que la Comète devoit se trouver, & j'eus la satisfaction de la voir dans le champ de la lunette, sans que cela m'eût coûté plus de recherches. La Comète étoit extrêmement foible, on n'y distinguoit presque plus de noyau, ce n'étoit qu'une nébulosité diffuse, de 3 minutes environ de diamètre; elle disparoissoit presque entièrement dès que j'éclairais un peu les fils du micromètre; mais comme elle n'étoit élevée sur l'horizon que d'environ 17 degrés, j'ai présumé qu'elle auroit été beaucoup plus sensible à une plus grande hauteur: la Lune qui s'est levée à minuit 49 minutes, ne m'a pas permis de l'observer plus tard. Voici la nouvelle suite de mes observations; M. Messier reprit aussi les siennes, après que je l'eus informé que la Comète paroït-
soit encore.

Le 9 Mai, à 12^h 27' 20", la Comète précédoit une étoile de sixième grandeur, de 38' 24"; elle étoit moins boréale de 20' 10": au même instant elle précédoit une autre étoile de septième grandeur, de 1^d 4' 33", &

elle étoit plus nord de $20' 59''$. Les positions de ces étoiles ne se trouvent dans aucun Catalogue; je les ai déterminées dans la suite, en les comparant avec γ du Cygne; & par un milieu entre les deux observations, j'ai trouvé pour le 9 Mai, à $12^h 27' 20''$, l'ascension droite de la Comète, de $347^d 54' 20''$; sa déclinaison boréale, $39^d 34' 43''$: cette position est un peu incertaine.

Le 12, j'ai déterminé par un milieu entre six observations, qu'à $13^h 23'$, temps moyen, la Comète étoit à l'orient de la neuvième étoile d'Andromède, de $8' 54''$, & moins boréale de $3' 35''$; donc ascension droite $357^d 11' 45''$, déclinaison $40^d 32' 8''$.

Le 14, à $12^h 14'$, temps moyen, différence en ascension droite avec la dixième étoile d'Andromède — $44' 7''$, en déclinaison + $14' 31''$, par neuf observations; donc ascension droite de la Comète, $346^d 40' 18''$, déclinaison $41^d 8' 20''$.

Le 17, à $12^h 15' 11''$, temps moyen, la Comète précédoit la treizième étoile d'Andromède, de $3^d 22' 18''$, & elle étoit plus boréale de $20' 30''$; donc ascension droite $345^d 49' 7''$, déclinaison $42^d 3' 51''$. Au même instant, la Comète étoit à l'occident de l'étoile d'Andromède, de $6^d 4' 30''$, & moins boréale de $19''$; ainsi, selon cette seconde observation, son ascension droite étoit de $345^d 49' 35''$, sa déclinaison $42^d 4' 3''$.

Le 21, à $11^h 14' 46''$, temps moyen, la Comète étoit à l'occident d'une étoile indéterminée & de sixième grandeur, de $7^d 13' 41''$; elle étoit plus boréale de $2' 12''$: ayant ensuite observé cette étoile au méridien, je conclus l'ascension droite de la Comète de $344^d 31' 52''$, sa déclinaison de $43^d 16' 4''$. Au même instant elle précédoit α d'Andromède, de $7^d 55' 48''$, & elle étoit plus boréale de $8' 0''$; d'où j'ai déduit son ascension droite de $344^d 31' 52''$, & sa déclinaison de $43^d 16' 9''$.

Le 25 Mai, à $13^h 22'$, temps moyen, la Comète étoit plus orientale qu'une étoile indéterminée & de septième

grandeur, de $18' 18''$, & plus boréale de $16' 16''$; après avoir déterminé la position de cette étoile, j'en ai conclu l'ascension droite de la Comète de $343^d 0' 39''$, la déclinaison boréale de $44^d 29' 0''$. Cette observation n'est peut-être pas aussi exacte que les précédentes, parce que la Comète étoit extrêmement foible & très-élevée: la grande distance où elle étoit alors du Soleil & de la Terre, ainsi que la lumière de la Lune, me la déroberent tout-à-fait, & je ne la revis plus.

Voici les nouveaux élémens de l'orbite de cette Comète, que j'ai rectifiés sur la totalité de mes observations.

Longitude du nœud ascendant.....	$1^r 26^d 49' 21''$
Inclinaison de l'orbite.....	$51. 9. 12.$
Lieu du périhélie sur l'orbite.....	$2. 20. 44. 24.$
Distance périhélie $0,707858$, dont le logarithme =	$9,849946.$
Temps moyen du passage au périhélie, 21 Janvier à	$4^h 56' 47''.$
Sens du mouvement réel.....	rétrograde.
C'est la soixante-neuvième dont on ait calculé l'orbite,	

Depuis le 24 Janvier jusqu'au 25 Mai, elle a parcouru sur son orbite un arc de $104^d 38' 31''$, du même côté du périhélie; mais l'accord des observations avec le calcul dans la parabole, doit faire présumer que l'ellipse que parcourt cette Comète, est extrêmement alongée, & que sa période est fort longue.

La première des deux Tables suivantes contient les longitudes & les latitudes géocentriques de la Comète, calculées d'après les observations que je viens de détailler; les différences entre les positions observées & celles calculées d'après les élémens ci-dessus; & les distances de la Comète au Soleil & à la Terre, à l'instant de chaque observation. La deuxième Table renferme les ascensions droites & les déclinaisons des étoiles affectées de l'aberration & de la nutation, telles que je les ai employées pour requière celles de la Comète.

TABLE I. *Des Longitudes & Latitudes géocentriques de la première Comète de 1784, comparées au calcul fait sur les élémens de l'orbite.*

MOI & J O U R S.	T E M P S MOYEN.	L O N G I T. OBSERVÉE.	L A T I T U D E OBSERVÉE.	Les élémens donnent		Dist. de la Com	
				en longit.	en latit.	au ☉	à la Terre.
				M. S.	M. S.	celle Sol. = 1,000	
Janvier 24	7. 35. 53	348. 16. 10	10. 40. 20 A.	— 0. 2	+ 0. 1	0,711	0,857.
Février 3	7. 38. 47	355. 14. 45	2. 46. 22 B.	— 0. 5	+ 0. 26	0,756	1,149.
4	6. 56. 55	355. 39. 33	3. 43. 34 B.	— 0. 2	+ 0. 7	0,763	1,178.
10	6. 41. 33	357. 40. 24	8. 40. 6	— 0. 32	— 0. 1	0,816	1,352.
13	7. 55. 7	358. 25. 57	10. 42. 41	+ 0. 42	+ 0. 24	0,847	1,433.
14	6. 44. 29	358. 38. 36	11. 18. 3	+ 0. 26	+ 0. 6	0,857	1,463.
23	7. 25. 14	0. 19. 6	15. 59. 28	— 0. 4	— 0. 25	0,965	1,691.
Mars 1	6. 52. 7	1. 21. 5	18. 50. 14	— 0. 19	+ 0. 17	1,058	1,843.
11	7. 23. 19	2. 39. 46	22. 18. 6	+ 0. 9	— 0. 25	1,197	2,028.
Mai 9	12. 27. 20	7. 58. 39	40. 26. 49	+ 2. 2	+ 0. 41	2,040	2,435.
12	13. 23. 0	8. 0. 50	41. 32. 49	+ 0. 11	+ 0. 22	2,082	2,434.
14	12. 14. 0	7. 58. 55	42. 16. 6	+ 0. 36	+ 0. 12	2,109	2,433.
17	12. 15. 11	7. 55. 3	43. 23. 27	— 0. 35	— 0. 15	2,149	2,430.
17	12. 15. 11	7. 54. 30	43. 23. 30	— 0. 2	— 0. 18	2,149	2,430.
21	11. 14. 46	7. 41. 43	44. 54. 53	+ 0. 28	+ 0. 29	2,203	2,426.
25	13. 22. 0	7. 20. 9	46. 31. 56	+ 0. 58	+ 1. 4	2,258	2,421.

TABLE II. *Des Ascensions & Déclinaisons apparentes des Étoiles, auxquelles la Comète a été comparée.*

ASCENSION DROITE apparen'e.	DÉCLINAIS. APPARENTE.	CARACTÈRE DES ÉTOILES, Et autorités sur lesquelles leurs positions sont établies.
D. M. S.	D. M. S.	
238. 27. 59	14. 47. 1A	π de la Balaine, catalogue de Bradley.
352. 45. 32	0. 35. 35B	λ des Poissons, catal. de Bradley.
353. 50. 30	2. 17. 18B	19. ^e des Poissons, catal. de Bradley.
27. 43. 23	1. 42. 48	α du lien des Poiss., catal. de Bradley.
357. 52. 7	7. 17. 11	2. c. des Poissons, catal. de Mayer.
353. 5. 58	9. 7. 57	77. ^e de Pégaſe, déterm. par M. d'Agelet.
355. 23. 45	9. 44. 42	82. ^e de Pégaſe, déterminée par moi.
352. 56. 29	15. 8. 18 $\frac{1}{2}$	76. ^e de Pégaſe, déterm. par M. d'Agelet.
355. 22. 33	17. 55. 16 $\frac{1}{2}$	ϕ de Pégaſe, déterm. par M. d'Agelet.
350. 40. 0	21. 18. 56	γ de Pégaſe, déterminée par moi.
348. 32. 28	39. 55. 6	Étoile de 6. ^e grand. } déterm. par moi.
348. 59. 10	31. 13. 31	Étoile de 7. ^e grand. }
347. 2. 50 $\frac{1}{2}$	40. 35. 43 $\frac{1}{2}$	9. ^e d'Andr. déterm. par M. d'Agelet.
347. 24. 24 $\frac{1}{2}$	40. 53. 48	10. ^e d'Andr., déterm. par M. d'Agelet.
349. 11. 25	41. 43. 21	13. ^e d'Andr., déterm. par M. d'Agelet.
351. 54. 5	42. 4. 22	1 d'Andromède
351. 45. 33	43. 13. 52	Étoile de 6. ^e grand. } déterm. par moi.
352. 27. 40	43. 8. 9	κ d'Andromède
342. 42. 21	44. 12. 44	Étoile de 7. ^e grand. }

Cette Comète fut encore observée à Paris, par M.^{rs} Cassini & Messier; & à Toulouse, par M. Darquier: on auroit pu la voir à Paris, dès le 18 Janvier, mais le mauvais temps ne le permit point.

Elle avoit été vue à l'île de Bourbon, dès le 15 Décembre 1783; M. de la Nux en fit, dans cette Isle,

plusieurs observations, dont la première est du 3 Janvier 1784; il en a déterminé les positions, en mesurant, avec un octant, sa distance à plusieurs étoiles fixes. M. Pingré qui a comparé ces observations à la théorie que j'ai rapportée ci-dessus, a trouvé qu'elles s'y accordent aussi bien qu'on peut l'attendre du moyen que M. de la Nux a employé pour fixer les lieux de la Comète: ces observations seront imprimées dans le recueil des Mémoires présentés à l'Académie par les Savans étrangers.

On vit aussi cette Comète, le 10 Janvier, au cap de bonne-Espérance; M. Tondü, étant en rade de la Guadeloupe, l'aperçut le 16 du même mois; M. le Chevalier d'Angos en fit plusieurs observations à Malte, à commencer du 20 Janvier; enfin, elle fut encore observée par M. l'abbé de Beauchamp, à Bagdad, les 19 & 22 Janvier, ensuite à Bassora, les 10, 20 & 25 Février.



OBSERVATION
DE L'ÉCLIPSE DE LUNE,
DU 6 MARS 1784,

Faite à l'Observatoire royal.

Par M. MÉCHAIN.

J'AI fait cette Observation de concert avec M. le Comte de Cassini, qui donnera les détails de la sienne. Je me suis servi d'une lunette achromatique de trois pieds & demi de foyer ; les distances des cornes ont été prises avec un micromètre, à fil curseur, appliqué à cette lunette, & je n'ai employé qu'un grossissement de vingt-sept fois. M. de Cassini mesuroit de son côté les parties éclairées du disque de la Lune.

<i>Temps vrai.</i>	
14 ^h 10' 0"	Pénombre sensible ; la Lune étoit dans de très-légers nuages, & elle étoit entourée d'un halo coloré.
14. 24. 30	Commencement de l'éclipse ; le bord de l'ombre étoit très-diffus.
14. 30. 37	Le bord de l'ombre, qui est toujours mal terminé, touche le bord de la longue tache blanche, dans laquelle se trouve <i>Heraclides</i> .
14. 35. 10	<i>Heraclides</i> entre dans l'ombre.
14. 39. 47	<i>Aristarchus</i> entre.
14. 43. 10	Distance des cornes, 18' 51".
14. 43. 40	<i>Aristarchus</i> tout dans l'ombre, dont le bord devient un peu mieux terminé.
14. 45. 50	<i>Plato</i> entre.
14. 47. 20	<i>Idem</i> , tout dans l'ombre.
14. 48. 10	Distance des cornes, 20' 28".
14. 51. 30	Distance des cornes, 22' 5".
14. 56. 30	<i>Aristoteles</i> entre.
14. 58. 10	<i>Idem</i> , à moitié.

<i>Temps vrai.</i>		
14 ^h 58' 10"		Distance des cornes, 23' 42".
14. 59. 50		<i>Eudoxus</i> entre.
15. 0. 40		Un petit point lumineux, qui précède <i>Copernicus</i> , entre.
15. 2. 30		<i>Gallileus</i> entre dans l'ombre, qui le rase très-long-temps sans le couvrir entièrement.
15. 5. 30		L'ombre au bord de <i>Mare-Serenitatis</i> .
15. 6. 50		Distance des cornes, 25' 18".
15. 16. 30		Distance des cornes, 26' 28".
15. 19. 40		Distance des cornes, 26' 55".
15. 23. 0		L'ombre touche le bord de <i>Copernicus</i> , où elle est parvenue très-lentement.
15. 29. 10		Distance des cornes, 27' 20"; cette distance n'augmenta plus, du moins sensiblement.
15. 33. 40		L'ombre touche <i>Menelaüs</i> & <i>Manilius</i> ; la distance des cornes, comme la précédente.

Les nuages, qui s'élevoient du sud ont couvert la Lune, qui n'a plus reparu que de temps en temps à travers des nuages blancs, mais trop denses pour qu'on pût observer aucune émerfion, ni distance des cornes.

A 16^h 46' je revis la Lune dans un éclairci; elle étoit parfaitement nette, & l'éclipse me parut totalement finie.

M. de Cassini avoit observé la plus grande phase de 12' 28", à 15^h 32', temps vrai.

Observation de la Lune au Méridien, avant le commencement de l'éclipse.

Nous avons observé, avec M. de Cassini, le passage des deux bords de la Lune au méridien.

A 12^h 3' 38",7 temps moyen, l'étoile *d* du Lion avoit précédé le centre de la Lune de 15' 28",9 de temps moyen, ou de 3^d 52' 52",7, & la différence des hauteurs méridiennes du bord de la Lune & de l'étoile, corrigée de celle des réfractions, étoit de 9' 35",3. L'étoile *♂* de la

la Vierge, suivit le centre de la Lune au méridien de $1^h 39' 32'',4$, de temps moyen, ou de $24^d 57' 11'',5$; la différence des hauteurs méridiennes, corrigée de celle des réfractions, fut observée de $21' 32'',9$, entre le bord supérieur de la Lune & l'étoile.

Selon le catalogue de Bradley, on a, pour le 6 Mars 1784, les positions de ces deux étoiles affectées de l'aberration de la nutation, comme il suit.

α du Lion.		δ de la Vierge.	
<i>Ascension droite.</i>	<i>Déclinaison.</i>	<i>Ascension droite.</i>	<i>Déclinaison.</i>
$162^d 21' 42'',7$	$4^d 46' 14'',8 B.$	$191^d 11' 55'',5$	$4^d 34' 17'',5.$

En appliquant à ces positions les différences rapportées ci-dessus, la parallaxe de la Lune en hauteur calculée dans le sphéroïde de $37' 55'',7$, & le demi-diamètre horizontal de $15' 0'',1$, j'ai trouvé, pour $12^h 3' 38'',7$, l'ascension droite du centre de la Lune de $166^d 14' 39'',7$, la déclinaison boréale de $5^d 18' 45'',8$; donc longitude $165^d 16' 56''$, latitude $0^d 32' 10'',7 A$, en supposant l'obliquité apparente de l'écliptique de $23^d 28' 10''$. Les Tables de la Lune, de Mayer, qui sont insérées dans l'Astronomie de M. de la Lande, donnent, pour le même instant, la longitude de $36''$ plus avancée, & la latitude de $23'' \frac{1}{2}$ plus australe.



R E C H E R C H E S

SUR LA FIGURE DES PLANÈTES.

Par M. LE GENDRE.

Là
le 7 Juillet
1784.

DEPUIS que Maclaurin a démontré synthétiquement & d'une manière très-élégante, que le sphéroïde elliptique satisfait rigoureusement à l'équilibre des Planètes dans les hypothèses reçues, plusieurs grands Géomètres* se sont proposé de déterminer directement toutes les figures d'équilibre possibles. Ils ont trouvé que l'ellipsoïde aplati satisfaisoit de deux manières différentes, & ils ont parvenus à exclure un grand nombre d'autres figures, comme ne pouvant remplir les conditions de l'équilibre; mais personne, que je sache, n'a encore démontré que l'ellipsoïde aplati est absolument le seul qui satisfasse à la question. C'est cette proposition qui fait le sujet de ce Mémoire.

Je suppose, comme on paroît l'avoir fait jusqu'à présent, que la figure cherchée est celle d'un solide de révolution peu différent d'une sphère, & partagé en deux parties égales & semblables par son équateur. L'attraction de ce sphéroïde s'évalue facilement à l'aide des formules que j'ai données pour cet objet, (*Mémoires des Savans étrangers, tome X*); & j'en tire l'équation du méridien

* M. d'Alembert, *tomés V & VII de ses Opuscules*. M. de la Place, *Mém. de l'Acad. ann. 1772*.

La proposition qui fait l'objet de ce Mémoire, étant démontrée d'une manière beaucoup plus savante & plus générale dans un Mémoire que M. de la Place a déjà publié dans le volume de 1782, je dois faire

observer que la date de mon Mémoire est antérieure, & que la proposition qui paroît ici, telle qu'elle a été lûe en juin & juillet 1784, a donné lieu à M. de la Place, d'approfondir cette matière, & d'en présenter aux Géomètres, une théorie complète.

exprimée par une suite infinie, équation d'une forme très-différente de celle qu'a trouvée M. de la Place, pour le cas où le sphéroïde ne diffère qu'infiniment peu de la sphère. Je fais voir ensuite que la série renfermée dans cette équation, est toujours convergente; que l'ellipse y est comprise suivant le théorème de Maclaurin, & qu'aucune autre courbe n'y peut satisfaire.

Pour démontrer ces diverses propositions, j'ai recours aux propriétés d'une espèce particulière de fonctions rationnelles qui ne se sont point encore présentées aux Analystes, & qui paroissent mériter leur attention; mais pour ne pas faire diversion à mon sujet principal, j'expose de suite ce qui a rapport à ces fonctions.

Théorèmes sur une espèce particulière de fonctions rationnelles.

1. Les fonctions rationnelles dont il s'agit, sont formées suivant cette loi, qu'il est facile de saisir :

$$\begin{aligned} X^1 &= \frac{2}{1} x^2 - \frac{1}{2}, \\ X'' &= \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4} x^4 - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot 2x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}, \\ X''' &= \frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot 3x^4 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot 3x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \\ X^{IV} &= \frac{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^8 - \frac{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot 4x^6 + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot 6x^4 - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot 4x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}, \\ &\&c. \end{aligned}$$

Ces fonctions X^1 , X'' , X''' , &c. viennent du développement de la quantité $(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}$, &c on a exactement

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + 2xz + z^2}} \\ &= 1 + X^1 z^2 + X'' z^4 + X''' z^6 + \&c \dots (A'). \end{aligned}$$

A a a ij

T H É O R È M E I.

2. Si on fait $x = 1$, les fonctions X' , X'' , X''' , &c. se réduisent toutes à l'unité.

Car en faisant $x = 1$, le premier membre de l'équation (A') devient $\frac{1}{1-z^2}$ c'est-à-dire, $1 + z^2 + z^4 + z^6 + \&c.$

T H É O R È M E II.

3. Les intégrales suivantes, prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, se réduisent toutes à zéro, quelles que soient les constantes α , β , γ , &c.

$$\int \alpha X' dx = 0,$$

$$\int (\alpha + \beta x^2) X'' dx = 0,$$

$$\int (\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4) X''' dx = 0;$$

&c.

Car entre les limites données, on a, par exemple,

$$\begin{aligned} \int (\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4) X''' dx &= \frac{9.11\alpha + 7.11\beta + 7.9\gamma}{2.4.6} \\ &- \frac{3(7.9\alpha + 5.9\beta + 5.7\gamma)}{2.4.6} + \frac{3(5.7\alpha + 3.7\beta + 3.5\gamma)}{2.4.6} \\ &- \frac{(3.5\alpha + 1.5\beta + 1.3\gamma)}{2.4.6}. \end{aligned}$$

Or, n variant de l'unité, la différence troisième de la formule $(2n+1)(2n+3)\alpha + (2n-1)(2n+3)\beta + (2n-1)(2n+1)\gamma$ est nulle: donc $\int (\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4) X''' dx = 0$, & il est facile de voir qu'une démonstration semblable auroit lieu dans tous les autres cas.

T H É O R È M E III.

4. Entre les mêmes limites, $x = 0$, $x = 1$, on a généralement

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1},$$

$$\int x^n X' dx = \frac{n}{n+1.n+3},$$

$$\int x^n X'' dx = \frac{n.n-2}{n+1.n+3.n+5},$$

$$\int x^n X''' dx = \frac{n.n-2.n-4}{n+1.n+3.n+5.n+7}.$$

&c.

Il suffira encore de démontrer cette proposition dans un cas particulier: or on a

$$\begin{aligned} \int x^n X''' dx &= \frac{7.9.11}{2.4.6} \cdot \frac{1}{n+7} - \frac{5.7.9}{2.4.6} \cdot \frac{3}{n+5} \\ &+ \frac{3.5.7}{2.4.6} \cdot \frac{3}{n+3} - \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Cette quantité réduite à un dénominateur commun, prendra la forme

$$\frac{\alpha n^3 + \beta n^2 + \gamma n + \delta}{n+1.n+3.n+5.n+7};$$

mais, suivant le théorème précédent, cette intégrale doit s'évanouir dans trois cas, lorsque $n = 0$, lorsque $n = 2$, & lorsque $n = 4$; elle deviendra donc

$$\frac{\alpha n (n-2) (n-4)}{n+1.n+3.n+5.n+7}.$$

Si on fait ensuite n infini, on aura

$$\frac{\alpha}{n} = \frac{7.9.11}{2.4.6} \cdot \frac{1}{n} - \frac{5.7.9}{2.4.6} \cdot \frac{3}{n} + \frac{3.5.7}{2.4.6} \cdot \frac{3}{n} - \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{n};$$

donc par le théorème I, $\alpha = 1$, &

$$\int x^n X''' dx = \frac{n.n-2.n-4}{n+1.n+3.n+5.n+7}.$$

THÉORÈME IV.

5. Si on intègre toujours entre les limites $x = 0$ & $x = 1$,

on aura $\int X^\mu X' dx = 0$ & $\int X^\mu X^\mu dx = \frac{1}{4\mu+1}$,
 les indices μ & ν étant différens l'un de l'autre dans la
 première formule.

C'est une conséquence immédiate des deux théorèmes
 précédens.

T H É O R È M E V.

6. La fonction X^μ en général est décomposable en μ fac-
 teurs de la forme $x^2 - a^2$, $x^2 - \zeta^2$, $x^2 - \gamma^2$, &c. a , ζ , γ ,
 étant des racines réelles, inégales, & plus petites que l'unité.

Prenons, par exemple, la fonction X'' : puisqu'entre
 les limites $x = 0$ & $x = 1$, on a $\int X'' dx = 0$ (Th. II),
 il faut que X'' ne soit pas toujours de même signe depuis
 $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. Donc a étant moindre que
 l'unité, on peut supposer $X'' = (x^2 - a^2) P$; mais
 par le théorème II, on a $\int (x^2 - a^2) X'' dx = 0$ ou
 $\int (x^2 - a^2)^2 P dx = 0$: il faut donc que depuis $x = 0$
 jusqu'à $x = 1$, la fonction P n'ait pas toujours le même
 signe. Soit encore ζ plus petit que l'unité, & on pourra
 faire $P = (x^2 - \zeta^2) Q$ ou $X'' = (x^2 - a^2) (x^2 - \zeta^2) Q$;
 mais suivant le théorème II, on a $\int (x^2 - a^2) (x^2 - \zeta^2) X'' dx = 0$, ou
 $\int (x^2 - a^2)^2 (x^2 - \zeta^2)^2 Q dx = 0$:
 d'où il suit que Q change encore de signe depuis $x = 0$
 jusqu'à $x = 1$. Je fais de la même manière $Q = (x^2 - \gamma^2) R$,
 ou $X'' = (x^2 - a^2) (x^2 - \zeta^2) (x^2 - \gamma^2) R$; &
 comme, en vertu du même théorème II, on a $\int (x^2 - a^2) (x^2 - \zeta^2) (x^2 - \gamma^2) X'' dx = 0$, il en résultera que
 R doit encore changer de signe depuis $x = 0$ jusqu'à
 $x = 1$, & que X'' est enfin de la forme

$A (x^2 - a^2) (x^2 - \zeta^2) (x^2 - \gamma^2) (x^2 - \delta^2)$,
 a , ζ , γ , δ étant plus petites que l'unité, & A étant le
 coefficient constant $\frac{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}$.

Je dis de plus, que ces facteurs seront inégaux entr'eux : car si on avoit, par exemple, $a = \beta$, X^v seroit de la forme

$$A(x^2 - a^2)^2 (x^2 - \beta^2) (x^2 - \gamma^2).$$

Or on doit avoir, suivant le *théorème II*,

$$\int (x^2 - \beta^2) (x^2 - \gamma^2) X^v dx = 0:$$

il faudroit donc que

$$\int (x^2 - a^2)^2 (x^2 - \beta^2)^2 (x^2 - \gamma^2)^2 dx$$

fût zéro, ce qui est impossible.

THÉORÈME VI.

7. Depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$ exclusivement, la quantité X^u est toujours plus petite que l'unité.

Je reprends l'équation (A') n.º 1, & je suppose

$$1 - 2xz + z^2 = (1 - az)(1 - \beta z);$$

j'aurai

$$a + \beta = 2x, \text{ \& } a\beta = 1.$$

Mais x étant regardé ici comme plus petit que l'unité, je puis supposer $x = \cos. \phi$; il en résultera

$$a = \cos. \phi + \sqrt{1 - \sin. \phi}, \text{ \& } \beta = \cos. \phi - \sqrt{1 - \sin. \phi}:$$

on aura ensuite

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{(1 - 2xz + z^2)}} &= (1 - az)^{-\frac{1}{2}} (1 - \beta z)^{-\frac{1}{2}} \\ &= (1 + \frac{1}{2} az + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} a^2 z^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} a^3 z^3 + \&c.) \\ &\quad (1 + \frac{1}{2} \beta z + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \beta^2 z^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \beta^3 z^3 + \&c.). \end{aligned}$$

Développant ce produit, & ne conservant que les puissances paires de z , on aura la valeur de

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - 2xz + z^2)}} + \frac{1}{\sqrt{(1 + 2xz + z^2)}}$$

exprimée par cette suite dont la loi est très-simple:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} (a^2 + c^2) z^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} (a^4 + c^4) z^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} (a^6 + c^6) z^6 + \&c. \\ + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} a c + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{2} (a^3 + c^3) a c + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{1}{2} (a^5 + c^5) a c \\ + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} a^3 c^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} (a^3 + c^3) a^2 c^2 \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} a^4 c^4. \end{aligned}$$

La suite

$$1 + X' z^2 + X'' z^4 + X''' z^6 + \&c.$$

étant ainsi trouvée, on peut faire

$$ac = 1 \text{ \& } a^m + c^m = 2 \cos. m \varphi,$$

\& on aura

$$X' = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot 2 \cos. 2 \varphi + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} X'' = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot 2 \cos. 4 \varphi + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{2} 2 \cos. 2 \varphi \\ + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X''' = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} \cdot 2 \cos. 6 \varphi + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{1}{2} 2 \cos. 4 \varphi \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} 2 \cos. 2 \varphi + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \end{aligned}$$

\&c.

Il est clair maintenant que les fonctions X' , X'' , \&c. sont les plus grandes qu'il est possible, lorsque $\varphi = 0$, \& qu'elles sont plus petites dans tous les autres cas. Mais
lorsque

lorsque $\phi = 0$, on a $x = 1$, & suivant le *théorème I*, ces fonctions se réduisent à l'unité : donc elles sont au-dessous de l'unité, lorsque x est entre 0 & 1.

THÉORÈME VII.

8. L'intégrale $\int \frac{X^\mu dx}{(1+kx^2)^{\frac{2\mu+3}{2}}}$, prise entre les

limites $x = 0$, $x = 1$, est égale à $\frac{(1-k)^\mu}{(2\mu+1)(1+k)^{\frac{2\mu+1}{2}}}$

quel que soit k .

Si on fait $z = \frac{p}{\sqrt{(1+kx^2)}}$, l'équation (A') n.º 1.

donnera

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{1}{2} dx}{(1+kx^2)^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{2px}{(1+kx^2)} + \frac{p^2}{1+kx^2} \right]} \\ & + \frac{\frac{1}{2} dx}{(1+kx^2)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{2px}{\sqrt{(1+kx^2)}} + \frac{p^2}{1+kx^2} \right]} \\ & = \frac{dx}{(1+kx^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{X^2 dx}{(1+kx^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot p^2 + \frac{X^4 dx}{(1+kx^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot p^4 + \&c. \end{aligned}$$

Pour intégrer le premier membre, je fais $\frac{x}{\sqrt{(1+kx^2)}} = y$.

ensuite $1 + pky = u$, & la différentielle

$$\frac{\frac{1}{2} dx}{(1+kx^2)^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{2px}{\sqrt{(1+kx^2)}} + \frac{p^2}{1+kx^2} \right]}$$

$$\frac{1}{2 p \sqrt{k}} \cdot \frac{d u}{\sqrt{(1+k+k p^2-u^2)}} ,$$

Dont l'intégrale est

$$- \frac{1}{2 p \sqrt{k}} \operatorname{arc} \cos . \frac{u}{\sqrt{(1+k+k p^2)}} .$$

Intégrant de la même manière, l'autre partie du premier membre, on trouvera que l'intégrale totale, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, est

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2 p \sqrt{k}} \operatorname{arc} \cos . \frac{\sqrt{(1+k)}-p k}{\sqrt{(1+k)} \cdot \sqrt{(1+k+k p^2)}} \\ & - \frac{1}{2 p \sqrt{k}} \cdot \operatorname{arc} \cos . \frac{\sqrt{(1+k)}+p k}{\sqrt{(1+k)} \cdot \sqrt{(1+k+k p^2)}} . \end{aligned}$$

Il est facile ensuite de voir que cette expression revient à

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p \sqrt{k}} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tang} . \frac{p \sqrt{k}}{\sqrt{(1+k)}} , \text{ qui équivaut à la suite } \\ & \frac{1}{\sqrt{(1+k)}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{k p^2}{(1+k)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{5} \cdot \frac{k^2 p^4}{(1+k)^{\frac{5}{2}}} - \&c. \end{aligned}$$

d'où l'on conclut

$$\int \frac{X^{\mu} d x}{(1+k x^2)^{\frac{2 \mu+3}{2}}} = \frac{(-k)^{\mu}}{(2 \mu+1)(1+k)^{\frac{2 \mu+1}{2}}} .$$

Équation du Méridien.

9. JE suppose, comme il a été dit ci-dessus, que le méridien du sphéroïde est une courbe quelconque, divisée en quatre parties égales par le diamètre de l'équateur & par l'axe de rotation. J'appelle ρ la densité du sphéroïde; M , sa masse ou son volume; Mf , la force centrifuge à la distance ρ de l'axe; $\frac{dM}{r r}$ l'attraction d'une particule dM à la distance r . Un point quelconque, hors du sphéroïde, étant donné de position par sa distance z au centre,

& par l'angle ϕ que fait cette distance avec l'axe, j'appelle V , la somme des quotiens qu'on aura en divisant chaque particule du sphéroïde par la distance à ce point.

L'attraction du sphéroïde, sur ce même point, se réduit à deux forces X & Y , parallèles à l'axe & à l'équateur, lesquelles peuvent s'exprimer de la manière suivante par les différences partielles de V :

$$X = - \frac{dV}{dz} \cos. \phi + \frac{dV}{d\phi} \cdot \frac{\sin. \phi}{z},$$

$$Y = - \frac{dV}{dz} \sin. \phi - \frac{dV}{d\phi} \cdot \frac{\cos. \phi}{z}.$$

Voyez le tome X des *Savans étrangers*, page 423.

On peut supposer maintenant que le point dont il s'agit, est situé à la surface même du sphéroïde, & comme la résultante des forces qui lui sont appliquées, doit être perpendiculaire au méridien, on aura l'équation

$$\frac{Y - Mfz \sin. \phi}{X} = \frac{-d(z \cos. \phi)}{d(z \sin. \phi)};$$

dans laquelle substituant les valeurs de X & de Y , & intégrant, on trouve l'équation du méridien,

$$V + \frac{1}{2} Mfz^2 \sin.^2 \phi = H,$$

H étant une constante arbitraire. Cette équation est la même qu'a donnée M. de la Place, dans le volume de l'Académie de 1772, & dans sa Théorie du mouvement & de la figure des planètes, page 137.

10. Si on substitue maintenant la valeur de V , que j'ai donnée dans le Mémoire cité (page 422), pour les sphéroïdes de révolution, l'équation du méridien deviendra

$$H = \frac{1}{2} f z^2 (1 - x^2) + \frac{1}{z} \left\{ \dots (B') \right.$$

$$\left. + \frac{A}{z^3} X' + \frac{B}{z^5} X'' + \frac{C}{z^7} X''' + \&c. \right\}$$

Dans cette équation, j'ai fait $\cos. \varphi = x$, & les quantités X' , X'' , X''' &c. sont précisément les fonctions dont il a été parlé ci-dessus. Quant aux constantes H , A , B , C , &c. la première H est arbitraire, & doit se déterminer par la condition, que lorsque $\varphi = 0$, z soit égal au demi-axe du sphéroïde; les autres dépendent des intégrations suivantes, qu'on doit étendre depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$:

$$M = \frac{4\pi}{3} \int z^3 dx,$$

$$MA = \frac{4\pi}{5} \int z^5 X' dx,$$

$$MB = \frac{4\pi}{7} \int z^7 X'' dx,$$

$$MC = \frac{4\pi}{9} \int z^9 X''' dx,$$

&c.

11. L'équation (B') doit comprendre toutes les figures d'équilibre possibles; mais avant d'en tirer quelque conséquence, il est bon de faire voir que la suite qu'elle renferme est toujours convergente, quel que soit le méridien du sphéroïde, pourvu qu'il ne diffère pas beaucoup du cercle. Supposons donc $z = 1 + kp$, k étant une quantité très-petite, & p une fonction de x , telle que le produit kp soit toujours fort petit par rapport à l'unité. Si les deux parties du méridien, séparées par l'équateur, ne font qu'une seule & même courbe, il faudra que p soit une fonction paire de x ; mais l'équation (B') n'est point assujettie à cette condition, elle n'exige la loi de continuité que depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. Il faut seulement supposer qu'à l'équateur où $x = 0$, $\frac{dp}{dx}$ devient nul: en sorte que si p se réduit à $a + Cx^n$, lorsque x est infiniment petit, il faut que n soit plus grand que l'unité. De même, lorsque x est infiniment près de

l'unité, p devenant $a' + C'(1 - xx)^{n'}$, il faut que n' soit encore plus grand que l'unité, pour qu'on ait au pôle

$\frac{dz}{dp} = 0$. Avec ces deux conditions, la courbure du sphéroïde sera uniforme dans toute son étendue.

Maintenant, si on substitue la valeur de z dans les formules du $n.^\circ 10$, & qu'on rejette les puissances de k , supérieures à la première, on aura

$$M = \frac{4\pi}{3} \int (1 + 3kp) dx, MA = \frac{4\pi}{5} \int (1 + 5kp) X' dx, \&c.$$

donc

$$A = 3k \int p X' dx, B = 3k \int p X'' dx, C = 3k \int p X''' dx, \&c.$$

Or, la quantité X^μ étant toujours au-dessous de l'unité, & changeant μ fois de signe, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$ (théorèmes V & VI), il est clair que l'aire $\int p X^\mu dx$, où p ne passe pas une certaine limite, est composée de parties positives & de parties négatives, qui se détruisent d'autant mieux qu'elles sont plus petites & plus multipliées, surtout lorsque μ est un nombre un peu grand. On doit donc regarder la suite $A, B, C, \&c.$ comme convergente, au moins lorsque μ a acquis une certaine grandeur.

12. Pour nous en assurer d'une manière plus précise, considérons le cas où $p = x^n$, alors, suivant le $n.^\circ 4$, on aura

$$\int x^n X^\mu dx = \frac{n \cdot n - 2 \cdot n - 4 \dots n - 2\mu + 1}{n + 1 \cdot n + 3 \cdot n + 5 \dots n + 2\mu + 1};$$

si 2μ est considéré comme fort grand par rapport à n , on trouvera facilement par les formules connues,

$$\int x^n X^\mu dx = \frac{A'}{\mu^{\frac{n}{2} + \frac{1}{2}}},$$

A' étant un coefficient constant; or, nous avons dit ($n.^\circ 11$) que n devoit être plus grand que l'unité; donc la suite $A, B, C, D, \&c.$ décroîtra, au moins dans les termes

382 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
éloignés, plus rapidement que la suite

$$\frac{A'}{1}, \frac{A'}{4\sqrt{2}}, \frac{A'}{9\sqrt{3}}, \&c.$$

Donc si p étoit de la forme $a + Cx^2 + \gamma x^4 + \&c.$ ce qui comprend déjà un très-grand nombre de fonctions, la suite $\int p X^\mu dx, \int p X^{\mu+1} dx, \int p X^{\mu+2} dx, \&c.$ seroit plus convergente que la suite $\frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{(\mu+1)^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{(\mu+2)^{\frac{1}{2}}}, \&c.$

en supposant toujours que μ a passé une certaine limite.

On pourroit, dans plusieurs autres cas encore très-étendus, démontrer la convergence de la suite $A, B, C, D, \&c.$; mais nous nous bornerons à ce qui vient d'en être dit, & nous croyons qu'il y a d'autant moins de difficulté à admettre cette proposition, que la fonction p doit être comprise entre certaines limites, & satisfaire à des conditions particulières qui restreignent beaucoup l'étendue de l'aire $\int p X^\mu dx$.

La suite $A, B, C, D, \&c.$ étant convergente, au moins dans les termes éloignés, on en conclura que la suite $AX', BX'', CX''', \&c.$ l'est aussi, puisque les quantités $X', X'', X''', \&c.$ ne peuvent jamais surpasser l'unité, & sont presque toujours fort au-dessous. D'où il résulte que l'équation (B') peut être employée comme représentant avec exactitude le méridien d'une planète en équilibre.

L'Ellipse est comprise dans l'équation (B').

13. On ne sauroit douter de cette proposition, d'après la théorie de Maclaurin, mais on sera bien aise de voir nos calculs s'accorder avec cette théorie. Soit donc a le demi-grand axe de l'ellipse, e son excentricité, $\frac{e^2}{a^2 - e^2} = k$; l'équation de l'ellipse sera $z^2 = \frac{a^2}{1 + kx^2}$, & les intégrales $M, MA, MB, \&c.$ du n.^o 10, seront, suivant le *théorème VII*,

$$M = \frac{4\pi a^3}{3} \int \frac{dx}{(1+kx^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{4\pi a^3}{3} \cdot \frac{1}{(1+k)^{\frac{1}{2}}},$$

$$MA = \frac{4\pi a^3}{5} \int \frac{X^1 dx}{(1+kx^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{4\pi a^3}{5} \cdot \frac{-k}{3(1+k)^{\frac{1}{2}}},$$

$$MB = \frac{4\pi a^3}{7} \int \frac{X^{11} dx}{(1+kx^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{4\pi a^3}{7} \cdot \frac{k^2}{5(1+k)^{\frac{1}{2}}},$$

$$MC = \frac{4\pi a^3}{9} \int \frac{X^{111} dx}{(1+kx^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{4\pi a^3}{9} \cdot \frac{-k^3}{7(1+k)^{\frac{1}{2}}},$$

&c.

D'où l'on tire

$$A = -\frac{3}{5} \cdot \frac{ka^2}{3(1+k)} = -\frac{3c^2}{3 \cdot 5}, B = \frac{3c^2}{5 \cdot 7}, C = \frac{-3c^2}{7 \cdot 9}, \text{ \&c.}$$

& pour le dire en passant, ces valeurs confirment ce que nous avons dit (*n.ºs 11 & 12*) sur la convergence de la suite, *A, B, C, &c.* *a* étant regardé ici comme l'unité.

Cela posé, l'équation (*B'*) deviendra

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{1}{2} f a z^2 (1 - \kappa^2) + \frac{3a}{2} \\ \left(\frac{1}{3} - \frac{X^1}{3 \cdot 5} \cdot \frac{c^2}{z^2} + \frac{X^{11}}{5 \cdot 7} \cdot \frac{c^2}{z^2} - \text{\&c.} \right) \end{aligned} \right\} \dots (C')$$

& il faut faire voir qu'on peut rendre cette équation identique, en donnant aux constantes *H* & *f* les valeurs convenables.

14. Proposons-nous d'abord de sommer la suite

$$\frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{X^1}{3 \cdot 5} \cdot \frac{c^2}{z^2} + \frac{X^{11}}{5 \cdot 7} \cdot \frac{c^2}{z^2} - \frac{X^{111}}{7 \cdot 9} \cdot \frac{c^2}{z^2} + \text{\&c.}$$

qui entre dans cette équation: suivant la formule (*A'*), *n.º 1*, on aura

$$= 1 - \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{(1-2ps\sqrt{-1-p^2})}} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{(1+2ps\sqrt{-1-p^2})}} \\ = 1 - X^1 p^2 + X^{11} p^2 - X^{111} p^2 + \text{\&c.}$$

multipliant chaque membre par dp & intégrant, on aura

$$\frac{1}{2} \text{arc sin. } \frac{p + x\sqrt{-1}}{\sqrt{(1 - xx)}} + \frac{1}{2} \text{arc sin. } \frac{p - x\sqrt{-1}}{\sqrt{(1 - xx)}} \\ = p - \frac{X^2 p^3}{3} + \frac{X'' p^5}{5} - \&c.$$

Soit $u = \text{tang. } \psi$ & $p^2 (1 + u^2) = u^2 (1 + x^2 u^2)$, on trouvera que le premier membre se réduit à l'arc réel ψ , & qu'ainsi on a

$$\psi = p - \frac{1}{3} X^2 p^3 + \frac{1}{5} X'' p^5 - \frac{1}{7} X''' p^7 + \&c.$$

Multipliant chaque membre par $p dp$, l'intégrale du premier sera

$$\int \psi p dp = \frac{1}{2} p p \psi - \int \frac{p^2}{2} \cdot \frac{du}{1 + u^2} \\ = \frac{1}{2} p^2 \psi - \int \frac{\frac{1}{2} u^2 du (1 + x^2 u^2)}{(1 + u^2)^2} = \left(\frac{1}{2} p^2 + \frac{3x^2 - 1}{4} \right) \psi \\ - \frac{u}{1 + u^2} \left(\frac{1}{2} x^2 u^2 + \frac{3x^2 - 1}{4} \right).$$

J'appelle F , cette quantité, & j'aurai

$$F = \frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{3 \cdot 5} X^2 p^5 + \frac{1}{5 \cdot 7} X'' p^7 - \frac{1}{7 \cdot 9} X''' p^9 + \&c.$$

Maintenant si l'on fait

$$p = \frac{c}{z} \text{ \& } u^2 = \frac{c^2}{a^2 - c^2};$$

on verra facilement que l'équation

$$p^2 (1 + u^2) = u^2 (1 + x^2 u^2),$$

est la même que l'équation de l'ellipse

$$\frac{a^2}{z^2} = 1 + \frac{c^2 x^2}{a^2 - c^2};$$

d'où il résulte qu'en faisant

$$\frac{c}{\sqrt{(a^2 - c^2)}} = \text{tang. } \psi = x, \text{ ou } \frac{c}{a} = \text{sin. } \psi;$$

la somme de la suite

$$\frac{1}{1.3} - \frac{x^2}{3.5} + \frac{c^2}{7} - \frac{x^4}{5.7} + \frac{c^4}{9} - \&c.$$

fera $\frac{Fz^3}{c^3}$, F étant

$$\left(\frac{1}{2}p^2 + \frac{3x^2-1}{4}\right)\downarrow - \frac{a}{1+x^2}\left(\frac{1}{2}x^2u^2 + \frac{3x^2-1}{4}\right)$$

15. L'équation (C') devient, par cette substitution,

$$Hp^2 = \frac{1}{2}af c^2(1-x^2) + \frac{3aF}{c};$$

& comme chaque membre, eu égard à la variable x , est simplement de la forme $a + Cx^2$, on la rend bientôt identique en prenant

$$H = \frac{3}{2 \sin^3 \downarrow} (\downarrow - \sin \downarrow \cos \downarrow),$$

$$(D')...fa^3 = \frac{3}{2 \sin^3 \downarrow} [(3 - 2 \sin^2 \downarrow)\downarrow - 3 \sin \downarrow \cos \downarrow].$$

Puisque $\sin \downarrow = \frac{c}{a}$, ces valeurs pourroient être exprimées par des suites convergentes & régulières, comme il suit :

$$H = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3c^2}{5a^2} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{3c^4}{7a^4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{3c^6}{9a^6} + \&c.$$

$$fa^3 = \frac{6c^2}{3.5a^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{6c^4}{5.7a^4} + \frac{3.5}{2.4} \cdot \frac{6c^6}{7.9a^6} + \frac{3.5.7}{2.4.6} \cdot \frac{6c^8}{9.11a^8} + \&c.$$

L'équation (D'), & celle qui exprime la masse du fluide $M = \frac{4}{3}\pi a^3 \cos \downarrow$, serviront à déterminer entièrement l'ellipse qui satisfait à l'équilibre, & ces équations s'accordent parfaitement avec celles qui résultent de la théorie de Maclaurin.

Mém. 1784.

C c c

16. Si on élimine a^3 de ces deux équations, on aura

$$\frac{Mf}{2\pi} = \psi (3 \cot.^3 \psi + \cot. \psi) - 3 \cot.^2 \psi;$$

or, en regardant la force centrifuge Mf comme infiniment petite, cette équation est susceptible de deux solutions; car selon qu'on suppose ψ infiniment petit, ou infiniment près de 90^d , on a

$$\frac{Mf}{2\pi} = \frac{4}{15} \psi^2 \text{ \& } \frac{Mf}{2\pi} = \frac{1}{2} \pi (\frac{1}{2} \pi - \psi).$$

En général la même équation est susceptible de deux solutions, & il y a par conséquent deux figures elliptiques qui satisfont à l'équilibre, quelle que soit la force centrifuge Mf , pourvu que $\frac{Mf}{2\pi}$ n'excede pas le *maximum* de $\psi (3 \cot.^3 \psi + \cot. \psi) - 3 \cot.^2 \psi$, qui est environ 0,22466, & qui a lieu lorsque $\frac{2\psi}{\sin. 2\psi} = \frac{8 + \cot. 2\psi}{5 + 4 \cot. 2\psi}$.

Au point du *maximum*, les deux figures elliptiques se réduisent à une seule, dont les axes sont dans le rapport de 1 à 2,72 environ.

Dans tous les autres cas, les deux ellipfes qui satisfont, sont, l'une plus aplatie, l'autre moins que suivant le rapport précédent; & il est très-remarquable que ces deux figures diffèrent d'autant plus entr'elles, que la force centrifuge est plus petite. C'est ainsi que le sphéroïde terrestre qui est en équilibre lorsque les axes sont dans le rapport de 230 à 231, peut l'être encore, si on suppose les axes dans le rapport de 1 à 681. M. d'Alembert est le premier qui ait remarqué qu'il pouvoit y avoir plusieurs sphéroïdes elliptiques qui satisfissent à l'équilibre. M. de la Place a fait voir ensuite que le nombre de ces sphéroïdes se réduit à deux, & il a fixé en même temps les limites au-delà desquelles la figure elliptique cesse de satisfaire. Au reste, on peut observer que dans les ellipsoïdes extrêmement

aplatis, la pesanteur à l'équateur étant presque nulle, le fluide peut se dissiper avec beaucoup de facilité, & par conséquent cette figure d'équilibre ne doit pas être regardée comme bien stable.

L'Ellipse est la seule courbe qui satisfasse à l'équation (B').

17. Soient toujours a & c les élémens de l'ellipse trouvée, au moins de celle qui est peu excentrique, on peut supposer $a = 1$ & $\frac{c^2}{1-c^2} = k$; alors on aura

$$f = \frac{6c^2}{3.5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6c^4}{5.7} + \frac{3.5}{2.4} \cdot \frac{6c^6}{7.9} + \&c.$$

$$= \left(\frac{6}{3.5} k - \frac{6}{5.7} \cdot 2k^2 + \frac{6}{7.9} \cdot 3k^3 - \&c. \right) \sqrt{1+k}$$

& l'équation (B') deviendra

$$H = z^2 (1-x^2) \left(\frac{3k}{3.5} - \frac{6k^2}{5.7} + \frac{9k^3}{7.9} - \&c. \right) \sqrt{1+k} \left\{ \dots (E') \right.$$

$$\left. + \frac{1}{z} + \frac{A}{z^3} \cdot X' + \frac{B}{z^5} X'' + \frac{C}{z^7} X''' + \&c. \right\}$$

Nous avons vu qu'on satisfaisoit à cette équation, en prenant $\frac{1}{z^2} = 1 + kx^2$; mais supposons qu'on ait plus généralement

$$\frac{1}{z^2} = 1 + k(x^2 + p) + k^2 q + k^3 r + \&c. \dots (F')$$

$p, q, r, \&c.$ étant des fonctions quelconques de x .

Je substitue dans l'équation (E') la valeur de z , tirée de l'équation (F'); & calculant d'abord tout ce qui multiplie la première puissance de k , j'observe que la partie variable doit se détruire d'elle-même, à l'exception des termes qui renferment p . Or, on trouve facilement que les termes de cette espèce, introduits dans $\frac{1}{z^2}$, $A, B, C, \&c.$

sont $\frac{1}{2} p k$, — $\frac{1}{2} k \int p X' dx$, — $\frac{1}{2} k \int p X'' dx$,
— $\frac{1}{2} k \int p X''' dx$, &c. il faut donc que la quantité

$$\frac{1}{2} p - \frac{1}{2} X' \int p X' dx - \frac{1}{2} X'' \int p X'' dx - \frac{1}{2} X''' \int p X''' dx - \&c.$$

se réduise à une constante que j'appelle $\frac{1}{2} a$.

De-là résulte la forme même de la valeur de p ; savoir,

$$p = a + \mathcal{C} X' + \gamma X'' + \delta X''' + \&c.$$

& il n'est pas à craindre que cette suite soit divergente, suivant ce qui a été dit (*n.ºs 11 & 12*). Cette valeur de p donne, par le *théorème IV*,

$$\int p X' dx = \frac{1}{3} \mathcal{C}, \int p X'' dx = \frac{1}{9} \gamma, \int p X''' dx = \frac{1}{13} \delta, \&c.$$

& comme

$$p - 3 X' \int p X' dx - 3 X'' \int p X'' dx - \&c$$

doit se réduire à a , on aura cette seconde valeur de p

$$p = a + \frac{1}{3} \mathcal{C} X' + \frac{1}{9} \gamma X'' + \frac{1}{13} \delta X''' + \&c,$$

qui étant comparée à la précédente, donne $\mathcal{C} = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$, &c. donc p se réduit à la constante a . Mais si on considère que la masse ne change pas & qu'elle est la même que dans le cas de l'ellipsoïde, on en conclura $\int p dx = 0$, & par conséquent $p = a = 0$.

18. On pourroit objecter que l'égalité des deux suites

$$a + \mathcal{C} X' + \gamma X'' + \delta X''' + \&c.$$

$$a' + \mathcal{C}' X' + \gamma' X'' + \delta' X''' + \&c.$$

n'entraîne pas nécessairement l'égalité des coefficients respectifs, comme nous venons de le supposer. Cette identité des coefficients est évidente, lorsque les suites n'ont qu'un nombre fini des termes; mais on pourroit la nier lorsqu'elles s'étendent à l'infini. Je réponds à cela que la nature des fonctions X' , X'' , X''' , &c. exige qu'on ait $a = a'$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$, $\gamma = \gamma'$, &c. car si les deux séries

précédentes ne sont pas égales terme à terme, leur différence

$$a - a' + (\epsilon - \epsilon') X' + (\gamma - \gamma') X'' + (\delta - \delta') X''' + \&c.$$

sera zéro, quel que soit x . Appelons cette suite y , les intégrales définies $\int y dx$, $\int y X' dx$, $\int y X'' dx$, &c. seront toutes nulles; or, ces intégrales sont respectivement $a - a'$,

$$\frac{\epsilon - \epsilon'}{5}, \frac{\gamma - \gamma'}{9}, \&c. \text{ on a donc } a = a', \epsilon = \epsilon', \gamma = \gamma', \&c.$$

19. Puisque p est nulle, la valeur de $\frac{1}{z^2}$ devient

$$\frac{1}{z^2} = 1 + kx^2 + k^2 q + k^3 r + \&c.$$

or, si à l'aide de cette valeur on élimine z dans l'équation (E'), & qu'on calcule tous les termes multipliés par k^2 , on trouvera de même que la partie affectée de q , & qui doit se réduire à une constante, est

$$\frac{1}{2} q - \frac{1}{2} X' \int q X' dx - \frac{1}{2} X'' \int q X'' dx - \frac{1}{2} X''' \int q X''' dx - \&c.$$

de-là on conclut, comme ci-devant, $q = 0$. On aura pareillement $r = 0$, $s = 0$, &c. de sorte que l'équation générale (F') qui pouvoit représenter une courbe quelconque peu différente du cercle, se réduit à l'équation de l'ellipse $\frac{1}{z^2} = 1 + kx^2$.

Donc, si l'on suppose qu'une planète en équilibre ait la figure d'un solide de révolution peu différent d'une sphère, & partagé en deux parties égales par son équateur, le méridien de cette planète sera nécessairement elliptique.



M É M O I R E

Sur les moyens d'opérer une entière combustion de l'Huile, & d'augmenter la lumière des Lampes, en évitant la formation de la suie, à laquelle elles sont ordinairement sujettes.

Par M. M E U S N I È R.

DÈS le 19 Mars 1783, j'ai eu l'honneur d'expliquer à l'Académie la nouvelle construction de Lampes que j'avois imaginée, à l'occasion de l'appareil à distiller dans le vide, que j'échauffois par ce moyen. Les premières épreuves de cette machine distillatoire que je fis à Cherbourg, au mois de Décembre 1781, & dont l'Académie fut instruite, par une lettre que j'eus l'honneur d'écrire à M. le Roi, qui voulut bien lui en faire la lecture, m'apprirent que les lampes ordinaires avoient les plus grands inconvéniens pour l'usage auquel je les appliquois. Outre leur tendance naturelle à produire de la suie, le peu de chaleur qui accompagne l'espèce de distillation que j'opérois, faisoit de la chaudière un vrai réfrigérant, contre lequel la suie se condensoit en abondance; & la couche épaisse qui se formoit ainsi, ralentissant bientôt la distillation, m'obligeoit à prendre continuellement le soin de l'enlever, à mesure qu'elle se déposoit. Je mis donc la construction d'une espèce de lampe tout-à-fait exempte de suie, au nombre des améliorations dont ces épreuves me firent connoître la nécessité, & je ne tardai pas à m'en occuper.

J'avois remarqué que la suie des lampes, semblable à la suie des cheminées, étoit encore susceptible de brûler;

& que des quantités considérables se réduisoient, par la combustion, en un volume presque insensible de cendres. Il s'ensuivoit de - là que la suie n'étoit autre chose que l'huile elle-même, qui avoit éprouvé le degré de chaleur nécessaire à l'inflammation, mais qui, par le défaut d'une quantité suffisante d'air pur, étoit demeurée dans l'état charbonneux; & il en résultoit qu'outre l'inconvénient qui m'avoit conduit à cette observation, j'avois encore éprouvé celui d'une consommation d'huile en pure perte, puisqu'une partie de l'huile employée n'avoit servi qu'à produire de la suie, sans donner lieu au dégagement de chaleur auquel elle étoit destinée.

Il ne suffiroit pas, en effet, pour que la combustion eut lieu, que le corps qui l'éprouve fut soumis au contact libre de l'air; les parties de ce milieu qui en avoisinent le foyer, ne tarderoient pas à s'épuiser de l'air vital, dont la combinaison avec les corps est la cause universelle de toute espèce de combustion; & cet effet cesseroit bientôt, si de nouvelles portions d'air, succédant continuellement aux premières, ne réparoient pas sans cesse la destruction de ce principe. La Nature elle-même a pourvu à ce renouvellement nécessaire, & la chaleur qui accompagne l'opération dont il s'agit, n'a pas pour unique objet, de mettre la substance combustible dans l'état où son affinité avec l'air vital peut s'exercer; elle sert encore, en dilatant l'air environnant, à en rendre les portions les plus voisines plus légères que le reste du milieu, & excite par cette cause, autour des corps brûlans, un courant d'air ascensionnel, qui présente sans cesse au feu un nouvel aliment.

Le même effet a lieu, d'une manière encore plus sensible, pour toutes les combustions que les différens usages de la vie & des arts ont renfermées dans tant d'espèces diverses de fourneaux: la cheminée, qui fait toujours partie de ces sortes de constructions, & que les premiers inventeurs ne regardèrent sans doute que comme une issue

nécessaire aux vapeurs & à la fumée, a sur-tout pour objet d'augmenter considérablement la rapidité du courant d'air ascensionnel, en donnant une grande longueur à cette colonne d'air chaud & léger, qui tend d'autant plus à monter, que sa pesanteur est moindre par rapport à une colonne égale d'air froid.

Mais si ce renouvellement d'air, se faisant ainsi d'une manière fortuite & sans dessein, suffit à la rigueur pour entretenir simplement un feu quelconque, il exige de plus des conditions particulières & des proportions précises, pour opérer une combustion complète; & la quantité d'air vital qui touche successivement le foyer de la déflagration, doit être réglée de manière à saturer, pour ainsi dire, toute la matière combustible qui, dans le même temps, éprouve la chaleur de l'incandescence; sans quoi l'excédant échappe à l'inflammation, & se volatilise sans autre altération que celle qu'il doit à la chaleur violente qu'il a soufferte. On voit assez par-là que les substances volatiles sont seules susceptibles de cette combustion imparfaite; les autres brûlent plus lentement quand l'air vital leur manque; mais elles ne peuvent se dissiper, & c'est par cette raison que les huiles fournissent une suie abondante, tandis que le charbon, essentiellement fixe & réfractaire, n'en produit aucune.

Ces considérations simples, & liées tout naturellement avec les connoissances que la nouvelle théorie des gaz a rendu familières à la plupart des Physiciens, m'apprirent donc également & les causes de la suie dont la formation m'étoit nuisible, & les moyens de l'éviter: l'heureuse application que M. Lavoisier venoit de faire de l'air vital pur à une lampe dont la flamme mettoit en fusion les substances les plus réfractaires, me confirma de plus en plus dans ces idées. Il ne s'agissoit que d'augmenter convenablement la rapidité du courant d'air occasionné par la combustion; & pour ne pas mettre inutilement en mouvement une grande quantité d'air, il falloit assujettir l'air
frais

frais attiré par ce courant, à toucher les flammes, dès qu'il entroit dans le fourneau où les lampes étoient renfermées. Une autre conséquence de ces principes étoit de faire présenter aux flammes le plus de surface possible; & j'adoptai, par cette raison, l'usage des mèches plates en forme de ruban, qu'on emploie depuis quelques années.

Je fis donc construire les lampes dont j'ai eu l'honneur de montrer le dessin à l'Académie, à l'époque que j'ai citée au commencement de ce Mémoire: elles sont, depuis ce temps-là, avec le reste de ma machine distillatoire, à la raffinerie de l'Arсенal, où plusieurs Membres de l'Académie les ont vues; & je déterminai, par différentes épreuves, les dimensions de l'orifice qui devoit fournir l'air à la flamme, & de la cheminée qui devoit en déterminer le mouvement. Ces lampes consistent d'abord uniquement en une boîte creusée qui recouvre le vase où est contenue l'huile qui baigne le pied des mèches. Le fond inférieur de cette boîte est percé d'autant de trous qu'il y a de mèches, & sur chaque trou est soudé un porte-mèche plat qui monte jusqu'au niveau du fond supérieur; ce dernier est percé lui-même, vis-à-vis l'extrémité de chaque porte-mèche, d'une ouverture ovale dont la mèche occupe le milieu; & la capacité de la boîte communiquant avec l'air inférieur par un conduit particulier, il arrive que quand la lampe est renfermée dans son fourneau, & sous la chaudière qu'elle doit échauffer, l'action de la cheminée fait continuellement arriver dans la boîte de nouvel air frais qui, se répandant par les ouvertures ovales, alimente les flammes, & sert tout entier à entretenir leur activité.

J'eus bientôt obtenu, avec cet appareil, des flammes pures, exemptes de suie; & au lieu de cette substance dont l'abondance me nuisoit auparavant, je ne trouvois plus que quelques parcelles de cendre blanche contre le fond de la chaudière qui étoit frappé par les flammes: je remarquai même une augmentation sensible dans la production de chaleur, & je m'en assurai par des moyens directs; mais je

ne tardai pas à m'apercevoir qu'un courant d'air trop rapide pouvoit aussi-bien nuire à mon objet que le défaut contraire, & qu'alors les flammes singulièrement diminuées, étoient à la vérité exemptes de suie; mais ne produisoient plus, à beaucoup près, la chaleur dont elles étoient susceptibles. On conçoit en effet comment le courant d'air dont il s'agit, devenant un vent réel, entraînoit les molécules embrasées, avant que leur chaleur eût pu déterminer de nouvelle huile à se volatiliser & à brûler à son tour.

C'étoit par le moyen d'une espèce de robinet appliqué au haut de la cheminée du fourneau, que je faisois varier le courant d'air, en augmentant ou diminuant l'orifice de sortie; & j'avois employé ce moyen pour connoître la grandeur précise que je devois donner par la suite à cet orifice pour une lampe donnée. J'ouvris plus ou moins ce robinet, jusqu'à ce que la flamme, devenue nette & brillante, n'éprouvât cependant aucune diminution marquée; & je mesurois la quantité d'air qui entroit alors dans le fourneau, par le moyen d'un instrument très-délicat, dont j'ai donné autrefois la description à l'Académie: mais une nouvelle observation m'apprit bientôt que le même degré d'ouverture de ce robinet ne convenoit pas à toutes les circonstances, & qu'il devoit varier suivant la longueur de la mèche & la température de l'air extérieur. Ces deux causes changent en effet la quantité d'huile qui se consomme; & celle de l'air qui passe par les mêmes orifices; & puisqu'elles sont exposées à des variations continuelles, je reconnus la nécessité de conserver ce robinet, que je n'avois d'abord employé que comme un moyen de recherche.

Une remarque devoit encore ajouter un dernier degré de perfection à ces lampes, dont l'objet étoit devenu pour moi de produire le plus de chaleur possible, avec une quantité donnée d'huile. L'air arrivant auprès des flammes, se dilatoit nécessairement en s'échauffant presque subitement; & cette dilatation tendant à en écarter une grande partie de la flamme qui en étoit environnée, faisoit que

tout l'air vital apporté par ce courant, ne servoit pas à la combustion. Il falloit donc mettre en mouvement plus d'air qu'il n'étoit nécessaire pour obtenir une entière combustion; & cet air surabondant ne pouvoit que refroidir le fourneau, en se chargeant d'une partie de la chaleur qu'il ne contribuoit point à augmenter. Cette considération me porta à entourer toutes les flammes d'autant de tuyaux de cuivre qui alloient se terminer à quelques lignes du fond de la chaudière; & l'air contenu par leur moyen, ne pouvant plus se dilater que suivant la longueur de ces tuyaux, ni s'éloigner de la flamme, servoit alors en bien plus grande quantité à rendre la combustion complète. Je m'aperçus en effet, à l'aide de l'instrument délicat dont j'ai parlé, qu'avec un courant d'air sensiblement moindre, j'obtenois la même espèce de flamme qu'auparavant, & quelques degrés de chaleur de plus.

Tel est l'historique de mes recherches sur les lampes destinées à produire de la chaleur; & l'application des mêmes principes à celles qui ont pour objet d'éclairer, est immédiate, puisque la chaleur & la lumière se dégagent en même temps dans toutes les espèces de combustions. C'est par cette raison que, sans faire aucun changement à la construction que j'avois adoptée, j'ai fait exécuter une lampe à réverbère, que j'ai eu l'honneur de faire voir dernièrement à l'Académie. Il y a cependant une observation à faire, concernant les tuyaux de cuivre dont j'ai parlé ci-devant, & que j'ai transformés nécessairement en un tube de verre, dès qu'il a été destiné à environner une flamme visible; c'est que ce petit appareil ne pouvant avoir d'autre objet que d'économiser la chaleur, en empêchant que la dilatation n'éloigne l'air nouveau de la flamme, à mesure qu'il entre dans l'appareil, peut être suppléé par une ouverture un peu plus grande du robinet qui termine la cheminée; & qu'alors on évite la perte de lumière, qu'occasionne incessamment un obstacle de plus qu'on lui

donne à traverser. On peut donc établir que, dans tous les cas où ce tube de verre pourra être suppléé autrement ; il est plutôt nuisible qu'avantageux, dès qu'il s'agit de lampes destinées à éclairer, & je ne l'ai ajouté à ma dernière lampe, que pour développer cette vérité.

On voit, par cette théorie, qu'il y a bien des mécanismes propres à remplir l'objet que je m'étois proposé, avec des lampes renfermées, & qu'il ne s'agit que d'opérer, autour de la flamme, un renouvellement d'air suffisant. C'est ainsi que M. Argant a fait connoître, à Paris, vers la fin de l'année dernière, un moyen très-ingénieux & applicable à des lampes isolées. Il dispose la mèche circulairement autour d'un tuyau cylindrique vertical, qui devient ainsi une sorte de cheminée, dans laquelle il passe continuellement de nouvel air, qui touche la surface intérieure de la flamme. Il y a même une remarque très-intéressante à faire au sujet de ces lampes, à laquelle les observations qui précèdent conduisent tout naturellement, c'est que la dilatation continuelle du nouvel air & l'augmentation de son volume tendent à le porter sur la flamme, plutôt que de l'en éloigner ; & c'est à cette circonstance qu'est dû sans doute le bon effet de ces lampes, puisque leur cheminée, contenant un air qui n'est chaud que sur une petite longueur dans la partie supérieure, ne tireroit point assez sans la cause qui fait servir presque tout l'air qu'elle fournit à une entière combustion. M. Argant emploie au surplus un mécanisme particulier pour gouverner ses lampes, & ne pouvant faire varier à volonté le courant d'air, comme je le fais à l'aide du robinet qui occupe le haut de la cheminée des miennes, il agit sur la consommation d'huile, en alongeant ou raccourcissant la mèche, par le moyen le plus simple & le plus commode : il obtient par-là ce qu'on pourroit appeler l'équilibre nécessaire entre la quantité du combustible consommé & celle de l'air vital qui lui est fourni. Il a senti que cet équilibre ne

sauroit être permanent; & c'est en cela que la lampe de M. Argant porte ce caractère qui annonce un inventeur conduit par une théorie fondée.

Si l'on peut faire cependant un reproche à ces lampes, c'est que l'orifice intérieur ne pouvant être diminué au-delà d'un certain point, l'étendue de leur mèche circulaire donne lieu à une consommation d'huile & une production de lumière plus considérables qu'il n'est nécessaire dans plusieurs cas; & que, très-propres à éclairer de vastes emplacements, elles ne peuvent être appliquées avec le même avantage à l'usage d'un seul homme.

Il me reste à parler du tube de verre que M.^r Quinquet & Lange ont ajouté depuis peu aux lampes de M. Argant, & qui a les plus grands rapports avec le tube de cuivre que j'emploie dans les miennes. Il sembleroit d'abord qu'il a pour objet d'exciter un courant d'air qui touche la flamme extérieurement, tandis que le conduit intérieur, inventé par M. Argant, fournit de l'air à la surface intérieure; mais le tube de verre dont il s'agit, beaucoup trop court pour pouvoir agir ainsi à la manière d'une cheminée, ajoute, tel qu'il est, bien peu de chose à l'effet de ces lampes, & pourra toujours être suppléé par le conduit intérieur, quand il sera bien proportionné & la lampe bien gouvernée. La lumière alors n'aura plus ce verre à traverser; & s'il peut avoir une utilité réelle, ce n'est guère qu'en plein air où il garantit la flamme de l'agitation d'un vent médiocre. Ces lampes manquent au reste du moyen que M. Argant avoit imaginé pour en gouverner la mèche; & depuis qu'elles se sont répandues, on en voit plusieurs qui jettent souvent une fumée épaisse: elles sont d'ailleurs tout-à-fait dans le cas de celles de M. Argant, ayant de toute nécessité une mèche très-étendue, dont le développement équivaut à cinq ou six mèches de nos réverbères ordinaires; & la grande lumière qu'elles répandent, tient principalement à la consommation d'huile qui résulte de la grandeur de leur mèche.

La véritable utilité d'un tube de verre environnant la flamme d'une lampe, est qu'en faisant fonction de cheminée, il déterminera l'entrée d'un courant d'air par son orifice inférieur; mais il faut qu'alors il ait au moins six à sept pouces de longueur, sur quinze à dix-huit lignes de diamètre, suivant la grosseur des mèches; & je me suis assuré, par des expériences multipliées, que cet appareil simple, appliqué à des lampes anciennes & de toutes sortes de constructions, leur donne sans dépense tous les avantages qu'on vante dans les nouvelles lampes.

OBSERVATION

ANATOMIQUE.

Par M. DE FOUCHY.

LE premier des accidens qui m'ont tenu absent de l'Académie, pendant un temps assez long, a été accompagné d'une circonstance qui m'a paru mériter que je la communiquasse à l'Académie.

Le 24 Mars dernier, sortant de chez M. Anisson, où j'avois assisté à l'examen de sa nouvelle presse, je retournois chez moi, vers les sept heures du soir, & il commençoit à faire un peu obscur. En traversant le boulevard, alors très-dérangé par le pavé de la Comédie italienne & par les fouilles des tuyaux, un pavé à moitié sorti de sa place, m'accrocha le pied, & me fit tomber en avant & un peu de côté, le visage sur un tas d'éclats de grès qui se trouva-là. Le coup porta principalement sur le vomer & sur le coin de l'orbite de l'œil droit; la peau qui couvre le vomer, fut entamée, & il en sortit assez de sang. Je sentis, à l'instant du coup, une vive douleur qui se communiqua à l'œil gauche; mais je n'éprouvai ni étourdissement ni mal de cœur. Je me relevai sur le champ, & continuai mon chemin, tenant mon mouchoir sur la plaie du nez qui me faisoit beaucoup de douleur. À mon arrivée, je lavai cette plaie qui ne saignoit plus, avec du vin chaud, & la douleur diminua peu-à-peu assez pour ne pas m'empêcher de dormir. Le lendemain matin elle étoit supportable, & je crus remarquer que je la sentoisi assez distinctement en deux endroits; savoir, au vomer, & au-dessus de l'œil gauche qui n'avoit point essuyé de coup; celle du vomer étoit accompagnée d'une circonstance particulière & qui a duré long-temps, c'est que lorsque je pouissois, même légèrement, avec le doigt, le vomer à droite ou à gauche, je sentoisi une

petite crépitation interne, comme si l'engrenage de ces os avec ceux de la face avoit souffert. Jusque-là je n'avois rien aperçu d'extraordinaire, je sortis même & ne rentrai que pour dîner ; mais voici ce qui le fut , & qui me parut mériter considération.

Sur la fin du dîner, je sentis un petit redoublement de douleur au-dessus de l'œil gauche, & dans l'instant même je cessai de pouvoir prononcer les mots que je voulois. J'entendois ce que l'on disoit, & je pensois ce que je devois répondre ; mais je prononçois d'autres mots que ceux qui devoient exprimer ma pensée ; ou si je les commençois, je ne les achevois pas, & j'y substituois d'autres mots ; j'avois cependant tous les mouvemens aussi libres qu'à l'ordinaire ; je n'abandonnai ni ma fourchette ni un morceau de pain que je tenois ; je voyois nettement tous les objets ; j'entendois distinctement ce qu'on disoit, & les organes qui concourent à la pensée, étoient, à ce qui me paroïssoit, dans l'état naturel.

Cette espèce de paroxïsme dura à peu-près une minute, & pendant sa durée j'eus l'esprit assez libre pour remarquer cette singulière distinction dans le sensorium de l'ame, qui n'avoit qu'une seule de ses parties affectée, sans qu'aucune des autres eût éprouvé le moindre dérangement.

Lorsque M. Vicq-d'Azyr lut, à l'assemblée de l'Académie du 30 Avril dernier, son Mémoire sur l'Anatomie comparée du cerveau de l'homme & des autres animaux, je fus frappé de ce qu'il disoit des filets nerveux, qui partant du cerveau, venoient à travers l'os cribléux, se rendre dans l'intérieur du nez, & je crus y apercevoir la cause de l'état dans lequel je m'étois trouvé, ces filets ayant pu être ébranlés par le coup qu'avoit reçu le vomer, & transmettre leur ébranlement au cerveau ; mais je n'y trouvai point la raison du singulier phénomène du sensorium de l'ame affecté dans une seule de ses parties, sans que les autres l'aient été en aucune manière. Je me renferme ici purement dans le fait que j'ai cru devoir communiquer à l'Académie,

l'Académie, & le consigner, si elle le juge à propos, dans ses registres. Une observation de cette espèce doit être extrêmement rare, puisqu'elle exige qu'un Physicien en soit le sujet, & que l'accident n'ait pas été assez grave pour l'empêcher d'en observer toutes les circonstances. Quelque zèle cependant que j'aie pour l'avancement des Sciences qui font l'objet de l'Académie, j'espère qu'elle me pardonnera aisément de ne pas desirer de lui en présenter souvent de pareilles.

RENSEIGNEMENS GÉNÉRAUX

Pour tenir lieu de réponse à une Question adressée à l'Académie, par M. GASTÉ DE BONAY, concernant la cherté & la rareté du Bois à brûler, particulièrement du Charbon de bois, relativement aux grosses Forges & Fourneaux à Fer.

Par M. M O R A N D.

« **L**A nécessité d'aviser à la cherté & à la rareté du bois de chauffage, ainsi que du charbon végétal (je transcris ici la Lettre écrite à l'Académie), devient de jour en jour plus pressante; les grosses forges & fourneaux, en un mot, les mines à feu, par leur énorme consommation, sont en partie cause de cette disette, pour le charbon de végétal. Le bois est presque par-tout aujourd'hui à un prix que les manufactures ne peuvent plus supporter; en sorte qu'il faut, ou que le produit des ouvrages, déjà fort cher, augmente encore, ou que beaucoup d'entr'elles soient mises bas : l'une & l'autre alternative ne peut être que très-fâcheuse. On n'a pas besoin de rien ajouter à cette remarque ».

Depuis long-temps l'inquiétude sur le dépérissement des bois du royaume est générale; Paris s'en est ressenti cet hiver & le précédent; les provinces n'en sont pas exemptes; l'Académie est consultée à cette occasion par un citoyen zélé & honnête, résidant près d'Argentan, en basse-Normandie.

M. Gasté de Bonay, est à portée d'éprouver l'inconvénient de la cherté & de la rareté du bois employé en charbon dans les grosses forges & fourneaux à fer; il est

instruit aussi, à ce qu'il paroît, « d'essais infructueux faits dans la province, pour appliquer à ces usines le feu de charbon de terre, dont le succès néanmoins tendroit à augmenter le bois de chauffage; » enfin diverses annonces qui lui sont parvenues sur cette substitution de combustible, le conduisent à présumer qu'il existe une *méthode sûre de faire cette application*; elle est ignorée dans les parties occidentales de la France, assez garnies de grosses forges. M. Gasté a recours à l'Académie pour savoir *si l'on a réellement quelque connoissance de la possibilité de réussir*; il prie l'Académie de l'indiquer.

L'Académie portée de tout temps à concourir au bien public, soit par ses propres travaux, soit par ceux de ses Correspondans, & même ceux des Savans étrangers, qu'Elle publie à la suite de ses Mémoires, m'a chargé de présenter, dans une de ses séances, un projet de réponse à cette Lettre. La recherche de la manière de procéder pour remplir l'intention de l'Académie, a été peu embarrassante : un simple énoncé des différens articles traités jufques à ce jour par différens Savans, touchant l'application du feu de charbon de terre aux grosses forges, m'a semblé ce qu'il y avoit de plus naturel & de plus convenable; c'est à quoi j'ai cru devoir d'autant plus me borner, que ces articles se trouvent recueillis dans un seul & même ouvrage, connu du Public & avoué de l'Académie, l'art d'exploiter les mines de charbon de terre. Je me bornerai donc à présenter ici une Table purement indicative suivant l'ordre de l'ouvrage; je mettrai ensuite sous les yeux de l'Académie ce que j'y ai ajouté de relatif au point où on en est, depuis l'impression achevée, touchant la substitution économique du feu de braise de charbon de terre au charbon végétal, dans les forges & fourneaux à fer, objet principal sur lequel M. Gasté de Bonay propose la question : *y a-t-il possibilité de réussir!*

La description de l'art auquel je renvoie M. Gasté de Bonay, renferme des preuves que la méthode existe, puis-

que l'opération s'exécute avec succès en Angleterre, où le procédé en a été communiqué, suivant Becher, par un Allemand nommé Blawenstein.

Il est bien vrai que, jusques à ce jour, nous n'avons pu, en France, avoir le même succès pour les forges & fourneaux à fer : cela tiendrait-il à la nature de la mine de fer, dont telle ou telle espèce peut ou ne peut pas être traitée avec le charbon de terre ainsi fabriqué ? Ne faudrait-il point, dans une comparaison bien faite de celles que l'on traite de cette façon en Angleterre, & des espèces que nous avons en France, trouver celles qui sont propres à être traitées par ce procédé ? Ces points de recherche, ainsi que beaucoup d'autres propres à ouvrir de nouvelles vues pour perfectionner les tentatives déjà faites, se trouvent présentés, rapprochés avec soin dans un détail convenable, sous les titres qui forment l'espèce d'index dont j'ai parlé il n'y a qu'un instant, pour servir de réponse à M. Gaffé.

Du charbon de terre pour les ouvrages de forge & pour les travaux métallurgiques.....Page 1159.

Du feu de charbon de terre appliqué à la réduction des minerais, en particulier de la mine de fer; histoire des procédés connus pour rendre ce combustible propre à ces opérations; connoissances fondamentales de métallurgie à rapprocher de ces tentatives faites ou à faire..... 1165.

Coup-d'œil général sur la fonte des mines, dans les principales circonstances qui constituent cette opération..... 1168.

Des mines de fer..... *Idem.*

Des fondans..... 1171.

Des charbons de bois, essai de comparaison entr'eux & les charbons de terre..... 1174.

Différentes espèces de braise de charbon de terre, leur fabrication en grand..... 1177.

Fabrication de braise de charbon de terre, nommée *coaks*, pour fondre le minerais de fer, à Carron en Écosse, d'après M. Jars..... 1178.

Fabrication de ces mêmes braises nommées *tinders*, d'après M. Jars..... 1178.

Préparation de braïse de charbon de terre, nommée *cinders*, dans des fours, à Newcastle, d'après M. Jars..... Page 1179.

Cuïsson de charbon de terre, exécutée en meule, à Saint-Bel en Lyonnais, par M. Jars..... 1183.

Qualité générale du feu de charbon de terre, pour les opérations métallurgiques..... 1187.

Recherches sur la réduction des charbons de terre en braïse.. 1188
&..... 1190.

Analyse des procédés indiqués pour faire des braïses de charbon de terre, en alumelles & dans des fours..... 1192.

Opérations métallurgiques exécutées & tentées avec le charbon de terre brute, ou de ses braïses..... 1201.

Grillage, ou rôtiſſage des mines..... *Idem*.

Des minerais de fer qui se traitent dans quelques forges, en Angleterre, & de leur grillage..... 1202.

Grillage de la mine de fer, aux forges de Carron & à Clifton en Angleterre, d'après M. Jars..... 1203.

De la fonte des minerais en général..... 1304.

Fonte des minerais de fer dans des hauts fourneaux, aux forges de Carron en Écosse, d'après M. Jars..... 1205..

Fourneau à vent, ou fourneau anglois, en usage à Newcastle, pour fondre la gueuse de fer, avec le clod-toak, réduit en une espèce de cinders, appelé *coak*, sans aucune addition de charbon de bois, d'après M. Jars..... 1206.

Essais faits dans le Marquisat de Franchimont, aux forges de Theux, pays de Liège, par M. de Limbourg l'aîné, Docteur en Médecine..... 1213.

Observations sur ces essais..... 1215.

Tentative faite en Languedoc..... 1218.

Expériences faites avec différentes proportions de mélange de charbon de bois & de houille..... 1219.

Fonte de gueuse de fer exécutée à la forge d'Aizy en Bourgogne, dans l'année 1775, avec le charbon de terre de Montcenis réduit en braïse..... 1221.

Histoire & analyse des opérations faites à Aizy & aux forges de Breteuil en Normandie..... 1587.

Je viens donc tout de suite à l'addition que j'ai annoncée. Une remarque sur laquelle je n'ai cessé d'insister, toutes

les fois que j'ai eu à répondre sur l'emploi du feu de charbon de terre, c'est que, de tous les combustibles, le charbon de terre est celui qui a le plus besoin de l'action de l'air libre, personne ne l'ignore; mais, dans les nouvelles applications que l'on tente de ce feu particulier, a-t-on toujours ce principe de fait assez présent à l'idée? Je le crois de la plus grande conséquence pour l'emploi du charbon de terre aux grosses forges & aux fourneaux à fer. On ne parviendra à un succès complet, qu'autant que la construction du fourneau se rapportera à ce principe, de manière que l'air agisse sur le combustible & avec la plus grande liberté, & dans la plus grande étendue possible. Il n'y aura alors rien de surprenant qu'avec un petit nombre de charges de coaks, & une petite quantité de fondant calcaire, on parvienne à avoir un produit considérable de fonte. Toutes les personnes instruites ou intelligentes dans les différentes parties qui constituent l'art des forges, n'ont besoin que d'être mises sur la voie. On est au surplus dans l'expectative d'essais qui doivent se faire à Montcenis en Bourgogne.

M. Wilxinson, anglois de nation, connu depuis plusieurs années à Nantes, doit établir à Montcenis des forges, sans cours d'eau pour moteur, & où le charbon de terre sera employée en braise, le tout à la manière connue en Angleterre.



M É M O I R E

SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS
AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES,

Par M. COUSIN.

(1.) J'AI démontré dans nos Mémoires pour 1783, un théorème qu'on peut énoncer d'une manière beaucoup plus générale, que voici :

L'équation de l'ordre n

$$a \frac{d^2 z}{dy^2} + \epsilon \frac{d^2 z}{dy^{n-1} dx} + \gamma \frac{d^2 z}{dy^{n-2} dx^2} + \dots + \epsilon \frac{d^2 z}{dx^2} = \tau,$$

dans laquelle $a, \epsilon, \gamma, \dots, \epsilon, \tau$, sont des fonctions de x, y, z , & des différences partielles de z jusqu'à celles de l'ordre $n - 1$ inclusivement, étant proposée; si on nomme p, q, r, s , &c. les différences partielles de l'ordre $n - 1$, & qu'ayant formé l'équation

$$am^n + \epsilon m^{n-1} + \gamma m^{n-2} + \dots + \epsilon = 0,$$

l'on fasse, pour abréger,

$$am + \epsilon = a\lambda, a\lambda m + \gamma = a\mu, a\mu m + \delta = a\nu, \&c.$$

toutes les intégrales de la proposée dépendront de pouvoir satisfaire aux équations prises deux à deux, qu'on formera, en mettant successivement pour m ses valeurs dans ces deux-ci,

$$m dy + dx = 0,$$

$$am(dp + \lambda dq + \mu dr + \nu ds + \&c.) + \tau dx = 0.$$

Nous commencerons par appliquer ce théorème aux équations linéaires, c'est-à-dire, à celles où z & ses différences partielles de tous les ordres sont sous une forme linéaire.

(2.) Les équations linéaires de l'ordre n peuvent toutes se représenter par

$$\begin{aligned} a \frac{d^n z}{dy^n} + \epsilon \frac{d^n z}{dy^{n-1} dx} + \gamma \frac{d^n z}{dy^{n-2} dx^2} + \dots + \epsilon \frac{d^n z}{dx^n} = 0 \\ + \epsilon' \frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}} + \gamma' \frac{d^{n-1} z}{dy^{n-2} dx} + \dots + \epsilon' \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} \\ + \gamma'' \frac{d^{n-2} z}{dy^{n-2}} + \dots + \epsilon'' \frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} \\ + \dots \dots \dots + \vartheta z \end{aligned}$$

dans laquelle les coefficients de z & de ses différences partielles & θ sont des fonctions de x, y . Alors, si nous nommons p, q, r, s , &c. les différences partielles de l'ordre $n-1$, $p', q', r',$ &c. celles de l'ordre $n-2$, &c. nous aurons à résoudre les équations aux différences ordinaires,

$$m dy + dx = 0,$$

$$\begin{aligned} & am(dp + \lambda dq + \mu dr + \nu ds + \dots) \\ & - (\epsilon' p + \gamma' q + \delta' r + \dots + \gamma'' p' \\ & + \delta'' q' + \dots + \dots + \vartheta z - \theta) dx = 0. \end{aligned}$$

Désignons par $m, m', m'',$ &c. les valeurs de m , par $dt_1, ds_1, dr_1,$ &c. les différentielles exactes qu'on trouvera en cherchant les facteurs propres à rendre intégrables

$$m dy + dx, m' dy + dx, m'' dy + dx, \text{ \&c.}$$

Cela posé, ayant multiplié les équations

$$\frac{dt_1}{dy} dy + \frac{dt_1}{dx} dx = 0,$$

$$\begin{aligned} & am(dp + \lambda dq + \mu dr + \dots) \\ & - (\epsilon' p + \gamma' q + \delta' r + \dots + \gamma'' p' \\ & + \delta'' q' + \dots + \dots + \vartheta z - \theta) dx = 0, \end{aligned}$$

la première par Δ , & l'autre par Λ , nous les ajouterons ensemble, & nous donnerons à la résultante la forme que voici:

$$d.\Lambda am(p + \lambda q + \mu r + \&c.)$$

$$- p d.\Lambda am - q d.\Lambda \lambda am - r d.\Lambda \mu am - \&c.$$

$$- \Lambda (\zeta' p + \gamma' q + \delta' r + \&c. + \gamma'' p'$$

$$+ \delta'' q' + \&c. + \&c. + \varrho z - \theta) dx$$

$$+ \Delta \left(\frac{d\tau_1}{dy} dy + \frac{d\tau_1}{dx} dx \right) = 0.$$

Nous supposons

$$- p d.\Lambda am - q d.\Lambda \lambda am - r d.\Lambda \mu am - \&c.$$

$$- \Lambda (\zeta' p + \gamma' q + \delta' r + \&c. + \gamma'' p'$$

$$+ \delta'' q' + \&c. + \&c. + \varrho z) dx$$

$$+ \Delta \left(\frac{d\tau_1}{dy} dy + \frac{d\tau_1}{dx} dx \right),$$

une différentielle exacte que nous nommerons dV ; & θ_1 étant l'intégrale de $\Lambda \theta dx$, prise par rapport à x , après avoir mis pour y la valeur en x & τ_1 , nous aurons

$$(1) \dots \Lambda am(p + \lambda q + \mu r + \&c.) + V + \theta_1 = 0:$$

nous aurons aussi

$$- p \frac{d.\Lambda am}{dy} - q \frac{d.\Lambda \lambda am}{dy} - r \frac{d.\Lambda \mu am}{dy} - \&c.$$

$$+ \Delta \frac{d\tau_1}{dy} = \frac{dV}{dy},$$

$$- p \left(\frac{d.\Lambda am}{dx} + \Lambda \zeta' \right) - q \left(\frac{d.\Lambda \lambda am}{dx} + \Lambda \gamma' \right)$$

$$- r \left(\frac{d.\Lambda \mu am}{dx} + \Lambda \delta' \right) + \&c.$$

$$- \Lambda (\gamma'' p' + \delta'' q' + \&c. + \&c. + \varrho z)$$

$$+ \Delta \frac{d\tau_1}{dx} = \frac{dV}{dx}; \dots \dots \dots$$

d'où nous tirerons, en éliminant Δ , & faisant pour abrégé,

$$\frac{dV}{dy} - m \frac{dV}{dx} = (V) \left(\frac{d.\Lambda am}{dx} - m \frac{d.\Lambda \lambda am}{dx} - (\Lambda am), \&c. \right)$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \dots - p [(\Delta a m) - m \Delta \zeta] \\
 & - q [(\Delta \lambda a m) - m \Delta \gamma] \\
 & - r [(\Delta \mu a m) - m \Delta \delta] \\
 & - \&c. + m \Delta (\gamma'' p' + \delta'' q' \\
 & + \&c. + \&c. + \varrho z) = (V).
 \end{aligned}$$

(3.) Si la proposée a une intégrale de l'ordre immédiatement inférieur, j'entends par-là une équation linéaire de l'ordre $n - 1$, qui renferme une fonction arbitraire de x , on pourra supposer

$$\begin{aligned}
 V = & M p' + N q' + \&c. + M' p'' \\
 & + N' q'' + \&c. + \&c. + U z + \varphi;
 \end{aligned}$$

d'où l'on tirera

$$\begin{aligned}
 (V) = & (M) p' + M (p + m q) \\
 & + (N) q' + N (q + m r) + \&c. \\
 & + (M') p'' + M' (p' + m q'') \\
 & + (N') q'' + N' (q' + m r') + \&c. + \&c. \\
 & + (U) z + U [p^{(n-1)} + m q^{(n-1)}].
 \end{aligned}$$

Boutant, si l'on fait pour abréger,

$$\begin{aligned}
 (\Delta a m) - m \Delta \zeta &= \omega, (\Delta \lambda a m) - m \Delta \gamma = \pi, \\
 (\Delta \mu a m) - m \Delta \delta &= \varpi, \&c,
 \end{aligned}$$

l'équation (2) donnera

$$\begin{aligned}
 -\omega &= M, -\pi = N - m M, -\varpi = P - m M, \&c, \\
 m \Delta \gamma'' &= (M) + M', m \Delta \delta'' = (N) - m M + N', \&c, \\
 &\dots \dots \dots m \Delta \varrho = (U).
 \end{aligned}$$

La première série contient $n - 1$ équations, la seconde en contient $n - 2$, & ainsi de suite; le nombre de toutes les équations est la somme d'une progression arithmétique, dont le premier terme est 1, & le dernier $n - 1$, c'est

à-dire que ce nombre $= n \cdot \frac{n-1}{2}$: & comme il n'y a que $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ inconnues à déterminer, il reste $n-1$ équations de condition, qui doivent avoir lieu pour que la proposée ait une intégrale de l'ordre immédiatement inférieur, voici cette intégrale :

$$\begin{aligned} \Lambda am(p + \lambda q + \mu r + \&c.) + Mp' + Nq'' + \&c. \\ + M'p'' + N'q''' + \&c. + \&c. + Uz \\ + \phi : t + \theta : i = 0. \end{aligned}$$

Si la proposée étoit du second ordre, on auroit les trois équations

$$(\Lambda am) - m\Lambda G' + U = 0,$$

$$(\Lambda \gamma) + m\Lambda \gamma' + mU = 0,$$

$$m\Lambda g = (U),$$

dont la première donneroit U ; des deux autres, l'une serviroit à trouver le facteur Λ , & la seconde feroit l'équation de condition. Si l'équation du second ordre n'étoit autre que $\frac{d^2z}{dx^2} = X^2 \frac{d^2z}{dx^2}$, qui est celle des cordes vibrantes lorsque X ne renferme que x & des constantes, les trois équations deviendroient

$$(U) = 0,$$

$$\Lambda m \frac{dm}{dx} + 2U = 0,$$

$$2(\Lambda) - 3\Lambda \frac{dm}{dx} = 0:$$

on tireroit des deux premières $(\Lambda) \frac{d.m^2}{dx} = \Lambda m \frac{d^2.m^2}{dx^2}$; on auroit par conséquent

$$\frac{3}{4} \frac{d.m^2}{dx} = \frac{d^2.m^2}{dx^2} : \frac{d.m^2}{dx}, (m^2) - \frac{1}{2} d.m^2 = adx,$$

$$\& 16 m = (ax + b)^2,$$

Fff ij

a & b étant des constantes, c'est la valeur de X pour que l'équation des cordes vibrantes ait une intégrale de l'ordre immédiatement inférieur. Tout ce que contient ce numéro, s'accorde bien avec ce qui est démontré d'une autre manière, n.^{os} 84 & 85 de nos leçons de calcul différentiel & de calcul intégral.

(4.) Mais la proposée pourroit n'avoir pas d'intégrale de l'ordre immédiatement inférieur, & qu'il fût cependant possible d'en tirer la valeur complète de z , en donnant à z & V des formes très-générales, au moyen de coefficients indéterminés. La seule supposition de

$$V = Af:s1 + Bf':s1 + Cf'':s1 + \&c. + L,$$

$$z = Mf:s1 + Nf':s1 + Pf'':s1 + \&c. + W,$$

résoudroit un cas fort étendu: alors on mettroit ces valeurs dans les équations (1) & (2), & on auroit pour déterminer A, M, B, N , &c. des équations aux différences partielles de l'ordre $n - 1$, auxquelles il suffiroit de satisfaire. Si z & V devoient renfermer des termes où la fonction arbitraire fût embarrassée du signe intégral, tels que ceux-ci:

$$A \int B ds1f:s1, M \int N dt1 \int P ds1f:s1, \&c.$$

on les introduiroit; & ayant donné à z, V les valeurs les plus générales dont ils fussent susceptibles, les conditions qu'on trouveroit, indiqueroient les cas où l'intégrale complète seroit possible en termes finis. Cette méthode d'intégrer les équations linéaires aux différences partielles de tous les ordres, est simple & générale: il ne sera pas inutile de l'éclaircir par quelques exemples.

(5.) Lorsque la proposée est du second ordre, en faisant, pour abrégér, $\Lambda (\pi am + \omega \gamma) = \sigma$, on tire des équations (1) & (2),

$$\sigma p = \Lambda \gamma [\Lambda m g z - (V)] - \pi (\theta 1 + V),$$

$$\sigma q = \Lambda am [\Lambda m g z - (V)] + \omega (\theta 1 + V).$$

Je pourrois substituer ces valeurs dans $dz = p dy + q dx$; j'en tirerois z , pourvu que $m \varphi$ fût le facteur propre à rendre

intégrable $\frac{\gamma dy + \alpha m dx}{\gamma(\alpha m) - \alpha m(\gamma) - \alpha m^2 \gamma' - m \gamma \alpha'}$; l'autre con-

dition donneroit une équation aux différences partielles qu'il seroit nécessaire d'intégrer complètement, pour que la valeur de z renfermât deux fonctions arbitraires; mais ce cas particulier pourra se déduire aisément de la solution générale que nous avons indiquée.

(6.) Nous ferons d'abord

$$V = Af:s + Bf':s + Cf'':s + \dots$$

$$\dots + Kf^{n'}:s + L,$$

$$z = Mf:s + Nf':s + Pf'':s + \dots$$

$$\dots + Vf^{n'}:s + W,$$

ds étant la différentielle exacte qu'on trouve en cherchant le facteur propre à rendre intégrable $m'dy + dx$. Par ces substitutions, $\Delta m \varphi z - (V)$ devient

$$[\Delta M m \varphi - (A)]f:s$$

$$+ [\Delta N m \varphi - (B) - A(s)]f':s + \dots$$

$$\dots + [\Delta V m \varphi - (K) - I(s)]f^{n'}:s$$

$$- K(s)f^{(n+1)}:s + \Delta W m \varphi - (L);$$

on trouvera donc facilement les valeurs de p & q que donnent les formules du n° précédent. Mais on a aussi

$$p = \frac{dM}{dy}f:s + \left(\frac{dN}{dy} + M \frac{ds}{dy} \right) f':s + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{dU}{dy} + T \frac{ds}{dy} \right) f^{n'}:s$$

$$+ U \frac{ds}{dy} f^{(n+1)}:s + \frac{dW}{dy}.$$

$$q = \frac{dM}{dx} f:s + \left(\frac{dN}{dx} + M \frac{ds}{dx} \right) f^{\prime}:s + \dots$$

$$(\dots + \left(\frac{dU}{dx} + T \frac{ds}{dx} \right) f^n:s$$

$$+ U \frac{ds}{dx} f^{(n+1)}:s + \frac{dW}{dx}:$$

il ne s'agira donc que de déterminer les coefficients A, M, B, N , &c. au moyen des équations suivantes qui sont du premier ordre:

$$\Delta \gamma [\Delta M m \varphi - (A)] - \pi A = \sigma \frac{dM}{dy},$$

$$\Delta \alpha m [\Delta M m \varphi - (A)] + \omega A = \sigma \frac{dM}{dx},$$

$$\Delta \gamma [\Delta N m \varphi - (B) - A(s)] - \pi B = \sigma \left(\frac{dN}{dy} + M \frac{ds}{dy} \right),$$

$$\Delta \alpha m [\Delta N m \varphi - (B) - A(s)] + \omega B = \sigma \left(\frac{dN}{dx} + M \frac{ds}{dx} \right)$$

$$\dots$$

$$\Delta \gamma [\Delta U m \varphi - (K) - I(s)] - \pi K = \sigma \left(\frac{dU}{dy} + T \frac{ds}{dy} \right),$$

$$\Delta \alpha m [\Delta U m \varphi - (K) - I(s)] + \omega K = \sigma \left(\frac{dU}{dx} + T \frac{ds}{dx} \right),$$

$$\Delta \gamma [\Delta W m \varphi - (L)] - \pi (\theta_1 + L) = \sigma \frac{dW}{dy},$$

$$\Delta \alpha m [\Delta W m \varphi - (L)] + \omega (\theta_1 + L) = \sigma \frac{dW}{dx}.$$

On aura de plus les deux équations

$$\Delta K \gamma(s) = -\sigma U \frac{ds}{dy}, \quad \Delta K \alpha m(s) = -\sigma U \frac{ds}{dx}$$

qui, à cause de $\gamma = \alpha m m'$ toujours vraie par la propriété des équations du second degré, se réduisent à une seule qui renferme les conditions qui doivent avoir lieu pour que l'intégrale soit telle que nous l'avons supposée. Nous n'avons trouvé qu'une partie de la valeur de z , nous trouverons l'autre, en changeant dans la première, m en m' , s en t , & $f:s$ en $\varphi:t$.

(7.) Si l'équation du second ordre est celle des cordes vibrantes, $\frac{d^2 z}{ds^2} = X^2 \frac{d^2 z}{dx^2}$, on fera $A m = 1$,

$$m = -X, \quad m' = X,$$

$$y - \int \frac{dx}{X} = t, \quad y + \int \frac{dx}{X} = s;$$

partant $(s) = 2$. Alors en supposant que les coefficients sont tous fonctions de x seul, on aura à résoudre les équations

$$d \frac{A}{X} = 0, \quad dA = \frac{dX}{dx} dM,$$

$$d \frac{B}{X} = \frac{M dX - 2 A dx}{X^2},$$

$$dB + \frac{2 A dx}{X} = \frac{dX}{dx} \left(dN + \frac{M dx}{X} \right),$$

$$\dots\dots d \frac{K}{X} = \frac{T dX - 2 I dx}{X^2},$$

$$dK + \frac{2 I dx}{X} = \frac{dX}{dx} \left(dU + \frac{T dx}{X} \right),$$

$$2 K dx = U dX.$$

On en tire $A = aX$ & $M = ax + b$, a & b étant des constantes, ou bien $A = 0$ & $M = 1$; nous examinerons séparément ces deux cas, en supposant $X = (ax + b)^2$.

Dans le premier cas, on peut supposer

$$N = e(1) (ax + b)^{-2+2},$$

$$P = e(2) (ax + b)^{-2+3}, \text{ \&c.}$$

$$B = g(1) (ax + b),$$

$$C = g(2) (ax + b)^{-2+2}, \text{ \&c.}$$

$e(1)$, $g(1)$, &c. étant des constantes. Par ces substitutions, nos équations deviennent

$$g(1)(1 - \partial) + 2 = \partial,$$

$$g(1) + 2 = ae(1)(2 - \partial)\partial + \partial,$$

$$2ag(2)(1 - \partial) + 2g(1) = ae(1)\partial,$$

$$ag(2)(2 - \partial) + 2g(1) = a^2e(2)(3 - 2\partial)\partial + ae(1)\partial,$$

$$3ag(3)(1 - \partial) + 2g(2) = ae(2)\partial,$$

$$ag(3)(3 - 2\partial) + 2g(2) = a^2e(3)(4 - 3\partial)\partial + ae(2)\partial,$$

$$\dots\dots\dots 2g(n) = ae(n)\partial.$$

On en tire par l'élimination

$$g(1) = -\frac{2 - \partial}{1 - \partial}, e(1) = -\frac{1}{a(1 - \partial)},$$

$$g(2) = \frac{4 - 3\partial}{2a(1 - \partial)^2}, e(2) = \frac{4 - 3\partial}{2a^2(1 - \partial)^2(3 - 2\partial)},$$

$$g(3) = -\frac{(4 - 3\partial)(6 - 5\partial)}{2.3a^2(1 - \partial)^3(3 - 2\partial)},$$

$$e(3) = -\frac{6 - 5\partial}{2.3a^3(1 - \partial)^3(3 - 2\partial)}, \&c.$$

& que ∂ doit être une quantité de cette forme $\frac{2n}{2n-1}$,
 n étant un nombre entier positif.

Lorsque $A = 0$ & $M = 1$, on a $B = -1$,
 & on peut supposer

$$N = e(1)(ax + b) - \partial - 1,$$

$$P = e(2)(ax + b) - 2(\partial - 1), \&c.$$

$$C = g(2)(ax + b) - \partial + 1, \&c.$$

ce qui change nos équations en celles-ci :

$$ae(1)(1 - \partial) + 1 = 0,$$

$$ag(2)(1 - 2\partial) - 2 = ae(1)\partial,$$

$$ag(2)(1 - \partial) - 2 = 2a^2e(2)(1 - \partial)\partial + ae(1)\partial,$$

$$ag(3)(2 - 3\partial) + 2g(2) = ae(2)\partial,$$

$$2ag(3)(1 - \partial) + 2g(2) = 3a^2e(3)(1 - \partial)\partial + ae(2)\partial,$$

$$ag(4)(3 - 4\partial) + 2g(3) = ae(3)\partial,$$

$$3ag(4)(1 - \partial) + 2g(3) = 4a^2e(4)(1 - \partial)\partial + ae(3)\partial,$$

$$\dots\dots\dots 2g(n) = ae(n)\partial.$$

Il est facile d'en tirer

$$e(1) = - \frac{1}{a(1 - \partial)},$$

$$g(2) = \frac{2 - 3\partial}{a(1 - \partial)(1 - 2\partial)},$$

$$e(2) = \frac{2 - 3\partial}{2a^2(1 - \partial)^2(1 - 2\partial)},$$

$$g(3) = - \frac{4 - 5\partial}{2a^2(1 - \partial)^2(1 - 2\partial)},$$

$$e(3) = - \frac{4 - 5\partial}{2.3a^3(1 - \partial)^3(1 - 2\partial)}, \text{ \&c.}$$

& que ∂ doit être une quantité telle que $\frac{2n}{2n+1}$, où n est un nombre entier positif. Il suit de ce qui précède que si X est

une quantité de cette forme $(ax + b) \frac{2n}{2n+1}$, l'équation des cordes vibrantes a pour intégrale finie complète,

$$z = M(f:s + \phi:t) + N(f':s + \phi':t) + \dots\dots\dots + U(f^{n1}:s + \phi^{n1}:t).$$

(8.) Si z devoit renfermer des termes où la fonction

Mém. 1784.

Ggg

arbitraire fût embarrassée du signe intégral; s'il devoit renfermer le terme $R \int S d s f: s$, on représenteroit par $G \int H d s f: s$ celui qui devoit entrer dans V . Partant, soit

$$V = G \int H d s f: s + A f: s + B f': s + \&c.$$

$$\frac{dV}{ds} = \frac{dG}{ds} \int H d s f: s + A_1 f: s + B_1 f': s + \&c.$$

$$z = R \int S d s f: s + M f: s + N f': s + \&c.$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dR}{ds} \int S d s f: s + M_1 f: s + N_1 f': s + \&c.$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dR}{ds} \int S d s f: s + R \int \frac{dS}{ds} d s f: s + M_2 f: s + N_2 f': s + \&c.$$

à cause de $(V) = \frac{dV}{ds} (s)$, les équations du n.^o 5, donneront

$$\sigma p = m \gamma \varrho \Lambda^2 R \int S d s f: s$$

$$- (\pi G + \Lambda \gamma (s) \frac{dG}{ds}) \int H d s f: s + A_2 f: s + B_2 f': s + \&c.$$

$$\sigma q = m^2 a \varrho \Lambda^2 R \int S d s f: s$$

$$+ (\pi G - \Lambda a m (s) \frac{dG}{ds}) \int H d s f: s + A_3 f: s + B_3 f': s + \&c.$$

mais on a aussi

$$p = \frac{dR}{ds} \int S d s f: s + \frac{d_1}{ds} R \int \frac{dS}{ds} d s f: s + M_3 f: s + N_3 f': s + \&c.$$

$$q = \frac{dR}{ds} \int S d s f: s + \frac{d_1}{ds} R \int \frac{dS}{ds} d s f: s + M_4 f: s + N_4 f': s + \&c.$$

Il sera donc facile de former ces deux équations

$$R_1 \int S d s f: s - \frac{d_1}{ds} \sigma R \int \frac{dS}{ds} d s f: s - G_1 \int H d s f: s = A_5 f: s + \&c.$$

$$R_2 \int S dsf:s - \frac{dt}{ds} \sigma R \int \frac{dS}{dt} dsf:s + G_2 \int H dsf:s \\ = M_5 f:s + \&c.$$

dans lesquelles on a fait, pour abrégér,

$$\pi G + \Lambda \gamma(s) \frac{dG}{ds} = G_1,$$

$$m \gamma \varrho \Lambda^2 R - \sigma \frac{dR}{dy} = R_1,$$

$$\alpha G - \Lambda \alpha m(s) \frac{dG}{ds} = G_2,$$

$$m^2 \alpha \varrho \Lambda^2 R - \sigma \frac{dR}{ds} = R_2.$$

(9.) On en tirera, en éliminant $\int H dsf:s$, & faisant, pour abrégér,

$$\frac{R_1 G_2 + R_2 G_1}{\sigma R (G_2 \frac{dt}{dy} + G_1 \frac{dt}{ds})} = \gamma_1,$$

$$\gamma_1 \int S dsf:s - \int \frac{dS}{dt} dsf:s = M_6 f:s + \&c.$$

Au moyen de celle-ci, on aura $\int S dsf:s$ en quantités débarrassées du signe intégral, à moins que $\frac{d\gamma_1}{ds}$ ne soit nul; donc γ_1 ne doit pas renfermer s . On le fera passer sous le signe intégral, & l'équation précédente deviendra

$$\int (\gamma_1 S - \frac{dS}{dt}) dsf:s = M_6 f:s + \&c:$$

or $e^{-\int \gamma_1 dt} (\gamma_1 S - \frac{dS}{dt})$ est la différentielle de $-S e^{-\int \gamma_1 dt}$ prise par rapport à t & divisée par dt ; ayant donc multiplié les deux membres de la dernière équation par $e^{-\int \gamma_1 dt}$, on l'intégrera, & on aura

$$e^{-\int \gamma_1 dt} \int S dsf:s = \int e^{-\int \gamma_1 dt} M_6 dt.f:s + \&c.$$

Celle-ci donnera $\int S dsf:s$ en quantités délivrées du signe
G g g ij

intégral, toutes les fois que $G_2 \frac{d^1}{dy} + G_1 \frac{d^1}{dz}$ ne sera pas nul; & lorsqu'il sera nul, on aura une équation de cette forme,

$$(R_1 G_2 + R_2 G_1) \int S ds f : s = A 6 f : s + \&c.$$

qui donnera $\int S ds f : s$ en quantités délivrées du signe intégral, à moins que $R_1 G_2 + R_2 G_1$ ne soit nul aussi : il est donc nécessaire de former ces deux équations

$$G_2 m + G_1 = 0, R_1 G_2 + R_2 G_1 = 0,$$

desquelles on tire $R_1 - m R_2 = 0$.

Cette dernière équation sera facilement changée en celle-ci,

$$\frac{1}{R} \frac{dR}{ds} = (\tau) \dots \dots \frac{z - \alpha m^2}{\sigma(s)} m \varphi \Lambda^2,$$

qui, étant intégrée, donne $R = e^{\int \tau ds} \varphi : t$.

Il suit de-là, que quand l'intégrale doit contenir le terme $R \int S ds f : s$, la partie de la valeur de z , dont il s'agit, renferme une fonction arbitraire de t , outre celle de s , & que par conséquent elle peut être prise pour l'intégrale complète. On parviendroit au même résultat, quel que fût le nombre des termes affectés du signe intégral & le nombre de ces signes dans chaque terme; donc, si l'intégrale complète est possible, en termes finis, on doit la trouver délivrée du signe intégral relativement à l'une ou à l'autre des fonctions arbitraires. M. de la Place a, le premier, fait cette remarque importante, dans les Mémoires de l'Académie, pour l'année 1773.

(10.) Nous prendrons, pour second exemple, les équations aux différences partielles du troisième ordre, par rapport auxquelles les équations (1) & (2) deviennent

$$\Lambda \alpha m (p + \lambda q + \mu r) + V + \theta 1 = 0, \\ - \omega p - \pi q - \varpi r + \Lambda m (\gamma'' p' + \delta'' q' + \varrho z) = (V).$$

Ayant fait, pour abrégé,

$$\frac{dN}{dy} + M \frac{ds}{dy} = N_1, \frac{dP}{dy} + N \frac{ds}{dy} = P_1, \&c.$$

$$\frac{dN}{dx} + M \frac{ds}{dx} = N_2, \frac{dP}{dx} + N \frac{ds}{dx} = P_2, \&c.$$

$$\frac{dN_1}{dy} + \frac{dM}{dy} \frac{ds}{dy} = N_3, \frac{dP_1}{dy} + N_1 \frac{ds}{dy} = P_3, \&c.$$

$$\frac{dN_1}{dx} + \frac{dM}{dy} \frac{ds}{dx} = N_4, \frac{dP_1}{dx} + N_1 \frac{ds}{dx} = P_4, \&c.$$

$$\frac{dN_2}{dx} + \frac{dM}{dx} \frac{ds}{dx} = N_5, \frac{dP_2}{dx} + N_2 \frac{ds}{dx} = P_5, \&c.$$

$$\text{de } z = Mf:s + Nf':s + Pf'':s + \dots + Uf^{n+1}:s + W,$$

on tire

$$p = \frac{dM}{dy} f:s + N_1 f':s + \dots + U_1 f^{n+1}:s \\ + U \frac{ds}{dy} f^{(n+1)}:s + \frac{dW}{dy},$$

$$q = \frac{dM}{dx} f:s + N_2 f':s + \dots + U_2 f^{n+1}:s \\ + U \frac{ds}{dx} f^{(n+1)}:s + \frac{dW}{dx},$$

$$p = \frac{dM}{dy} f:s + N_3 f':s + \dots + U_3 f^{n+1}:s \\ + \left(\frac{ds}{dy} U_1 + \frac{dU}{dy} \frac{ds}{dy} \right) f^{(n+1)}:s \\ + U \left(\frac{ds}{dy} \right)^2 f^{(n+2)}:s + \frac{d^2 W}{dy^2},$$

$$q = \frac{dM}{dy dx} f:s + N_4 f':s + \dots + U_4 f^{n+1}:s \\ + \left(\frac{ds}{dx} U_1 + \frac{dU}{dx} \frac{ds}{dy} \right) f^{(n+1)}:s \\ + U \frac{ds}{dy} \frac{ds}{dx} f^{(n+2)}:s + \frac{d^2 W}{dy dx},$$

$$r = \frac{d^2 M}{dx^2} f:s + N_5 f':s + \dots + U_5 f^{n+1}:s \\ + \left(\frac{ds}{dx} U_2 + \frac{dU}{dx} \frac{ds}{dx} \right) f^{(n+1):s} \\ + U \left(\frac{ds}{dx} \right)^2 f^{(n+2):s} + \frac{d^2 W}{dx^2} :$$

(11.) Nous ferons

$$V = A f:s + B f':s + C f'':s \\ + \dots + K f^{n+1}:s + L f^{(n+2):s} + \Gamma;$$

c'est-à-dire, que nous lui donnerons un terme de plus qu'à z ; nous lui en donnerions deux, si l'équation étoit du quatrième ordre, & ainsi de suite : partant

$$(V) = (A) f:s + [(B) + A(s)] f':s \\ + \dots + [(K) + L(s)] f^{n+1}:s \\ + [(L) + K(s)] f^{(n+2):s} \\ + L(s) f^{(n+3):s} + (\Gamma).$$

On aura donc, pour déterminer $A, M, B, N, \dots, K, U, \Gamma, W$, les équations du second ordre

$$\Lambda \alpha m \left(\frac{d^2 M}{dy^2} + \lambda \frac{d^2 M}{dy dx} + \mu \frac{d^2 M}{dx^2} \right) + A = 0,$$

$$\omega \frac{d^2 M}{dy^2} + \pi \frac{d^2 M}{dy dx} + \varpi \frac{d^2 M}{dx^2} \\ - \Lambda m \left(\gamma'' \frac{dM}{dy} + \delta'' \frac{dM}{dx} + \vartheta M \right) + (A) = 0,$$

$$\Lambda \alpha m (N_3 + \lambda N_4 + \mu N_5) + B = 0, \\ \omega N_3 + \pi N_4 + \varpi N_5 - \Lambda m (\gamma'' N_1 + \delta'' N_2 + \vartheta N) \\ + (B) + A(s) = 0,$$

.....

$$\Lambda \alpha m (U_3 + \lambda U_4 + \mu U_5) + K = 0,$$

$$\omega U_3 + \pi U_4 + \varpi U_5 - \Lambda m (\gamma'' U_1 + \delta'' U_2 + \vartheta U) + (K) + I(s) = 0,$$

$$\Lambda am \left(\frac{d^2 w}{dy^2} + \lambda \frac{d^2 w}{dy dx} + \mu \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \Gamma + \theta I = 0,$$

$$\omega \frac{d^2 w}{dy^2} + \pi \frac{d^2 w}{dy dx} + \varpi \frac{d^2 w}{dx^2} - \Lambda m \left(\gamma'' \frac{dw}{dy} + \delta'' \frac{dw}{dx} + \vartheta w \right) + (\Gamma) = 0.$$

On aura de plus ces quatre équations

$$\Lambda am \left[\frac{ds}{dy} U_1 + \frac{d.U \frac{ds}{dy}}{dy} + \lambda \left(\frac{ds}{dx} U_1 + \frac{d.U \frac{ds}{dy}}{dx} \right) + \mu \left(\frac{ds}{dx} U_2 + \frac{d.U \frac{ds}{dx}}{dx} \right) \right] + L = 0,$$

$$\omega \left(\frac{ds}{dy} U_1 + \frac{d.U \frac{ds}{dy}}{dy} \right) + \pi \left(\frac{ds}{dx} U_1 + \frac{d.U \frac{ds}{dy}}{dx} \right) + \varpi \left(\frac{ds}{dx} U_2 + \frac{d.U \frac{ds}{dx}}{dx} \right) - \Lambda m \left(\gamma'' \frac{ds}{dx} + \delta'' \frac{ds}{dx} \right) U + (L) + K(s) = 0,$$

$$\left(\frac{ds}{dy} \right)^2 + \lambda \frac{ds}{dy} \frac{ds}{dx} + \mu \left(\frac{ds}{dx} \right)^2 = 0,$$

$$\omega \left(\frac{ds}{dy} \right)^2 + \pi \frac{ds}{dy} \frac{ds}{dx} + \varpi \left(\frac{ds}{dx} \right)^2 + L(s) = 0,$$

dont la troisième, qui n'est autre que

$$a(mm')^2 - \gamma mm' - \delta(m + m') = 0,$$

est toujours vraie par la nature de l'équation du troisième degré, dont m & m' sont deux racines; il n'y a donc effectivement que deux équations de condition, pour que les suppositions que nous avons faites puissent avoir lieu.

(12.) Si l'équation du troisième ordre étoit

$$\frac{d^3 z}{dx^3} + a \frac{d^2 z}{dx^2 dy} + b \frac{d^2 z}{dx dy^2} + c \frac{d^2 z}{dy^2} \\ + \frac{1}{x} \left(a' \frac{d^2 z}{dx^2} + b' \frac{d^2 z}{dx dy} + c' \frac{d^2 z}{dy^2} \right) + \frac{1}{x^2} \left(e \frac{dz}{dx} \right. \\ \left. + f \frac{dz}{dy} \right) + \frac{g}{x^3} = 0,$$

où $a, b, c, a', b', c', e, f, g$ sont des constantes & $x = hx + iy, h, i$ étant aussi constants; on auroit m, m', m'' constants, $t = my + x, s = m'y + x, r = m''y + x, (s) = m' - m$.

Ayant fait $\Lambda = -1$, on supposeroit

$$M = e(1)u^2, N = e(2)u^{2+1} \dots U = e(n+1)u^{2+n}, \\ A = g(1)u^{2-1}, B = g(2)u^{2-1} \dots K = g(n+1)u^{2+n-1}, \\ L = g(n+2)u^{2+n-1};$$

& par ces substitutions, les équations qu'il s'agiroit de résoudre deviendroient

$$cm\partial.(\partial - 1)(i^2 + \lambda ih + \mu h^2)e(1) = g(1), \\ [m\partial.(\partial - 1)(c'i^2 + b'ih + a'h^2) + m\partial(fi + eh) \\ + mg]e(1) = (hm - i)(\partial - 2)g(1), \\ (i^2 + \lambda ih + \mu h^2)(\partial + 1)\partial e(2) + [(2i + \lambda h).m' \\ + \lambda i + 2\mu h]\partial e(1) = \frac{g(2)}{cm}.$$

$$[(c'i^2 + b'ih + a'h^2)(\partial + 1)\partial + (fi + eh)(\partial + 1) + g]e(2) \\ + \{[2(c'i + b'h).m' + b'i + 2a'h]\partial + fm' + e\}e(1) \\ = \frac{hm - i}{m}(\partial - 1)g(2) + \frac{m - m'}{m}g(1).$$

$$(i^2 + \lambda ih + \mu h^2)(\partial + 1)(\partial + 2)e(3) + [(2i + \lambda h).m'' \\ + \lambda i + 2\mu h](\partial + 1)e(2) + (m'' + \lambda m' + \mu)e(1) = \frac{g(3)}{cm},$$

$$\begin{aligned}
 & [(c'i^2 + b'ih + a'h^2)(\partial + 1)(\partial + 2) + (fi + eh)(\partial + 2) \\
 & + g]e(3) + \{[(2c'i + b'h).m' + b'i + 2a'h](\partial + 1) \\
 & + fm' + e\}e(2) + (c'm'^2 + b'm' + a')e(1) \\
 & = \frac{hm-i}{m} \partial g(3) + \frac{m-m'}{m} g(2),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (i^2 + \lambda ih + \mu h^2)(\partial + 2)(\partial + 3)e(4) + [(2i + \lambda h).m' \\
 & + \lambda i + 2\mu h](\partial + 2)e(3) + (m'^2 + \lambda m' + \mu)e(2) = \frac{g(4)}{me}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [(c'i^2 + b'ih + a'h^2)(\partial + 2)(\partial + 3) + (fi + eh)(\partial + 3) \\
 & + g]e(4) + \{[(2c'i + b'h).m' + b'i + 2a'h](\partial + 2) \\
 & + fm' + e\}e(3) + (c'm'^2 + b'm' + a')e(2) \\
 & = \frac{hm-i}{m} (\partial + 1)g(4) + \frac{m-m'}{m} g(3), \&c.
 \end{aligned}$$

dont les deux premières donneront $\frac{e(1)}{g(1)}$ & ∂ par une équation du troisième degré; les autres serviront à trouver $e(2)$, $g(2)$, &c. Quant aux conditions d'intégrabilité, elles seront renfermées dans celles-ci

$$\begin{aligned}
 & [(2i + \lambda h).m' + \lambda i + 2\mu h](\partial + n)e(n+1) \\
 & + (m'^2 + \lambda m' + \mu)e(n) = \frac{c'm'^2 + b'm' + a'}{c(m-m')}, \\
 & \{[(2c'i + b'h).m' + b'i + 2a'h](\partial + n) + fm' \\
 & + e\}e(n+1) + (c'm'^2 + b'm' + a')[e(n) \\
 & - \frac{hm-i}{m-m'}(\partial + n-1)] = \frac{m-m'}{m} g(n+1).
 \end{aligned}$$

(13.) Il nous reste à discuter le cas où z pourroit renfermer des termes dans lesquels la fonction arbitraire seroit embarrassée du signe intégral. Si, par exemple,

$$z = RfSdsf:s + Mf:s + \&c.$$

Mém. 1784.

Hhh

on aura

$$p' = \frac{dR}{dy} \int S dsf:s + \frac{dt}{dy} R \int \frac{dS}{dt} dsf:s + M_3 f:s + \&c.$$

$$q' = \frac{dR}{dx} \int S dsf:s + \frac{dt}{dx} R \int \frac{dS}{dt} dsf:s + M_4 f:s + \&c.$$

$$p = \frac{d^2 R}{dy^2} \int S dsf:s + (2 \frac{dR}{dy} \frac{dt}{dy} + R \frac{d^2 t}{dy^2}) \int \frac{dS}{dt} dsf:s \\ + R (\frac{dt}{dy})^2 \int \frac{d^2 S}{dt^2} dsf:s + m_1 f:s + \&c.$$

$$q = \frac{d^2 R}{dy dx} \int S dsf:s + (\frac{dR}{dy} \frac{dt}{dx} + \frac{dR}{dx} \frac{dt}{dy} + R \frac{d^2 t}{dy dx}) \int \frac{dS}{dt} dsf:s \\ + R \frac{dt}{dy} \frac{dt}{dx} \int \frac{d^2 S}{dt^2} dsf:s + m_2 f:s + \&c.$$

$$r = \frac{d^2 R}{dx^2} \int S dsf:s + (2 \frac{dR}{dx} \frac{dt}{dx} + R \frac{d^2 t}{dx^2}) \int \frac{dS}{dt} dsf:s \\ + R (\frac{dt}{dx})^2 \int \frac{d^2 S}{dt^2} dsf:s + m_3 f:s + \&c;$$

& faisant, pour abréger,

$$\frac{d^2 R}{dy^2} + \lambda \frac{d^2 R}{dy dx} + \mu \frac{d^2 R}{dx^2} = R_1,$$

$$2 \frac{dR}{dy} \frac{dt}{dy} + R \frac{d^2 t}{dy^2} + \lambda (\frac{dR}{dy} \frac{dt}{dx} + \frac{dR}{dx} \frac{dt}{dy} + R \frac{d^2 t}{dy dx}) + \mu (2 \frac{dR}{dx} \frac{dt}{dx} + R \frac{d^2 t}{dx^2}) = S_1,$$

$$(\frac{dt}{dy})^2 + \lambda \frac{dt}{dy} \frac{dt}{dx} + \mu (\frac{dt}{dx})^2 = T_1,$$

$$\bullet \frac{d^2 R}{dy^2} + \pi \frac{d^2 R}{dy dx} + \varpi \frac{d^2 R}{dx^2} - m \Lambda (\gamma'' \frac{dR}{dy} \\ + \delta'' \frac{dR}{dx} + \vartheta R) = R_2,$$

$$\bullet (2 \frac{dR}{dy} \frac{dt}{dy} + R \frac{d^2 t}{dy^2}) + \pi (\frac{dR}{dy} \frac{dt}{dx} + \frac{dR}{dx} \frac{dt}{dy} + R \frac{d^2 t}{dy dx}) \\ + \varpi (\frac{dR}{dx} \frac{dt}{dx} + R \frac{d^2 t}{dx^2}) - m \Lambda (\gamma'' \frac{d^2 t}{dy^2} + \delta'' \frac{d^2 t}{dx^2}) R = S_2,$$

$$\omega \left(\frac{dt}{dy} \right)^2 + \pi \frac{dt}{dy} \frac{dt}{dx} + \pi \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 = T_2,$$

les deux équations

$$\begin{aligned} \Delta am (R_1 \int S dsf:s + S_1 \int \frac{dS}{dt} dsf:s + RT_1 \int \frac{d^2 S}{dt^2} dsf:s) \\ + G \int H dsf:s = m_4 f:s + \&c. \\ R_2 \int S dsf:s + S_2 \int \frac{dS}{dt} dsf:s + RT_2 \int \frac{d^2 S}{dt^2} dsf:s \\ + \frac{dG}{ds}(s) \int H dsf:s = m_5 f:s + \&c. \end{aligned}$$

desquelles on tirera, en éliminant $\int H dsf:s$ & faisant,

$$\text{pour abréger, } \frac{\Delta am(s)}{G} \frac{dG}{ds} = b,$$

$$\begin{aligned} (bR_1 - R_2) \int S dsf:s + (bS_1 - S_2) \int \frac{dS}{dt} dsf:s \\ + (bT_1 - T_2) R \int \frac{d^2 S}{dt^2} dsf:s = m_6 f:s + \&c. \end{aligned}$$

(14.) Si $bT_1 - T_2$ n'est pas nul, en faisant pour abréger,

$$\frac{bR_1 - R_2}{R(bT_1 - T_2)} = V_1, \quad \frac{bS_1 - S_2}{R(bT_1 - T_2)} = V_2;$$

on aura

$$\begin{aligned} V_1 \int S dsf:s + V_2 \int \frac{dS}{dt} dsf:s + \int \frac{d^2 S}{dt^2} dsf:s \\ = m_7 f:s + \&c. \end{aligned}$$

& différenciant par rapport à s ,

$$\frac{dV_1}{ds} \int S dsf:s + \frac{dV_2}{ds} \int \frac{dS}{dt} dsf:s = m_8 f:s + \&c.$$

Si $\frac{dV_2}{ds}$ n'est pas nul, on tirera de celle-ci $\int S dsf:s$ en

quantités délivrées du signe intégral, à moins que $\frac{dV_1}{ds} : \frac{dV_2}{ds}$,

que nous ferons $= \sigma$, ne renferme point s . On mettra σ sous le signe, & ayant intégré par rapport à t , on aura

H h h ij

$\int S ds f:s$ en quantités délivrées du signe intégral; ce qui ne pouvant être par l'hypothèse, il faut nécessairement que

$\frac{dV_2}{ds}$ soit nul. Mais l'équation qui précède donnera le

même résultat, à moins que $\frac{dV_1}{ds}$ ne soit nul: donc V_1

& V_2 ne doivent pas renfermer s , & on pourra les faire passer sous le signe, d'où resultera cette équation,

$$\int \left(\frac{d^2 S}{dt^2} + V_2 \frac{dS}{dt} + V_1 S \right) ds f:s = m \gamma f:s + \&c.$$

Or θ étant donné par

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} - \frac{dV_2 \theta}{dt} + V_1 \theta = 0,$$

on a, pour l'intégrale de

$$\left(\frac{d^2 S}{dt^2} + V_2 \frac{dS}{dt} + V_1 S \right) \theta dt,$$

la quantité suivante:

$$\theta \frac{dS}{dt} + (V_2 \theta - \frac{d\theta}{dt}) S;$$

donc l'équation dont il s'agit deviendra

$$\int \left[\theta \frac{dS}{dt} + (V_2 \theta - \frac{d\theta}{dt}) S \right] ds f:s = \int m \gamma dt f:s + \&c.$$

qui, étant intégrée une seconde fois par rapport à t , donnera $\int S ds f:s$ en quantités délivrées du signe intégral: donc $bT_1 - T_2$ doit être nul; & comme on démontrera, de la même manière, que $bS_1 - S_2$, $bR_1 - R_2$ doivent être nuls aussi, on aura trois équations que nous pourrons écrire comme il suit:

$$bT_1 - T_2 = 0, \quad bR_1 - R_2 = 0, \quad b(S_1 + tR_1) - S_2 - tR_2 = 0.$$

(15.) Ces équations, ou celles-ci,

$$(b - \omega)m^2 + (b\lambda - \pi)m + b\mu - \pi = 0,$$

$$\begin{aligned}
& (b - \omega) \frac{d^2 R}{dy^2} + (b\lambda - \pi) \frac{d^2 R}{dy dx} + (b\mu - \varpi) \frac{d^2 R}{dx^2} \\
& + m\Lambda \left(\gamma^2 \frac{dR}{dy} + \delta^2 \frac{dR}{dx} + \vartheta R \right) = 0, \\
& (b - \omega) \frac{d^2 \cdot R t}{dy^2} + (b\lambda - \pi) \frac{d^2 \cdot R t}{dy dx} + (b\mu - \varpi) \frac{d^2 \cdot R t}{dx^2} \\
& + m\Lambda \left(\gamma^2 \frac{d \cdot R t}{dy} + \delta^2 \frac{d \cdot R t}{dx} + \vartheta R t \right) = 0,
\end{aligned}$$

font voir que quelle que soit la valeur de R qui doit satisfaire aux conditions qu'elles renferment, si on la représente par u , $R = u \varphi : t$ y satisfera aussi. Il est donc clair que si l'intégrale complète est possible en termes finis, on l'aura toujours délivrée du signe intégral, relativement à deux des trois fonctions arbitraires qu'elle doit renfermer; il n'est pas moins clair qu'on ne peut pas la supposer absolument délivrée de ce signe, sans diminuer la généralité des suppositions. Généralement si l'intégrale complète d'une équation linéaire de l'ordre n est possible en termes finis, on l'aura toujours délivrée du signe intégral, relativement à $n - 1$ des fonctions arbitraires qu'elle doit renfermer; mais on ne pourra pas la supposer absolument délivrée de ce signe, sans diminuer la généralité de la solution.



M É M O I R E

SUR L'ILE DE FRISLANDE.

Par M. BUACHE.

La
le 9 Juillet
1785.

JE me propose de démontrer , dans ce Mémoire , l'existence & la véritable position d'une îlle que la géographie moderne a réformée & exclue des Cartes , après l'y avoir admise pendant près de trois cents ans , & l'y avoir même représentée avec des détails assez considérables.

On a eu connoissance de l'île de Frislande , vers la fin du quatorzième siècle , par les lettres & mémoires de deux frères Vénitiens , de la famille des Zeni , qu'on dit avoir abordé dans cette îlle , & y avoir été retenus par un Prince du pays. Nous avons , dans la collection de Ramusio , au *tome II* , une relation abrégée de leurs voyages & de leurs découvertes , tirée de leurs lettres & mémoires , & publiée par un de leurs descendants. Nous avons aussi , dans une édition italienne de Ptolémée , publiée par Girolamo Ruscelli (*Venise , 1561 , in 4.^o*) , la copie d'une carte originale de ces mêmes voyages & découvertes , qui fut trouvée parmi les lettres des deux frères Zeni , & mise au jour en même temps que la relation de leurs expéditions , pour en faciliter l'intelligence.

Si l'île de Frislande n'existoit pas , comme l'a prétendu Laët , dans son *Traité de l'origine des Américains* , & comme on pourroit être tenté de le croire , après la réforme qui en a été faite par les derniers Géographes , les voyages des Zeni seroient une pure fiction ; leur relation ne pourroit être regardée que comme un roman , ainsi que la carte qui l'accompagne ; & on ne pourroit en tirer aucun fruit , ni même les citer dans une discussion sérieuse. D'un autre côté , si les voyages des Zeni étoient

véritables & leur relation authentique , comme l'ont prétendu plusieurs savans d'Italie plus à portée que Laët d'être instruits sur ce point, l'île de Frislande auroit existé réellement ; elle existeroit même encore , du moins en partie , puisqu'aucune histoire ne parle de révolution qui ait pu l'anéantir ; & il y auroit lieu de croire qu'on pourroit en trouver quelques vestiges. Ce sont ces considérations qui m'ont engagé dans les recherches que je vais soumettre au jugement de l'Académie. Je desirois sur-tout pouvoir rendre utiles la relation & la carte des Zeni, qui me paroissoient devoir répandre quelque jour sur l'histoire des découvertes & de la population.

On voit l'île de Frislande sur des cartes manuscrites de Texeira , sur les cartes gravées de Mercator , Blaeu , Dudley , Bertius , Coronelli & autres principaux Géographes des deux derniers siècles : elle y est placée dans le sud-ouest de l'Islande , assez près du Groenland , & représentée sur toutes comme une terre bien connue & d'une étendue considérable. M. Delisle la marquoit encore en 1714 & 1720 sur ses Hémisphères , mais figurée comme une terre peu connue & dont on n'a qu'une idée vague ; il la nomme *Frislande* dans son Hémisphère septentrional de 1714 , & *Terre de Bus* , ci-devant *Frislande* , dans son Hémisphère occidental de 1720. M. Danville , n'admettant dans ses cartes que des connoissances certaines , en a exclu l'île de Bus & toute idée de Frislande. Enfin , dans une carte réduite des *Mers du nord* , publiée par M. de Verdun , de Borda & Pingré , en 1776 , & à la suite d'un voyage qui a rectifié nos connoissances sur toutes les parties du globe que ces savans ont parcourues , on ne voit aucune trace de Frislande ; & l'île de *Bus* n'y est marquée que comme très-douteuse , & seulement sur l'autorité des cartes de Vankeulen , qui ne la figurent elles-mêmes que comme une terre peu connue.

Il y a , à la vérité , sur ces cartes de Vankeulen , une légende concernant cette terre , & qui dit : *Cette Terre*

a été submergée, & n'a plus aujourd'hui qu'un quart de lieue de circuit, lorsque la mer est grosse; c'étoit, il y a bien des années, une grande île nommée *Frislande*, qui avoit bien 100 milles de circuit, & sur laquelle il y avoit plusieurs villages: mais cette légende n'est elle-même fondée que sur une conjecture mise en avant par quelques historiens, dans la vue d'expliquer pourquoi l'île de *Frislande* ne se retrouvoit pas. On avoit cru de même, pendant un temps, que le Groenland avoit été englouti, parce qu'on ne le retrouvoit pas.

À l'occasion de cette légende, qui n'a point échappé aux recherches de M.^r de Verdun, de Borda & Pingré, ces savans nous exposent, dans la relation de leur voyage, leur opinion sur l'île de *Frislande* & sur la terre de *Bus*. Il est dit, au tome II de cette relation, page 359: « Cette » île de *Frislande* est réellement représentée comme une » grande île, sur plusieurs cartes de l'Atlas de Mercator, » de l'*Arcano del Mare*, &c. & cela avec des détails » de villes, de villages, &c. qui persuaderoient presque » que cette île a autrefois existé: nous sommes fort éloignés » de le croire; mais que cette île ait existé ou non, il » est au moins certain qu'elle n'existe plus. Nous avons » traversé le lieu où elle est placée, sur plusieurs cartes de » l'*Arcano del Mare* & de Mercator, & nous n'en avons » pas aperçu le plus léger vestige: mais existe-t-il au » moins, sous le nom de *Bus*, une petite partie de cette » île, nous en doutons, parce que nous ne voyons pas » que l'existence de cette île *Bus* soit suffisamment constatée ». Telle est l'opinion que des Savans, à qui la Géographie a tant d'obligations, ont pu se former de l'île de *Frislande*; & on doit la considérer comme le résultat de l'état actuel de nos connoissances sur ce point.

C'est aussi l'opinion qui avoit été le plus généralement adoptée auparavant, à en juger par le titre d'une carte particulière de *Frislande*, publiée par le P. Coronelli, géographe de la république de Venise. Ce titre est:
Frislanda

Frislanda scoperta da Nicolo Zeno, patricio Veneto, creduta favolosa, o nel mare sommersa. Coronelli assure, d'un autre côté, dans son *Isolario*, que l'on regarde à Venise l'histoire de la découverte des Zeni comme une histoire vraie & authentique. En donnant à sa carte de Frislande le titre que l'on vient de voir, il aura sans doute voulu se conformer à l'idée qu'on en avoit ailleurs, & qui étoit plus généralement reçue.

La plupart des auteurs ont regardé en effet l'île de Frislande comme une terre fabuleuse, parce que, depuis le temps de sa découverte, elle n'a été retrouvée par aucun des navigateurs qui ont parcouru les mers du nord; parce qu'il n'en est pas fait la moindre mention dans les Histoires connues, même dans celle des Souverains à qui on en attribuoit la possession; & parce que la seule relation qui l'a fait connoître, contient quelques détails qui paroissent peu vraisemblables. Quelques savans, qui ont considéré avec plus d'attention la relation & les Cartes de cette découverte, n'ont pu se persuader qu'une île, représentée avec des détails considérables & des noms étrangers à la langue des navigateurs qui en parlent, ne dût être considérée que comme une fiction: ils n'ont pu croire non plus que des personnes de la première qualité, telles qu'étoient les Zeni à Venise, n'eussent publié qu'un roman, dans une relation qu'ils donnoient comme véritable, & eussent voulu en imposer aussi grossièrement au public. Ils ont mieux aimé supposer que l'île de Frislande, qu'on ne retrouvoit pas, auroit été submergée ou engloutie dans la mer, depuis l'époque de sa découverte.

Il y a une troisième opinion, suivant laquelle la terre de Frislande ne seroit autre chose que la partie occidentale de l'Islande; mais cette opinion n'a servi qu'à fortifier les doutes que l'on avoit sur l'existence de cette terre, & je ne la cite ici que pour indiquer l'ouvrage dans lequel elle est développée, & qui contient d'ailleurs

des observations curieuses sur la question dont il s'agit dans ce Mémoire : ce sont les *Riflessioni geographice sopra la Terra incognita*, du P. Vitale Terra-Rossa, bénédictin & professeur en l'université de Padoue.

Quelque bien fondée que paroisse l'opinion des auteurs qui croient cette île fabuleuse ou submergée, il s'en faut de beaucoup qu'elle soit sans difficultés, & qu'elle réponde, d'une manière satisfaisante, à toutes les objections qu'on peut former contre elle ; aujourd'hui sur-tout qu'on voit reparoître, dans les découvertes des derniers navigateurs, plusieurs terres ou îles qu'on avoit regardées de même comme très-douteuses, & qu'on avoit exclues en conséquence des cartes modernes : telles sont les îles de *Quiros* & autres anciennes découvertes des Espagnols dans la mer du Sud.

J'observerai d'abord que supposer la submersion totale d'une île aussi grande que celle dont il est ici question, c'est supposer une révolution terrible, dont les effets auroient dû se faire ressentir au loin, & être connus au moins dans les terres ou îles voisines. On nous a conservé les dates & jusqu'aux moindres détails des différens ravages que la mer a faits, depuis l'an 800, sur les îles de Heyligland & de Norstrand, voisines des côtes du Jutland. On nous a conservé de même les dates des principaux événemens qui ont eu lieu en Islande, depuis une longue suite de siècles, & entr'autres des feux qui sont sortis de la mer aux environs de cette île ; mais on ne trouve nulle part un seul mot qui ait rapport à la submersion totale de Frislande, laquelle submersion n'auroit pu arriver encore qu'après l'an 1400, ou depuis le commencement du x^v.^e siècle. Supposition pour supposition, il me sembleroit beaucoup plus simple & même plus naturel de supposer une erreur dans les Cartes géographiques, que d'admettre gratuitement une révolution aussi étonnante.

Il me paroîtroit également plus simple & plus naturel

de supposer les cartes en défaut, lorsqu'on ne trouve pas une terre à la place où ces cartes en marquent une, que d'en conclure absolument que cette terre n'existe pas. On sait que la position d'une île qui n'est pas fixée par des observations astronomiques, peut varier considérablement, & au point qu'il se trouve quelquefois 200 à 300 lieues de différence entre sa véritable position & celle que les cartes lui assignent. Les cartes sont dressées en grande partie d'après les journaux des navigateurs, & sur l'estime des pilotes : elles participent donc aux erreurs dont on fait que cette estime est susceptible ; & il est à remarquer que, dans les premiers temps des grandes navigations, ou à l'époque des premières découvertes, ces erreurs étoient très-considérables.

Par une suite de ces mêmes erreurs inévitables dans l'estime de la route du vaisseau, il pouvoit arriver qu'une même île vue par trois navigateurs, fût regardée par chacun d'eux comme une nouvelle découverte, & qu'elle parût ensuite sur des cartes dans trois différentes positions, & sous trois différens noms. La *Georgie* de Cook, par exemple, nouvellement découverte dans l'océan méridional, est la même terre que l'île de *Saint-Pierre*, vue par M. Duclos-Guyot, commandant le vaisseau espagnol le *Lion*, en 1756. Elle est la même encore, autant qu'on peut l'estimer, que la *terre de la Roche*, vue par un Officier de ce nom dans le siècle dernier, & qu'on avoit réformée dans les nouvelles cartes. On remarque encore que M. le chevalier Hebert, qui traversa le premier du cap de Horn au cap de Bonne-espérance, en 1708, regarda les îles de Tristan d'Acugna comme un objet de nouvelle découverte : s'estimant, à la vue de ces îles, être éloigné d'environ quatre cents lieues de la position que sa carte donnoit aux îles d'Acugna, il crut que c'étoient de nouvelles îles, & les nomma en conséquence *îles Hebert*. C'est ainsi sans doute que se sont multipliées les petites îles, les Roches & les Vigies,

qu'on voit en si grand nombre sur les anciennes cartes ; & qu'une navigation plus éclairée a fait disparoître en grande partie.

Il est évident qu'on ne retrouveroit pas les îles *Hebert*, si on les cherchoit ailleurs qu'à la place des îles de *Tristan d'Acugna* ; comme on ne trouvera pas vraisemblablement l'île de *Saint-Pierre*, ni la terre de *la Roche*, ailleurs que dans la Georgie du capitaine Cook ; cependant on n'en conclura pas que ces découvertes sont fabuleuses, ou que ces îles ont été submergées. Ce sont principalement les noms qu'on donne aux îles nouvelles ou réputées nouvelles, qui occasionnent tant d'erreurs & de confusion dans la géographie ; & il seroit à désirer que les navigateurs se contentassent à l'avenir des noms que ces îles portent dans le pays même, du moins à l'égard de celles qui sont habitées. Outre que ce seroit un moyen sûr pour reconnoître dans la suite les îles qui auroient déjà été découvertes ; il en résulteroit encore de nouvelles lumières pour la géographie, en ce que les dénominations des lieux sont pour la plupart significatives, & ont rapport à la nature des pays ou à quelques productions remarquables. Magellan nous avoit désigné par leurs véritables noms une partie des Isles par où il avoit passé : on a reconnu les îles des *Larrons*, au nom de *Juvagana* qu'il avoit indiqué, & qui est le même que *Gua-han* ; & on retrouve toutes les autres découvertes de son vaisseau *la Victoire*, dans celles du capitaine Forrest.

D'après toutes ces considérations, au lieu de supposer l'île de *Frislande* fabuleuse ou submergée, je supposerai seulement que sa position est défectueuse dans les cartes qui la représentent, & son nom peut-être altéré ou défiguré dans la relation qui l'a fait connoître. Cette supposition me paroît d'abord pouvoir expliquer pourquoi cette île n'a été reconnue par aucun navigateur, & pourquoi on n'en trouve aucune mention dans l'histoire ; elle m'autorise aussi à ne pas rejeter comme fabuleuses la relation & la

carte des découvertes des Zeni; & je puis maintenant faire usage des lumières que j'y entrevois, & qui me paroissent conduire à la reconnoissance de la terre de Frislande.

Pour que l'on puisse apprécier plus facilement les conséquences que je déduis de ces deux pièces, je crois devoir rapporter ici un précis de la relation, & mettre sous les yeux une copie de la carte des Zeni.

Dans la guerre qui s'éleva, en 1377, entre les Vénitiens & les Génois, au sujet de l'île de Ténédos, Charles Zeni fut nommé Général de l'armée Vénitienne. Il avoit deux frères, Nicolas & Marc-Antoine: Nicolas voyant la guerre finie, résolut de connoître le monde & de voyager; il fit équiper un vaisseau à ses frais, & passa le détroit de Gibraltar, dans le dessein de visiter l'Angleterre & les Pays-bas. Après avoir couru durant quelques jours au nord, il essuya une tempête qui le poussa vers l'île de Frislande & brisa son vaisseau sur la côte: ce voyage se fit en 1380. Cette île appartenoit au roi de Norvège; mais un seigneur de ce pays, nommé Zichini, venoit d'y descendre avec une armée pour en faire la conquête; ce Prince possédoit les îles de *Portland*, situées au sud & près de Frislande, & qui étoient les plus riches & les plus peuplées du pays; il possédoit aussi le duché de *Sorand*, situé dans la terre & du côté qui regarde l'Écosse: il avoit déjà remporté, l'année précédente, une victoire sur le roi de Norvège.

Sur le bruit qui se répandit bientôt de l'arrivée d'un vaisseau étranger dans cette île, Zichini accourut au lieu où il étoit; il parla en latin à Zeni, & ayant appris qu'il étoit Vénitien, il le retira des mains des habitans qui se dispoisoient à lui faire un mauvais parti, & le prit sous sa protection, ainsi que tout l'équipage: reconnoissant ensuite son mérite & ses talens pour la navigation, il le fit monter sur ses vaisseaux, & recommanda à son Général de ne rien faire sans ses conseils.

L'armée navale ayant tiré à l'ouest, soumit sans peine

quelques îles de peu de considération, entr'autres, *Ledova* & *Ilofe*; elle entra dans un golfe nommé *Sudero*, prit quelques vaisseaux chargés de poissons salés, dans un port de la terre nommé *Sanestol*, & soumit encore d'autres îles. La mer qu'ils parcoururent étoit tellement remplie d'écueils & de sirtes ou bas-fonds, que sans le secours de *Zeni*, la flotte se seroit perdue cent fois.

En abordant à la ville de *Bondendono*, on apprit que *Zichini* avoit remporté une victoire complète, qui l'avoit rendu maître de toute l'île : *Zichini* y vint lui-même quelque temps après, il témoigna beaucoup d'amitié à *Zeni*, & de-là se rendit à *Frislande*, capitale de l'île, pour y faire son entrée. Cette ville est située dans la partie du sud-est & sur un golfe (car cette île en a beaucoup); il y a dans cette ville une si grande abondance de poissons, que les Anglois, les Flamands, les Écossois, les Danois & les Norvégiens y viennent en faire leurs provisions, & apportent par ce commerce beaucoup de richesses dans l'île.

Nicolas Zeni se voyant ainsi retenu & honoré par *Zichini*, écrivit à *Marc-Antoine* son frère, de le venir joindre. Celui-ci étant arrivé, *Zichini* partit avec les deux *Zeni*, sur une flotte considérable, pour aller attaquer l'*Esflande*, qui est située entre *Frislande* & la Norvège. Il avoit déjà commencé à ravager ce pays, quand il apprit que le roi de Norvège s'approchoit de lui : il crut devoir se retirer; mais une tempête qui survint, lui fit perdre une partie de ses vaisseaux, & le reste fut jeté à l'île *Grisland*, qui est assez grande, mais inculte. La flotte du roi de Norvège périt aussi.

Zichini voyant qu'il n'étoit pas loin de l'*Islande*, qui appartenoit aussi au roi de Norvège, résolut de l'attaquer; mais comme il n'avoit que peu de monde, & que cette île étoit bien gardée, il se contenta de prendre les îles Islandiques de *Talas*, *Broas*, *Isant*, *Trans*, *Mimant*, *Damberc* & *Bressa*. Il fit construire un fort dans celle de *Bressa*,

dont il donna le gouvernement à Nicolas Zeni; & lui ayant laissé quelques vaisseaux, il s'en retourna à Frislande.

Dès le printemps suivant, Nicolas Zeni équipa trois vaisseaux, dans le dessein d'aller découvrir de nouveaux pays; & s'étant mis en mer au mois de Juillet, il aborda au Groenland, à l'endroit où étoient bâtis le monastère & l'église de Saint Thomas, desservie par des Frères Prêcheurs. Ne pouvant supporter la rigueur du froid de ce climat, & y étant tombé malade, il revint à l'île de Frislande, où il mourut bientôt après.

Marc-Antoine succéda à son frère dans ses richesses & ses dignités: il vouloit retourner à Venise, mais Zichini le retint, & l'engagea à faire avec lui une expédition dans l'île d'Estotiland. Il y avoit vingt-six ans que des pêcheurs Frislandois avoient été poussés par une tempête jusqu'à cette île, qui est à plus de 1000 milles à l'ouest de Frislande: il n'en étoit revenu qu'un seul à Frislande, & c'est sur le rapport qu'il avoit fait de cette île, que Zichini avoit résolu d'y aller. (On trouve ici, dans la relation, le récit de ce qui étoit arrivé à ces pêcheurs, & les noms de quelques autres terres nouvelles où ils avoient abordé; mais je passe sur ces détails, tant pour abrégé, que parce qu'ils ne sont fondés que sur le rapport d'un seul homme, & n'inspirent pas le même degré de confiance que le récit des expéditions des Zeni).

Zichini se mit en mer avec une armée assez considérable, & fit route à l'ouest. Après avoir dépassé quelques îles dépendantes de Frislande, & quelques sirtes ou bas-fonds, on aborda à *Ledova*, où l'on resta sept jours pour compléter les provisions nécessaires. On en partit le 1.^{er} Juillet, & on navigua d'abord avec le vent en poupe; on essuya ensuite une tempête qui dura huit jours, & on fut poussé vers une île qu'on ne connoissoit pas. Les habitans, qui accoururent sur le rivage, firent entendre à Zichini, que leur île s'appeloit *Icarie*, & leur Roi, *Icàre*, comme tous ses prédécesseurs, & qu'ils descendoient, à ce qu'ils

croyoient, d'un roi d'Écosse, qui les avoit menés-là. Ils le prièrent de ne point descendre dans leur île, parce que c'étoit une de leurs loix de n'y point laisser aborder d'étrangers: ils lui offrirent en même temps de recevoir parmi eux, s'il le vouloit, un homme de son équipage, qui leur serviroit d'interprète, comme ils en avoient déjà dix de différentes nations, & qui seroit traité comme un de leurs concitoyens. Zichini peu satisfait de cette réception, voulut descendre à terre, mais il ne put en venir à bout, & il fut contraint de passer outre.

Il courut de-là six jours à l'ouest avec un vent favorable; le vent ayant ensuite passé au sud, on navigua encore quatre jours & on découvrit enfin la terre. On trouva que ce n'étoit qu'une île, assez belle à la vérité, mais habitée par le peuple le plus sauvage du monde, d'une petite taille, & si timide, que d'abord qu'ils voyoient quelqu'un, ils se retiroient dans des cavernes. On appela le port où l'on avoit abordé, port de *Trin*; & un cap voisin, cap de *Trin**.

Zichini avoit résolu de bâtir une ville dans cet endroit & d'y laisser une colonie. Une partie de son équipage paroissant mécontente & demandant à s'en retourner, il les renvoya sous la conduite de Marc-Antoine Zeni, qui fut chargé de cette commission bien malgré lui. Marc-Antoine, pour son retour, tira droit à l'est, & courut vingt jours dans cette direction sans voir la terre; il porta ensuite vers le sud, & cinq jours après il se trouva à l'île de *Neome*, ce qui lui fit connoître qu'il avoit dépassé l'Islande. Ayant pris dans cette île qui étoit soumise à Zichini, les rafraîchissemens dont il avoit besoin, il en partit & arriva trois jours après à Frislande.

Telles sont les circonstances principales de la relation

* Dans un petit vocabulaire de la langue Cambrique, ou du pays de Galles, que Laët a inséré dans ses Observations sur l'origine des Américains, on trouve le mot *Trwyn*, en correspondance avec celui de *Nasus*, *Nez*, qui est souvent employé pour désigner un cap,

des Zeni, & celles qui me paroissent propres à faire reconnoître l'île de Frislande. J'ajouterai ici, d'après les remarques de Ramusio, sur cette relation, que tous ces détails sont tirés des lettres de Nicolas Zeni à son frère Marc-Antoine, & de celles de Marc-Antoine à leur autre frère Charles. Après avoir été conservées soigneusement dans la famille, elles furent publiées dans la suite par un Seigneur de cette famille, qui avertit en même temps qu'il en avoit eu beaucoup d'autres; mais que ces lettres & mémoires lui étant tombés entre les mains, pendant qu'il étoit jeune, il les avoit déchirés, ne sachant pas ce que c'étoit. On voit dans la relation le commencement d'une lettre de Marc-Antoine à son frère Charles, dans laquelle il lui mandoit que, pour ce qu'il souhaitoit de savoir touchant les mœurs des habitans & les animaux de ces pays-là, il en avoit composé un livre qu'il espéroit porter avec lui; que dans ce livre, il avoit traité de la situation des pays, des loix & des coutumes de *Frislande*, d'*Islande*, d'*Eslande*, du royaume de *Norwège*, d'*Estotiland* & de *Drogium*; qu'il avoit écrit la vie de son frère Nicolas, les terres par lui découvertes, & les affaires du Groenland; qu'il avoit aussi écrit la vie & les expéditions de Zichini, où l'on verroit la découverte des deux côtes du Groenland, & les villes qu'il avoit bâties par-tout; qu'enfin il espéroit lui dire de vive voix ce qui manqueroit à son livre. Celui des Zeni qui a mis ces lettres au jour, annonce encore qu'il a trouvé parmi ces lettres & mémoires, une ancienne carte à naviguer, toute gâtée & délabrée de vieillesse; qu'il a été assez heureux pour pouvoir en faire une copie, & qu'il la publie, afin qu'on entende mieux les choses qu'il rapporte.

Je dois avertir, en finissant ce précis de la relation, qu'en passant sous silence plusieurs particularités, dont quelques-unes ont paru peu vraisemblables & ont excité la critique, je n'ai point cherché à éviter les objections, mais seulement à abréger un récit qui pouvoit paroître déplacé ici, mais qui étoit nécessaire pour l'intelligence de la suite.

de ce Mémoire. On fait au reste, que les premiers qui ont parlé des pays inconnus avant eux, comme du nouveau Mexique, de la Guyane, &c. en ont dit des choses fort extraordinaires, & que cela n'empêche pas qu'il y ait un nouveau Mexique, une Guyane, &c.

Je vais maintenant exposer les conséquences que je crois pouvoir déduire de la relation & de la carte des Zeni, & qui me paroissent des données suffisantes pour résoudre la question qui nous occupe. Je commence par la relation & par les rapports qu'on y voit indiqués entre l'île de Frislande & les autres terres voisines, telles que la Norvège, l'Écosse, les îles de Schetland, l'Estotiland & l'Islande.

1.^o Il est dit que l'île de Frislande étoit possédée par les rois de Norvège, lorsque Nicolas Zeni y aborda en 1380. On connoît, par l'histoire, quelles ont été dans tous les temps les possessions des Norvégiens au-dehors de la Norvège: ce sont le Groenland, l'Islande, les îles de Fer-oë, de Schetland & les Orcades. Les îles de Schetland & les Orcades ont passé sous la domination des rois d'Écosse, par le mariage de Marguerite, fille de Christiern I, roi de Danemarck, avec James III, roi d'Écosse; mais toutes les autres sont restées au pouvoir des rois de Norvège & de Danemarck, jusqu'à ce jour. Or, il est à remarquer que les îles de *Fer-oë*, qui sont voisines de Schetland, & pour le moins aussi considérables qu'elles, ne sont ici nommées nulle part, ni dans la relation ni sur la carte des Zeni. Zichini, après avoir fait la conquête de Frislande, va attaquer l'Estlande & l'Islande, parce qu'elles appartenoient aussi au roi de Norvège: il devoit, par la même raison, attaquer pareillement les *Fer-oë*, qui se trouvoient d'ailleurs sur la route, entre l'Estlande & l'Islande; cependant il n'en est pas fait la moindre mention dans cette circonstance ni ailleurs. Ce silence de la relation sur des îles aussi étendues que celles de *Fer-oë*, cette omission, dans la carte sur-tout, où elle est un défaut essentiel, ne peuvent se concevoir, qu'en supposant que les îles de *Fer-oë* seroient la même

terre que l'île de Frislande. Je me borne ici à annoncer ce premier résultat, & à le présenter seulement comme une des données de la question. Avant que d'aller plus loin, je crois devoir prévenir les doutes & les objections que pourroit faire naître l'entreprise de Zichini contre les rois de Norvège. On concevra sans peine comment ce Prince a pu tenter de se soustraire à leur domination, & de s'ériger lui-même en souverain, si on se rappelle qu'en l'an 1348, il arriva une grande peste, connue sous le nom de *peste noire*, & qui enleva une grande partie des habitans du Nord. La Norvège & le Danemarck furent, pour ainsi dire, épuisés; on vit disparaître tout-à-la-fois les marchands & les matelots qui composoient les compagnies du Groenland dans ces deux royaumes; la navigation & le commerce furent interrompus, & les Colonies négligées & presque abandonnées. On fait encore qu'à la suite de cette peste, le Groenland a été perdu pendant long-temps, parce qu'on avoit cessé d'y envoyer.

2.^o En parlant des possessions de Zichini, à l'époque de l'arrivée des Vénitiens, il est dit qu'outre les îles de Portland, situées au sud & près de Frislande, il étoit encore seigneur du duché de Sorand, situé dans la terre & du côté qui regarde l'Écosse, *Fra terra, &c. posta d'alla banda verso Scotia*. Il est visible par ces expressions, que le duché de Sorand, qui regarde l'Écosse, n'en peut être éloigné de 300 lieues, ni situé près du Groenland, où les Géographes l'ont placé, & où les navigateurs l'ont cherché en vain. La relation nous indique ici une proximité entre le duché de Sorand & l'Écosse, ou du moins un intervalle peu considérable & qui n'empêche pas la communication. Or, ce duché de Sorand fait partie de l'île de Frislande, comme on le voit par la carte des Zeni, & comme l'annonce aussi la relation, dont il convient de remarquer ici les expressions & l'exactitude: elle nous dit que le duché de Sorand est dans la terre *Fra terra*, & cela signifie qu'il est situé dans l'île principale ou la

grande terre de Frislande. On fait que Pomona ou l'île principale des Orcades, se nomme encore *Mainland* ou Terre-ferme, & que la principale des îles de Schetland se nomme seulement *Mainland*; on pourroit même conclure de cette dénomination singulière, employée dans la relation, que la terre de Frislande auroit été un composé de plusieurs îles, comme les Orcades & les Schetland; & que ses habitans auroient eu la même langue ou la même manière de désigner les objets, que ceux de ces dernières îles: & à tous ces traits, on seroit tenté de reconnoître la terre de Frislande dans la terre de Fer-oë, qui est un composé de plusieurs îles, comme les Orcades & les Schetland, qui a été originairement peuplée, comme ces autres îles, par des Norvégiens, & qui d'ailleurs n'est pas fort éloignée de l'Écosse.

3.^o La relation nous dit que l'*Estlande* est située entre Frislande & la Norvège: on ne peut disconvenir que cette Estlande ne soit les îles de Schetland, que l'on nomme autrement dans le pays, *Hitland* ou *Hetland*; or, si nous avons à indiquer aujourd'hui la situation des îles de Schetland, nous dirions, en consultant les cartes les plus exactes, que ces îles sont situées entre les îles de Fer-oë & la Norvège. Ce rapport de Frislande avec l'Estlande, nous indique donc encore une proximité entre les deux terres, telle qu'elle existe entre les Fer-oë & les Schetland, & telle qu'il faut la supposer aussi pour concevoir la marche de Zichini dans ses courses sur les possessions du roi de Norvège: on a vu que c'est par la terre d'Estlande qu'il a commencé ses courses, ce qui annonce que c'étoit la terre la plus proche de Frislande. C'est sur un rapport semblable, que le savant auteur de l'*Histoire des Hommes*, a reconnu la vraie position de l'ancienne Memphis, capitale de l'Égypte. Pline avoit dit que les pyramides étoient situées entre Memphis & le Delta, & l'Historien en a conclu avec raison que Memphis étoit située au sud des pyramides; tandis que des voyageurs qui avoient été

sur les lieux, la plaçoient directement à l'ouest des mêmes pyramides.

4.^o La distance de Frislande aux côtes de l'Amérique, telle qu'on peut l'estimer d'après la relation, tendroit à éloigner cette île de la position que les Géographes lui avoient assignée près du Groenland, & à la rapprocher des côtes de l'Europe. Suivant le rapport du pêcheur Frislandois qu'on dit avoir abordé à la côte d'Estotiland, aujourd'hui le Labrador, il y a plus de 1000 milles de distance entre les deux terres; & suivant le rapport de Marc-Antoine Zeni, sur son retour du port de *Trin* qu'on voit situé, sur la carte, à l'extrémité sud du Groenland, vers le cap Farwell, l'île de Frislande seroit éloignée de la pointe sud du Groenland, du côté de l'est, de plus de vingt jours de navigation. La première distance, celle de 1000 milles, est évaluée dans la relation même à 200 lieues, & ce sont ces 200 lieues qu'il faut seulement considérer ici. Il est probable que c'est en lieues & non en milles, que le pêcheur Frislandois aura indiqué cette distance, & que l'évaluation en milles n'aura été ajoutée que dans la suite, & relativement à l'usage reçu en Italie, de compter les espaces par milles: or, ces 200 lieues, qu'on doit réputer lieues Norvégiennes ou Danoises, répondroient à environ 350 de nos lieues marines, & l'île de Frislande seroit éloignée d'autant & même plus des côtes de l'Estotiland. Il s'en faut encore de 150 lieues que cette distance n'égale celle qui nous est indiquée par les meilleures cartes, entre les côtes du Labrador & les îles de Fer-bë; mais le pêcheur Frislandois peut n'avoir conservé qu'une estime fort vague de sa route, & il peut se faire aussi qu'il ait indiqué à Zichini une distance au-dessous de la véritable, pour le déterminer plus facilement à aller reconnoître cette terre.

A l'égard de la distance qu'on peut déduire de la navigation de Marc-Antoine à son retour du port de *Trin*, elle seroit de 400 de nos lieues marines, en supposant seulement 20 lieues par jour, & Frislande seroit éloignée

d'autant de la côte sud du Groenland. La carte des mers du Nord, de M.^r de Verdun, de Borda & Pingré, n'en donne que 380 du cap Farewel aux îles de Fer-oë. On peut au moins conclure de ces distances, que Frislande doit être plus éloignée du Groenland qu'on ne l'avoit cru, & qu'elle se rapproche assez de la position des îles de Fer-oë.

5.^o Il résulte de la même navigation de Marc-Antoine Zeni à son retour du port de *Trin*, que l'île de Frislande étoit plus orientale que l'Islande. Après avoir couru pendant vingt jours à l'est, & ensuite cinq jours vers le sud, il aborda, suivant la relation, à l'île de Neome, & il reconnut par-là qu'il avoit dépassé l'Islande. De l'île de Neome, il se rendit en trois jours à Frislande; ainsi nous nous retrouvons encore ici ramenés vers les îles de Fer-oë, & par une circonstance qui ne laisse aucun lieu de douter.

On voit par la carte des îles de Fer-oë, que je joins ici, que ces îles sont remplies de golfes, comme l'étoit l'île de Frislande, suivant la relation. On sait que la mer, autour de ces îles, étoit autrefois extrêmement abondante en poissons; que dans tous les temps, la pêche a été la principale occupation de leurs habitants, & qu'aujourd'hui encore leur principal commerce consiste en poissons secs: c'est donc encore une terre semblable à celle de Frislande, où, comme on l'a vu ci-devant, les Anglois, les Flamands, les Écossois, les Danois & les Norvégiens alloient faire leurs provisions de poissons. On sait enfin que la navigation est aussi dangereuse autour des îles de Fer-oë, qu'elle l'étoit, suivant la relation, autour de Frislande. On pourroit trouver encore, dans les autres circonstances de cette relation, beaucoup d'autres traits de ressemblance assez frappans; mais il me suffira, je crois, d'ajouter ici ceux que nous présente la carte de Frislande, comparée à la Carte des îles de Fer-oë.

Je remarque d'abord que l'extrémité sud de l'île de Frislande se trouve placée, sur la carte originale & sur

toutes les cartes qui font mention de cette île, à la même latitude que l'extrémité sud des îles de Fer-oë. La pointe sud de ces îles est par $61^{\text{d}} 17' 45''$ de latitude, suivant les observations de M.^r de Verdun, de Borda & Pingré; & la pointe sud de Frislande est par 61 degrés moins quelques minutes sur les anciennes cartes. On ne cherchera point à justifier la différence qui paroît entre ces deux résultats, parce qu'on retrouve par-tout une différence semblable entre les nouvelles & les anciennes observations. Le rapport de latitude, que nous trouvons ici, peut donc être regardé comme assez exact, & venir à l'appui des autres preuves qui se sont offertes d'ailleurs.

Si l'on compare maintenant les détails de la carte de Frislande, avec ceux de la carte de Fer-oë, on aperçoit les principaux caps, des golfes, des îles & autres objets remarquables, placés dans le même ordre & suivant les mêmes directions, dans l'une & dans l'autre carte. On y voit aussi un assez grand nombre de dénominations semblables, & dans les mêmes positions, comme si l'une de ces cartes eût été dressée d'après une description grossière de l'autre.

On remarque d'abord une petite île, sous le nom de *Monaco*, à l'extrémité sud de Frislande, & une île semblable, avec le nom de *Munck* ou *le Moine*, à l'extrémité sud des Fer-oë; c'est un haut rocher rond, & remarquable, tant à cause des écueils qui sont aux environs, que parce que c'est un point de reconnoissance : il y a auprès six autres rochers qui s'élèvent tant soit peu au-dessus de l'eau, & un courant ou ras de marée fort dangereux.

À la partie du nord-est de Frislande, on voit deux petites îles nommées l'une *Ibini*, & l'autre *Piglu*; on trouve de même à l'extrémité nord-est des Fer-oë une petite île nommée *Bispen* ou l'Évêque, & une autre à côté, nommée *Fugl-oë*. *Bispen* est, comme Monaco, un haut rocher rond, & un point de reconnoissance pour les navigateurs: *Fugl-oë* est la première des îles de Fer-oë du côté du Nord-est, &

n'est éloignée de Bispen que d'un jet de pierre, ou d'une portée de fusil au plus.

La partie du nord-ouest de Frislande se termine par un cap nommé *Spagia*, & la même partie dans les Fer-oë se termine par un îlot nommé *Stachen*. à la suite de *Spagia*, la côte septentrionale de Frislande nous présente une suite d'objets sous les noms de *Aqua*, *Andefort*, *Forali*, *Logoft*, *Vadin*, *Rane* & *Rovea*; & on trouve à la suite de *Stachen*, sur la côte nord des Fer-oë, les noms de *Funding*, *Andefort-Fugle*, *Gofte Kladi*, *Arne* & *Lamhau*, qui se suivent dans le même ordre que les précédens, & entre des golfes, comme sur la carte de Frislande.

Par le travers, ou vis-à-vis les golfes d'Andefort, Forali & Logoft, on voit sur la carte de Frislande une assez grande île nommée *Duilo*; & sur la carte des Fer-oë, par le travers des golfes Anding-fiord, Fugle-fiord & Gofte-fiord, on voit un groupe de quatre îles qui semblent ne former qu'une même terre, n'étant séparées que par de très-petits détroits, & qui ne forment qu'une même province dans l'administration civile & ecclésiastique du pays. Ces îles sont *Vider-oë* ou *Vid-oë*, *Cun-oë*, *Bord-oë* & *Suin-oë*; on les nomme en général *Norder-oë*, îles du nord, & c'est la paroisse de *Vid-oë* qui est le chef-lieu ou la capitale de cette province. Si ces îles nous représentent celle de *Duilo* de la terre de Frislande, comme il y a tout lieu de le penser, il est aussi très-probable qu'elles nous représenteront la *Thulé* des anciens, que l'on a placée successivement dans l'Islande, dans les Schetland & dans la Norvège; cette conjecture est au moins fondée sur la situation de ces îles, conforme à la description qu'on a faite de *Thulé*, sur l'analogie du nom de *Duilo* à celui de *Thulé*, & sur la signification du mot de *Thule* qu'on a traduit jusqu'ici par extrémité, fin, ou dernière terre.

Sur la côte orientale de Frislande, on voit une île nommée *Stremes*, que son nom & sa position au-devant d'un grand golfe peuvent aisément faire reconnoître sur la côte de l'est des

de Fer-oë: c'est sans doute l'île de *Nols-oë* qu'on voit au-devant du grand golfe de *Strom Flejerne*, connu par ses courans, & qui divise aujourd'hui le Mainland ou la terre ferme de Fer-oë en deux parties, dont l'une en a pris, comme le golfe, le nom de *Strom-oë*.

La côte occidentale de Frislande nous présente un cap *Bouet* dans la partie la plus avancée à l'ouest; au sud de ce cap sont deux grands golfes nommés *Nordero* & *Sudero colfo*, & vis-à-vis le dernier de ces golfes sont deux îles nommées *Ledeuc* ou *Ledova* & *Iloye*. On reconnoît sans peine ces différens objets à la côte occidentale des Fer-oë, par sa configuration & les dénominations qu'on y trouve. Le cap *Bouet* répond à *Myg-nes*, qui est une petite île la plus avancée à l'ouest, & dont le nom même indique un cap. Les golfes *Nordero* & *Sudero* sont les deux ouvertures des détroits qui s'avancent l'un au nord & l'autre au sud, & qui séparent l'île de *Strom-oë* de celles de *Wag-oë* & de *Sand-oë*: les îles *Ledova* & *Iloye* seront celles de *Hest-oë* & de *Colter*. On trouve sur la carte des Fer-oë un golfe nommé *Suderoë-fiord*, qui sépare l'île de Portland, au nord, de celle de *Sku-oë*; mais ce n'est pas là le golfe *Sudero* de la carte de Frislande, au-devant duquel il faut trouver trois îles. Le véritable *Sudero colfo* est le détroit qui sépare *Strom-oë* de *Sand-oë*, comme le *Nordero colfo* est le détroit qui sépare *Strom-oë* de *Wag-oë*: & on ne sera pas surpris de voir dans l'ancienne carte le nom de *golfe*, au lieu de celui de *détroit*. On ne voit pas sur la carte des Fer-oë ce grand nombre de petites îles qu'on trouve sur la carte de Frislande près de *Nordero colfo*; ce ne sont vraisemblablement que des petites roches, ou ces écueils qui rendoient la navigation si dangereuse, comme on l'a vu dans la relation.

D'après ces premières reconnoissances, qui sont assez évidentes par elles-mêmes, & qui confirment de plus en plus celles que la relation nous avoit données, il n'est plus guère permis de douter que les îles de Fer-oë ne

soient l'ancienne Frislande. Je me bornerai, pour le reste des détails de Frislande, à en faire l'application sur la carte des îles de Fer-oë, d'autant plus que les rapports des noms sont moins sensibles; soit que la copie de la carte de Frislande ait altéré & défiguré une partie de ses noms, comme il y a lieu de le penser, soit que la carte des Fer-oë ne nous fournisse pas tous les détails de ces îles. J'ajouterai seulement ici, que la ville de *Frislande* peut se rapporter à la position de *King's-havn*, port situé comme Frislande, dans la partie du S. E. de l'île & sur un golfe qui en a pris le nom de *Scaale-fiord*; que *Godmec*, une des principales villes de Frislande, répond à la position de *Thors-havn*, qui est depuis très-long-temps le chef-lieu ou la capitale de toutes les îles de Fer-oë, & qui est aussi le port le plus fréquenté pour le commerce de poissons; que *Sorand*, duché de l'ancienne Frislande, peut être représenté par le lieu nommé *Scarvenes*, situé à la côte sud de l'île de Sand-oë, & dans la partie de la grande terre qui regarde l'Écosse; & qu'enfin les îles de *Portland*, possédées par Zichini, & situées au sud & près de Frislande, peuvent être représentées par l'île de *Suder-oë*, qui est, comme l'indique son nom, la plus sud des Fer-oë, & qui est aussi l'une des plus riches & des plus peuplées de toutes ces îles. On remarquera que cette île est divisée en trois presqu'îles, par des golfes qui s'avancent dans les terres, & que la carte des Fer-oë nous donne même les noms des deux isthmes: ainsi ces presqu'îles peuvent être prises avec quelque fondement pour les îles de Portland.

On pourroit déduire encore une nouvelle preuve, en faveur de l'opinion qui résulte de ces recherches, du rapport qu'il nous paroît y avoir entre le nom de *Frislande* & celui de *Fer-oë*. Lucas Jacobson Debes, qui a écrit en danois une description des îles de Fer-oë, dans le pays même & dans la ville de Thors-havn, en 1670, nous expose les différentes opinions des Savans sur

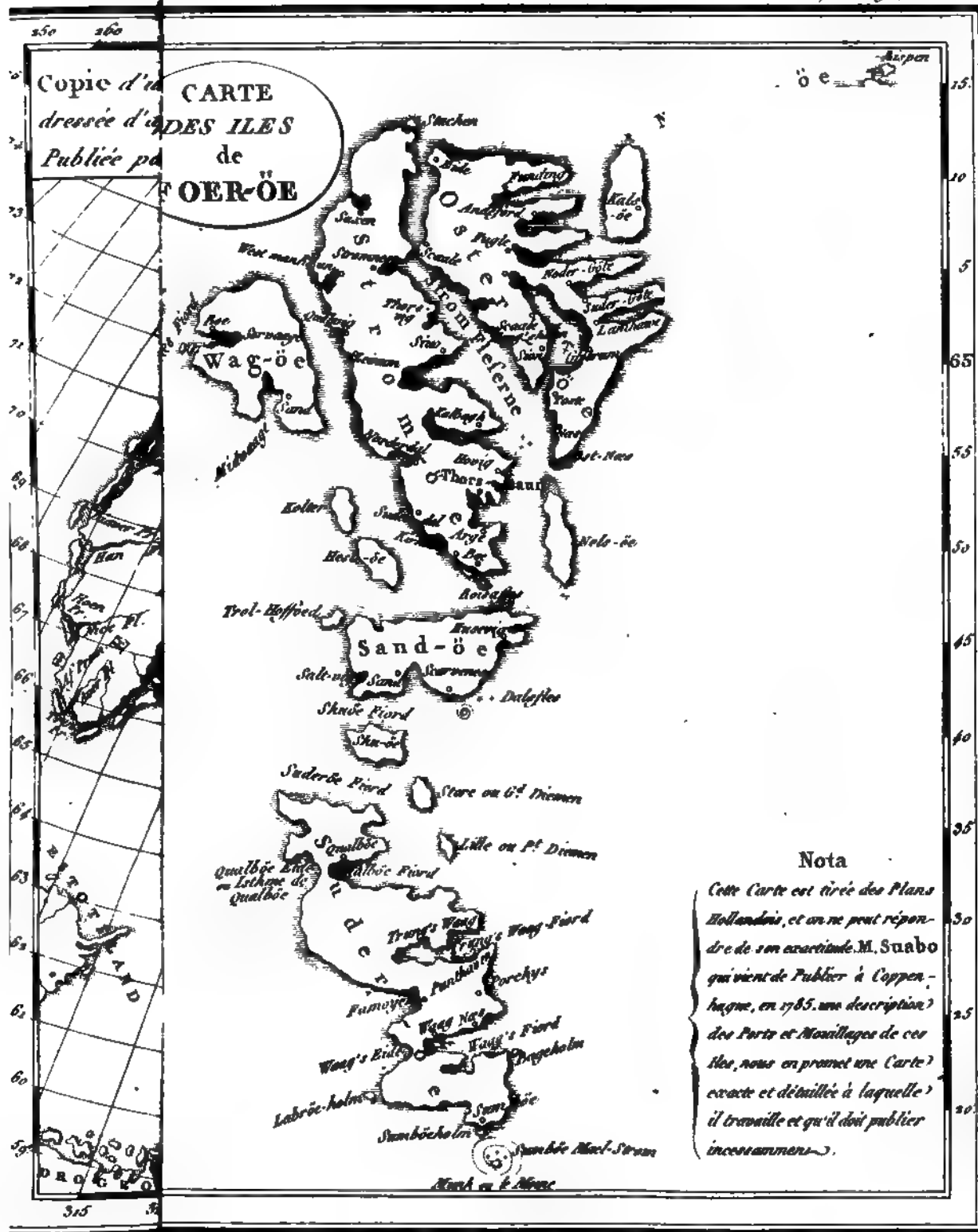
l'origine du nom de ces îles. Son opinion, entr'autres, & celle qui m'a paru la plus probable, est que les îles de *Fer-oë* ont été ainsi nommées du mot *fare*, qui, dans l'ancienne langue de ces îles, signifie la même chose que le mot *ferrie*, en anglois, c'est-à-dire, un passage d'eau; c'est à ce mot, sans doute, qu'il faut aussi rapporter l'origine des noms de *bosphore*, de *far* & de *fretum*, par lesquels on a désigné les détroits. Les îles de *Fer-oë* sont, comme on le voit par la carte, pleines de golfes, de détroits, de passages d'eau; c'est vraiment le pays des détroits. Or il est visible qu'on a pu les appeler *Ferrieland*, au lieu de *Fer-oë*, c'est-à-dire, *terre*, au lieu d'*îles*, par la même raison qu'on a appelé *Schetland* ou *Hitland*, un autre corps d'îles semblable à celles-ci, & qui en est assez proche. De *Ferrieland* à *Frislande* il n'y a pas, ce me semble, de différence assez considérable, pour ne pas reconnoître l'un de ces noms dans l'autre.

La seule difficulté qui pourroit peut-être arrêter encore & empêcher de reconnoître l'île de *Frislande* à tant de marques, c'est la manière dont elle est figurée sur la carte ancienne, qui nous la représente comme une grande terre, avec quelques petites îles seulement aux environs, tandis que *Fer-oë* est une terre découpée & divisée en dix-sept îles. Pour écarter cet obstacle, il suffira de faire remarquer que les *Schetland*, qui sont une autre terre découpée & divisée comme celle de *Fer-oë*, sont également représentées dans la même carte, comme un grande terre, avec quelques îles autour. On pourroit citer plusieurs exemples d'erreurs semblables; *Terre-neuve*, entr'autres, est représentée sur les anciennes cartes, bien différente de ce que nous la connoissons aujourd'hui; elle y est divisée & coupée en plusieurs îles, tandis qu'elle n'en forme qu'une grande. C'est sans doute le peu de largeur des golfes & des détroits de *Fer-oë*, qui aura fait regarder & représenter la plupart de ces îles comme une terre continue; de même que c'est la grande étendue des golfes de *Terre-neuve* qui

aura donné lieu de diviser cette terre en plusieurs îles. J'ai distingué sur la carte des îles de Fer-oë, celles de ces îles, dont l'ensemble me paroît devoir composer la grande terre de Frislande; ce sont *Strom-oë*, *Ostr-oë*, *Wag-oë*, avec les îlots de *Myg-nès* & *Sand-oë*.

Après avoir reconnu l'île de *Frislande* par tous les moyens que je viens d'exposer, j'ai recherché quels pouvoient être les fondemens de la position que les géographes lui avoient assignée, & voici ce que j'ai trouvé de plus vraisemblable à ce sujet. Il est dit, dans la relation du second voyage de Forbisher, que vingt-six jours après être sorti des Orcades, il s'approcha de l'île de *Frislande*, dont la côte, suivant cette relation, est pleine de montagnes pointues & très-élevées; qu'après l'avoir côtoyée quatre jours, il la quitta, & arriva huit jours après à l'endroit où il avoit abordé à son premier voyage, c'est-à-dire, au Groenland. C'est sans doute d'après ce passage de Forbisher, que l'on aura placé l'île de Frislande du côté du Groenland; mais il étoit aisé de reconnoître que la Frislande de Forbisher, ne pouvoit être celle des Zeni. Forbisher ayant rencontré sur sa route une île qu'il ne connoissoit pas, l'aura prise pour la Frislande des Zeni, dont la découverte étoit encore récente de son temps, & il l'aura nommée *Frislande*, sans s'embarrasser beaucoup si les choses convenoient ou non. C'est ainsi que se sont établies plusieurs erreurs en géographie; & lorsqu'elles sont, comme celle-ci, la suite des observations d'un homme célèbre, elles s'accréditent & se perpétuent pendant des siècles.

S'il paroît maintenant démontré que l'île de Frislande n'est point fabuleuse ni submergée, comme on l'avoit cru jusqu'à présent, il s'ensuit nécessairement que la relation des Zeni n'est point un roman, mais un monument précieux, d'où l'on peut tirer des connoissances utiles. On peut en conclure, entr'autres choses, que le nouveau Groenland auroit été connu avant la découverte qui en a



été faite par les Danois; que l'Amérique auroit aussi été connue & même habitée par des Européens, avant sa découverte par Christophe Colomb; que l'histoire des colonies qu'on dit y avoir passé du pays de Galles l'an 1170, sous la conduite de Madoc, un des fils d'Owen Guineth, roi de ce pays, pourroit paroître assez fondée; & que la découverte de l'île d'*Icare*, qui nous est encore inconnue, pourroit être très-intéressante, & fourniroit peut-être de nouvelles lumières. Il résulteroit encore de la carte des *Zeni*, que la *Thulé* des anciens seroit plutôt l'île de Frislande ou les Fer-oë, qu'aucun des autres pays auxquels on l'a rapportée successivement.

SUITE DU MÉMOIRE SUR LE CALCUL DES PROBABILITÉS,

Par M. le Marquis DE CONDORCET.

ARTICLE. V I.

*Application des principes de l'article précédent
à quelques questions de critique.*

I.

J'AI exposé, dans l'*article précédent*, une méthode d'exprimer la probabilité des faits extraordinaires, en ayant égard à celle des témoignages qui les attestent, & à la probabilité propre de ces faits, qui, malgré la très-grande probabilité que produiroient les mêmes témoignages pour un fait ordinaire, peut alors devenir très-petite & fort au-dessous de $\frac{1}{2}$.

I I.

J'ai observé en même-temps qu'il ne falloit pas dans ce cas entendre, par la probabilité propre d'un fait, le rapport du nombre des combinaisons où il a lieu, avec le nombre total des combinaisons. Par exemple, si d'un jeu de dix cartes on en a tiré une, & qu'un témoin me dise que c'est telle carte en particulier, la probabilité propre de ce fait, qu'il s'agit de comparer avec la probabilité qui naît du témoignage, n'est pas la probabilité de tirer cette carte, qui seroit $\frac{1}{10}$, mais la probabilité d'amener cette carte plutôt que telle autre carte déterminée en particulier; & comme toutes ces probabilités sont égales, la probabilité propre est ici $\frac{1}{2}$.

Cette distinction étoit nécessaire, & elle suffit pour

expliquer la contrariété d'opinions entre deux classes de philosophes. Les uns ne peuvent se persuader que les mêmes témoignages puissent produire, pour un fait extraordinaire, une probabilité égale à celle qu'ils produisent pour un fait ordinaire ; & que , par exemple , si je crois un homme de bon sens qui me dit qu'une femme est accouchée d'un garçon , je dusse le croire également s'il me disoit qu'elle est accouchée de douze.

Les autres au contraire sont convaincus que les témoignages conservent toute leur force, pour les faits extraordinaires & très-peu probables , & ils sont frappés de cette observation , que si on tire une loterie de 100,000 billets , & qu'un homme, digne de foi, dise que le numéro 256, par exemple, a eu le premier lot, personne ne doutera de son témoignage, quoiqu'il y ait 99,999 à parier contre 1 que cet événement n'est pas arrivé.

Or, au moyen de l'observation précédente, on voit que dans le second cas la probabilité propre du fait étant $\frac{1}{2}$, le témoignage conserve toute sa force, au lieu que dans le premier, cette probabilité étant très-petite, réduit presque à rien celle du témoignage.

II I.

J'ai proposé ensuite de prendre , pour la probabilité propre du fait, le rapport du nombre de combinaisons qui donnent ce fait, ou un fait semblable au nombre total des combinaisons.

Ainsi, par exemple, dans le cas où on tire une carte d'un jeu de dix cartes, le nombre des combinaisons où l'on tire une carte déterminée quelconque est un ; celui des combinaisons où l'on tire une autre carte déterminée est aussi un ; donc $\frac{1}{2}$ exprimera la probabilité propre.

Si on me dit qu'on a tiré deux fois de suite la même carte, alors on trouvera qu'il n'y a que dix combinaisons qui donnent deux fois une même carte, & quatre-vingt-dix qui donnent deux cartes différentes : la probabilité

propre du fait n'est donc que $\frac{1}{100}$, & celle du témoignage commence à devenir plus foible.

Mais je crois devoir abandonner cette manière de considérer la question, 1.^o parce qu'elle me paroît trop hypothétique; 2.^o parce que souvent cette comparaison d'événemens semblables seroit difficile à faire, ou, ce qui est encore pis, ne se feroit que d'après des suppositions arbitraires; 3.^o parce qu'en l'appliquant à des exemples, elle conduit à des résultats trop éloignés de ceux que donneroit la raison commune.

I V.

J'en ai donc cherché une autre, & il m'a paru plus exact de prendre, pour probabilité propre d'un événement, le rapport de la probabilité de cet événement prise dans le sens ordinaire, avec la probabilité moyenne de tous les autres événemens.

Ainsi, dans l'exemple précédent, nous avons dix combinaisons où l'on tire deux cartes semblables, & quarante-cinq combinaisons où l'on tire deux cartes différentes. La probabilité de tirer deux cartes différentes déterminées est $\frac{2}{100}$; celle de tirer deux cartes déterminées semblables est $\frac{1}{100}$. La probabilité moyenne d'un autre événement que celui qui amène les deux cartes semblables données, sera

donc
$$\frac{45 \cdot \frac{2}{100} + 9 \cdot \frac{1}{100}}{54} = \frac{99}{54 \cdot 100};$$
 celle d'amener les deux cartes déterminées semblables sera $\frac{1}{100}$; donc la probabilité propre de l'événement sera $\frac{54}{153}$.

Supposons ensuite que, dans le même exemple, on cherche la probabilité propre du fait, qu'on a tiré trois fois de suite la même carte.

Nous avons ici trois espèces de faits, 1.^o ceux où l'on a amené trois cartes différentes; la probabilité de chaque fait

fait déterminé de ce genre est $\frac{6}{1000}$, & il y en a 120 ;
 2.^o ceux où l'on tire deux fois la même carte ; ces faits sont
 au nombre de 90, & la probabilité de chacun est $\frac{3}{1000}$;
 3.^o ceux où l'on tire trois fois la même carte ; ils sont au
 nombre de 10, & la probabilité de chacun est $\frac{1}{1000}$. Nous
 avons donc $\frac{1}{1000}$ pour la probabilité du fait déterminé,
 & $\frac{6.120 + 3.90 + 9}{1000.219}$ pour la probabilité moyenne des
 autres faits. La probabilité propre du fait allégué sera
 donc $\frac{219}{1218}$.

Ainsi supposons, par exemple, que la probabilité du
 témoignage soit $\frac{99}{100}$, c'est-à-dire, que le témoin ne se
 trompe ou ne veuille tromper qu'une fois sur cent, on
 aura, d'après son témoignage, la probabilité $\frac{99}{100}$ ou $\frac{9.900}{10.000}$
 qu'on a tiré une carte déterminée ; la probabilité $\frac{9.818}{10.000}$
 qu'on a tiré deux fois la même carte ; & la probabilité
 $\frac{9.540}{10.000}$ qu'on l'a tirée trois fois.

Supposons encore que l'observation ait constaté que, sur
 vingt millions d'hommes, un seul ait vécu 120 ans, & que la
 plus longue vie ait été de 130 ; qu'un homme me dise que
 quelqu'un vient de mourir à 120 ans, & que je cherche la
 probabilité propre de cet événement : je regarderai d'abord
 comme un fait unique, celui de vivre plus de 130 ans,
 fait que je suppose n'être pas arrivé ; j'aurai donc 131
 faits différens, dont celui de mourir à 120 ans est un seul.

La probabilité de celui-ci sera $\frac{1}{20.000.131}$; la probabilité

moyenne des 130 autres sera $\frac{20,000,130}{20,000,131,130}$; donc la probabilité propre cherchée sera $\frac{130}{20,000,260}$, ou environ $\frac{1}{15384}$.

V.

Cette méthode s'appliquera également aux évènements indéterminés. Ainsi, en continuant le même exemple, si le témoin a dit seulement que l'on a deux fois amené la même carte, sans la nommer, alors ces dix évènements, ayant chacun la probabilité $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{100}$ exprimera leur probabilité moyenne; $\frac{2}{100}$ exprimera de même celle des 45 autres évènements ayant chacun la probabilité $\frac{2}{100}$: ainsi la probabilité propre de l'évènement sera $\frac{1}{7}$.

Il peut paroître singulier que la probabilité propre de l'évènement, au lieu d'être la même ici que dans le cas de l'évènement déterminé, soit sensiblement moindre, qu'elle influe différemment sur la crédibilité du témoin; qu'ainsi le même homme soit moins croyable lorsqu'il dit, en général, qu'il a vu amener deux fois de suite la même carte, que lorsqu'il dit qu'il a vu amener deux fois de suite telle carte en particulier. Cela vient de ce que, dans le second cas, il y a neuf autres combinaisons possibles, dont l'énonciation ne seroit pas plus probable que celle qu'il a faite, au lieu que dans le premier, toutes les autres énonciations qu'il n'a pas faites, sont plus probables; c'est que dans le premier cas c'est seulement le fait extraordinaire qu'il a énoncé; & que dans le second, il a énoncé un fait extraordinaire, par rapport à une partie des évènements possibles, & un fait commun par rapport à une autre partie. Dans le premier, il ne s'agit que du fait extraordinaire; dans le second, il s'agit du fait extraordinaire & du fait déterminé, qu'il faut comparer à la fois à

des faits déterminés plus ordinaires, & à des faits déterminés qui lui sont semblables.

On suivra encore la même règle, s'il s'agit de faits indéterminés qui renferment plusieurs combinaisons d'une probabilité différente.

Supposons, par exemple, qu'on me dise qu'un joueur de trictrac a cinq fois de suite amené plus de dix points.

Comme nous ne considérons ici que le nombre des points, nous avons, pour chaque coup, 11 évènements possibles; c'est-à-dire, 11 dés, depuis 2 jusqu'à 12, dont les probabilités sont $\frac{1}{36}$, $\frac{2}{36}$, $\frac{3}{36}$, $\frac{4}{36}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{6}{36}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{4}{36}$, $\frac{3}{36}$, $\frac{2}{36}$, & $\frac{1}{36}$, & les deux derniers sont les seuls qui montent au-dessus de 10. Cela posé, comme on ne considère ici que la valeur de la somme des points dans chaque coup, il n'y aura que $\frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$, ou 3003 évènements, dont 6 seulement appartiennent à la combinaison proposée; or, comme la probabilité de ces six coups est $\frac{1}{12^5}$, on aura $\frac{1}{12^5 \cdot 6}$ pour leur probabilité moyenne, & $\frac{11^5}{12^5 \cdot 2997}$ sera la probabilité des autres coups: la probabilité propre de l'évènement sera donc ici $\frac{2997}{11^5 \cdot 6 + 2997}$, ou $\frac{2997}{969,303}$.

V I.

De la même manière que les évènements, qui ont une probabilité propre au-dessous de $\frac{1}{2}$, deviennent moins croyables à mesure que cette probabilité diminue, les évènements vraisemblables en eux-mêmes, & dont la probabilité propre est au-dessus de $\frac{1}{2}$, deviennent plus croyables à mesure que cette probabilité augmente, quoiqu'attestés

Mmm ij

par un nombre égal de témoins. C'est ainsi, par exemple, qu'un fait astronomique qui se trouveroit d'accord avec la théorie de la gravitation, seroit cru facilement sur l'affertion d'un seul Savant, même par ceux qui n'auroient pas vérifié ses calculs; tandis que, si le même Savant avoit annoncé un fait contraire à cette théorie, il auroit besoin d'une assez grande autorité, même pour que l'on crût devoir raisonnablement examiner ses calculs.

V I I.

Si nous considérons maintenant deux classes d'événemens seulement A & B , que la probabilité des événemens A soit a & b , celle des événemens B , a étant plus grand que b ; qu'il y ait m événemens A , & n événemens B différens, la probabilité propre d'un événement déterminé de la classe des B sera exprimée par $\frac{b \cdot (m + n - 1)}{ma + b(m + n - 1)}$: quantité qui approchera de $\frac{b}{a + b}$ si m est beaucoup plus grand que n , mais ne pourra jamais être au-dessous, & ne lui sera rigoureusement égale que lorsque $n = 1$. Elle approche beaucoup de $\frac{a}{a + b}$, si $m = n$, & que a soit incomparablement plus grand que b ; & la valeur de cette probabilité propre pourra d'ailleurs surpasser $\frac{a}{a + b}$, mais seulement dans le cas où $n > m$, & elle aura $\frac{1}{2}$ pour sa limite lorsque $a = b$.

Supposons, par exemple, qu'un certain événement quelconque ne soit pas arrivé à un seul individu sur cent millions d'individus de la même espèce. Alors $\frac{1}{100,000,000}$ exprimera la probabilité qu'il arrivera à un individu donné, & $\frac{100,000,000}{100,000,000}$ celle qu'il n'arrivera pas.

Si, après cela, un témoin raconte que cet événement est arrivé à un individu déterminé, alors, comme il pouvoit également arriver à tous ceux de la même espèce, on aura pour m & n de très-grands nombres égaux entr'eux, a surpassera b incomparablement; en sorte qu'on s'écartera peu de la vérité en supposant $\frac{1}{50.000,000}$ l'expression de la probabilité propre de l'évènement.

Mais nous traiterons dans la suite plus en détail de l'application de cette méthode à la probabilité que peuvent avoir les évènements naturels, pour ceux qui ne les ont point personnellement observés.

V I I I.

Je vais maintenant essayer de faire à une question de critique l'application des principes que je viens d'établir. Newton paroît être le premier qui ait eu l'idée d'appliquer le calcul des probabilités à la critique des faits. Il propose, dans son ouvrage sur la chronologie, d'employer la connoissance de la durée moyenne des générations & des règnes, telle que l'expérience nous la donne, soit pour fixer d'une manière du moins approchée, des points de chronologie fort incertains, soit pour juger du plus ou du moins de confiance que méritent les différens systèmes imaginés pour concilier entr'elles des époques qui paroissent se contredire.

Quelquès philosophes se sont servis depuis de cette évaluation de la durée moyenne des règnes, pour prouver le peu de probabilité de la durée attribuée par d'anciens historiens à certaines suites de Rois, & montrer par-là combien peu cette partie de leur histoire méritoit de croyance. Ils ont pensé que la probabilité propre des faits devoit influer sur le poids qu'il falloit attribuer aux témoignages qui les attestent, & en ont conclu que, malgré l'autorité des historiens les plus accrédités, les faits invraisemblables devoient être rejetés.

Le savant Fréret, qui a combattu les principes de la chronologie de Newton, regardoit comme une espèce d'usurpation l'usage qui commençoit à s'introduire, d'employer dans la critique le calcul des probabilités : il a destiné un de ses Mémoires à essayer d'en montrer l'inutilité & le danger. Ce calcul, selon lui, doit se borner à la théorie des jeux de hasard; on en connoissoit cependant alors des applications aux probabilités de la vie humaine, aux emprunts en rentes viagères ou en tontines, & même à quelques questions de Droit; mais il paroît que Fréret, quoiqu'il eût en physique, en mathématiques & sur-tout en astronomie, des connoissances fort étendues, ne connoissoit pas les travaux de Halley, des Bernoulli, & de Moivre.

Il apporte pour motif principal de son opinion, que, dans les jeux de hasard, le nombre des combinaisons possibles est fini, ou du moins donné par une théorie rigoureuse: avantage que l'on perd nécessairement lorsqu'on veut appliquer le calcul à la probabilité des faits naturels.

Il est vrai qu'alors on ne connoissoit pas, comme aujourd'hui, une méthode directe de calculer la probabilité des évènements futurs ou inconnus d'après l'observation des évènements passés, ou plutôt de déterminer la valeur moyenne de cette probabilité: mais on pouvoit employer le calcul d'après cette hypothèse, que la suite des évènements futurs sera semblable à celle des évènements passés; hypothèse qu'on savoit déjà avoir une exactitude suffisante, lorsque le nombre des observations est très-grand en lui-même, & par rapport à celui des évènements inconnus ou futurs dont on cherche la probabilité.

Suivant toute apparence, quelques applications de calcul trop hypothétiques, fondées sur de faux principes, ou même très-bizarres, qui avoient eu alors une sorte de célébrité par leur singularité même, avoient frappé l'esprit naturellement juste & sage de ce Savant, & l'avoient prévenu contre des recherches pour lesquelles ces premiers

essais n'étoient pas propres à inspirer de la confiance; mais il ne nioit certainement pas le principe général, qu'il faut avoir égard à la probabilité propre, soit physique, soit morale, des évènements; peu de critiques en ont même fait un usage plus heureux, & il y a eu dans ce siècle peu d'érudits qui aient plus fortement senti l'utilité de l'étude des sciences naturelles, & qui s'y soient livrés avec plus de zèle & de succès.

Parmi ceux qui ont adopté le même principe, on doit citer M. de Voltaire, qui peut-être même en a quelquefois abusé, sur-tout lorsqu'il a voulu l'appliquer à la probabilité morale des évènements, beaucoup plus difficile à évaluer que leur probabilité physique.

Dans le nombre des applications qu'il a faites de ce principe, on lui reproche sur-tout d'avoir employé le peu de probabilité qu'il suppose à la très-longue durée du règne des sept Rois de Rome, pour jeter de l'incertitude sur cette partie de l'Histoire Romaine. Comme ce fait est un de ceux auxquels il est le plus aisé d'appliquer le calcul, nous l'avons choisi pour exemple: nous allons donc chercher quelle est la probabilité propre de cet évènement, afin de voir si elle est assez petite pour affoiblir beaucoup le témoignage des historiens qui l'ont rapporté.

I X.

Nous observerons d'abord que ces Rois étoient électifs, & au lieu d'employer ici ou les générations des Rois héréditaires, qui ne peuvent s'y appliquer, ou celles des Rois électifs, qui nous donneroient un trop petit nombre d'observations, nous préférons une hypothèse qui ne doit pas s'écarter beaucoup de la vérité, en prévenant d'ailleurs qu'elle est un peu trop favorable à la longue durée des règnes.

Nous supposons donc, 1.^o que les Rois électifs peuvent être élus, ou peuvent commencer à régner depuis l'âge de 30 ans jusqu'à celui de 60; & qu'il est également

probable qu'ils seront élus à une époque quelconque prise dans cet intervalle. Nous supposons, 2.^o que, depuis 30 jusqu'à 90 ans, la mortalité est constante, c'est-à-dire, comme si de 60 hommes de 30 ans il en mouroit un par année, un sur 45 hommes de 45 ans, un sur 30 hommes de 60 ans, &c. supposition un peu trop favorable à la durée de la vie.

Cela posé, la plus courte durée de chaque règne sera d'un an, la plus longue de 60; la plus courte durée de sept règnes sera sept ans, & la plus longue 420.

Il eût été plus exact de diminuer les règnes chacun d'une demi-année, de manière que la plus courte durée fût 3 ans $\frac{1}{2}$, & la plus longue 416 $\frac{1}{2}$, ou d'augmenter de 3 ans $\frac{1}{2}$ la durée des sept règnes; mais la différence n'est pas ici très-considérable, & nous donnons encore cet avantage à l'opinion favorable à la longue durée de ces règnes.

X.

Soit en général n la plus grande durée exprimée en années, pour celui qui est élu le plus jeune, m pour celui qui est élu le moins jeune, & p le nombre des règnes. Si l'on prend la formule

$$\frac{[(n - m + 1) \cdot x(1 - x) - x^{n+1} + x^{m+1}]^p}{(1 - x)^{2p} \cdot \left[\frac{(n + m) \cdot (n - m + 1)}{2} \right]^p},$$

le coefficient de x^r dans cette formule, développée en série, exprimera la probabilité que les p règnes dureront r années.

Or ici, $n = 60$, $m = 30$, $p = 7$, & comme il faut compter les règnes depuis la fondation jusqu'à la mort de Tarquin, $r = 257$.

Il faudra donc chercher le coefficient de x^{257} dans la formule

$$\frac{[31x(1 - x) - (x^{61} - x^{31})]^7}{(1 - x)^{14} \cdot 45^7 \cdot 31^7}.$$

X I.

Si on appelle P ce coefficient qui exprime la probabilité que les sept règnes ont duré 257 ans, & qu'on veuille chercher la probabilité propre que cette durée a eu lieu, on observera qu'il y a ici 414 évènements, puisque les règnes peuvent durer depuis 7 jusqu'à 420 ans; que la probabilité de l'évènement déterminé étant P , celle de la probabilité moyenne des 413 autres évènements sera $\frac{1-P}{413}$, & qu'ainsi, la probabilité propre sera $\frac{413 P}{1 + 413 P}$: c'est donc P qu'il nous reste à chercher.

Pour cela, il suffira de développer le numérateur de la fonction ci-dessus, qui, en n'ayant égard qu'aux termes où le coefficient de x ne surpasse pas 257, donnera 24 termes; & comme on fait qu'en général, le coefficient de x^n dans $\frac{1}{(1-x)^m}$ est $\frac{n+m-1 \dots n+1}{1.2.3 \dots m-1}$, on aura facilement chacun des 24 termes & la valeur de P , qui sera $\frac{79^2}{1,000,000}$.

Nous aurons donc $P = \frac{79^2}{1,000,000}$, & la probabilité propre du fait sera $\frac{246,169}{1,000,000}$, ou, à très-peu de chose près, $\frac{1}{4}$.

X I I.

Si, au lieu de ce fait, nous examinons celui de l'Augure *Accius Nævius*, rapporté aussi par les écrivains de l'Histoire Romaine; comme jusqu'ici aucun rasoir n'a encore coupé de cailloux, en supposant seulement un million de faits contraires à ce récit, que nous puissions regarder comme certains, il suit de ce que nous avons dit, n.^o VII, que la probabilité propre de cette aventure seroit $\frac{2}{1,000,000}$ à peu-près.

Mém. 1784.

N n n

Supposons maintenant que, pour croire un fait, le placer dans la classe de ceux d'après lesquels on peut se permettre de raisonner, on exige une probabilité $\frac{9.999}{10.000}$, nous n'avons besoin que d'attribuer une probabilité $\frac{29.997}{29.998}$ au rapport des historiens qui ont parlé de la durée du règne des sept Rois de Rome; au lieu que, pour avoir la même probabilité, il en faudroit attribuer une de $\frac{449.949.001}{449.949.002}$ à l'historien qui a rapporté le fait.

On voit, dans le premier cas, un fait extraordinaire qui, tandis qu'un fait commun exigeroit seulement, pour avoir le même degré de croyance, qu'un ou plusieurs historiens ne se trompassent qu'une fois sur dix mille, exigeroit qu'ils ne se trompassent qu'une fois sur 29,998, ou près de 30000. Dans le second, on voit un fait tellement prodigieux, que la crédulité la plus excessive ne pourroit supposer aux historiens l'autorité nécessaire pour donner un motif suffisant de le croire.

X I I I.

On auroit pu, au lieu de la méthode que nous avons suivie, supposer à chaque Roi de Rome l'âge que les historiens lui donnent à son avènement, & employer, au lieu de l'hypothèse de *Moirre*, celle de *Lambert*, qui est beaucoup plus exacte, & conduit aussi à des suites sommales. On auroit eu alors une probabilité propre très-sensiblement au-dessous de $\frac{1}{4}$, mais elle n'auroit pas été assez petite pour placer cette durée des règnes au nombre des évènements qu'il faut rejeter, & elle seroit encore dans la classe de ceux qui exigent seulement des témoignages plus forts & beaucoup plus forts que n'en exigent les évènements ordinaires.

X I V.

Supposons maintenant qu'il y ait eu deux classes d'historiens, dont les premiers aient porté la durée des sept

règles à 257 ans, & les seconds à 140 ans seulement. En suivant les mêmes raisonnemens, on trouvera que, si ces derniers étoient les seuls, la probabilité que sept Rois ont régné 140 ans, est $\frac{8,887}{1,000,000}$; & par conséquent la probabilité propre de ce fait, si l'histoire l'avoit transmis seul, seroit $\frac{3,661,444}{4,652,557}$, c'est-à-dire, plus grande que $\frac{1}{2}$; & pour avoir une probabilité $\frac{9,999}{10,000}$, d'après le témoignage des historiens, il suffiroit que celle de ce témoignage fût $\frac{9,994}{10,000}$; c'est-à-dire, qu'au lieu qu'il faut, pour la durée de 257 ans, le témoignage d'un historien qui ne se trompe qu'une fois sur 29,998, il suffiroit, pour la durée de 140 ans, du témoignage d'un historien qui ne se trompât qu'une fois sur 1666.

Mais nous supposons des témoignages en faveur des deux durées, & d'après la théorie exposée ci-dessus, les probabilités propres des deux évènements, & d'un autre évènement indéterminé quelconque qui auroit pu avoir lieu, seront,

$$\text{Pour la durée de 140 ans} \dots \dots \dots \frac{3,661,444}{4,968,390},$$

$$\text{Pour la durée de 257 ans} \dots \dots \dots \frac{325,512}{4,968,390},$$

$$\text{Pour l'évènement indéterminé, non témoigné} \dots \dots \frac{990,321}{4,968,390}.$$

Désignant ces trois probabilités par a, b, c ; celle du témoignage en faveur de la durée de 140 ans par x ; celle du témoignage en faveur de la durée de 257 ans par y , nous aurons, pour probabilité résultante du témoignage pour le premier évènement, $\frac{x \cdot (1 - y)}{1 - xy}$; pour le second, $\frac{y \cdot (1 - x)}{1 - xy}$; pour que ni l'un ni l'autre n'ait lieu $\frac{(1 - x) \cdot (1 - y)}{1 - xy}$; & par conséquent,

$$\frac{a.x.(1-y)}{c + (a-c).x + (b-c).y + (c-a-b).xy} ;$$

$$\frac{b.y.(1-x)}{c + (a-c).x + (b-c).y + (c-a-b).xy} ;$$

$$\frac{c.(1-x).(1-y)}{c + (a-c).x + (b-c).y + (c-a-b).xy} ,$$

pour les probabilités des deux évènements témoins, & pour celle qu'aucun des deux n'a eu lieu. Pour que la probabilité fût égale entre les deux évènements, il faudroit que l'on eût $x = \frac{by}{a + (b-a).y}$, & dans l'exemple

proposé, $x = \frac{325,512.y}{3,652,557 - 3,327,045.y}$. Supposons $y = \frac{9,999}{10,000}$, nous aurons $x = \frac{9,987}{10,000}$; c'est-à-dire,

qu'un témoignage qui se tromperoit une fois sur 770, devroit être cru sur la durée de 140 ans, plutôt que le témoignage qui ne se tromperoit qu'une fois sur 10,000, sur la durée de 257 ans.

Supposons enfin x seulement égal à $\frac{9}{10}$, & voyons quelle valeur devroit avoir y , pour que l'évènement auquel il se rapporte ait une probabilité égale à $\frac{9,999}{10,000}$. Dans ce cas

on aura l'équation $y = \frac{338,589,476,666}{338,589,802,178}$; c'est-à-dire, qu'il

faudroit un témoignage qui trompât moins qu'une fois sur un million trente mille; ainsi, pour avoir une probabilité $\frac{9,999}{10,000}$ de la durée de 257 ans, il suffira de

pouvoir donner aux historiens qui l'ont rapportée, une probabilité telle qu'ils ne se trompent qu'une fois sur trente mille environ; mais si en même temps d'autres historiens qui se trompent une fois sur dix, ont fixé à ces mêmes règnes une durée de 140 ans, il faudra, pour avoir la même probabilité, en pouvoir supposer aux témoignages des premiers une telle, qu'ils ne se trompent qu'une fois sur environ un million trente mille.



M É M O I R E
SUR LA GRANDEUR APPARENTE
DES CORPS OPAQUES,

Vus sur un fond lumineux ou autrement.

Par M. LE GENTIL.

LA matière sur laquelle j'entreprends aujourd'hui d'entretenir cette assemblée, a déjà été traitée, & elle mérite de l'être plus d'une fois. La question est de savoir si un corps opaque quelconque vu tout entier au-devant d'un corps lumineux, tel, par exemple, que le Soleil, paroîtroit plus petit que s'il étoit vu à l'opposite, sans cependant changer sa distance à l'œil de l'observateur. Après avoir souvent réfléchi aux raisons pour & contre, j'ai cru qu'en cette matière, comme en toute autre matière de science, la voie de l'expérience (quand on peut y avoir recours) étoit toujours la plus sûre, & celle qui nous conduisoit le plus infailliblement au but. C'est donc dans l'intention de découvrir si les corps opaques perdent sensiblement de leur grandeur apparente, lorsqu'ils sont vus sur un fond lumineux, que j'ai fait les expériences qui font l'objet de ce Mémoire. Pour faire voir en peu de mots l'importance de cette matière, il suffira de faire remarquer que cette diminution, si elle existe, doit influer sur le diamètre de la Lune, dans la prédiction des éclipses de Soleil; sur le temps que Mercure & Vénus, dans leurs conjonctions écliptiques avec le Soleil, emploient à entrer sur son disque, & à en sortir; sur la grandeur réelle de ces planètes; & enfin sur plusieurs autres points de l'astronomie & de la physique, également intéressans pour le progrès de ces deux sciences. Avant que de rapporter mes expériences, je crois qu'il seroit bon de faire un précis histo-

La
le 14 Nov.
1753.
Reld
le 4 Mars
1786.

rique de tout ce qui s'est passé jusqu'à ce jour, parmi les Astronomes, de plus intéressant sur cette matière; je le crois même d'autant plus nécessaire, qu'on fera par-là plus à portée de voir ce que mes expériences y ont ajouté. Les passages de Mercure & de Vénus au-devant du disque du Soleil, observés dans le siècle passé, ont fait naître l'idée de la diminution de la grandeur apparente des corps opaques, lorsqu'ils sont vus sur un fond lumineux. Gassendi, un des grands philosophes de son temps, en a fait la remarque, pour la première fois, en 1631, dans la conjonction éclipitique de Mercure: personne, avant lui, n'avoit été assez heureux pour voir cette planète sur le Soleil. Ce célèbre philosophe fut dans le plus grand étonnement de voir que Mercure lui paroïssoit à peine sous un angle d'un tiers de minute; il n'avoit sous ses yeux que des observations qui avoient toutes été faites à la vue simple ou avec de très-courtes lunettes, & dans des circonstances où Mercure présente à la Terre, sinon tout son côté éclairé, au moins une assez grande partie. Il s'attendoit de le voir paroître sur le Soleil, à peu-près de la même grandeur que ces observations l'avoient établi, c'est-à-dire, sous un angle de deux ou trois minutes au moins. En lisant sa Lettre à Schickard, intitulée *de Mercurio in Sole viso*, l'on y voit qu'étant bien éloigné de penser que Mercure dût lui paroître si petit, il l'avoit d'abord pris pour quelque tache qui s'étoit formée nouvellement; qu'il reconnut enfin, par le mouvement propre & uniforme de cette prétendue tache, en peu de temps, que c'étoit Mercure: d'où il conclut la nécessité de diminuer la grandeur apparente des astres, beaucoup plus qu'on n'auroit pu se l'imaginer.

L'observation de Gassendi fut confirmée deux fois, dans le courant du siècle, une fois en 1639, par un passage de Vénus sur le Soleil, qui fut observé en Angleterre par *Horoccius* & *Crabtree*; & une autre fois en 1661, par un passage de Mercure sur le Soleil, qui fut observé à Dantzick par *Heyelius*. *Horoccius* n'ignoroit pas ce qui avoit été

remarqué dans le passage de Mercure sur le Soleil en 1631, touchant le diamètre apparent de cette planète ; cela lui servit d'avertissement pour le diamètre de Vénus, de sorte que cet Astronome ne fut pas surpris au point que l'avoit été Gassendi pour qui la chose avoit été nouvelle. Voici comment Horoccius s'exprime dans son Traité intitulé *Mercurius in Sole visus*, pag. 112, c. I. *Præcipue autem diametri Veneris apparentis mirabilem parvitatem lectoris consideratione dignam commendarem, nisi consimili in Mercurio novitate Astronomorum admirationem præocupasset Gassendus: et qui veritatem primus docere non possum, secundus confirmo. Videant ergo, jam altero & notabiliore exemplo, quantum decipiant planetarum radii in æstimandis eorum diametris.*

Hevelius, qui nous a conservé ce précieux Traité de Horoccius, sur le passage de Vénus au-devant du Soleil, dit, à l'occasion du diamètre de cette planète, que Mercure ne lui avoit paru, en 1661, que de 12 secondes, lorsqu'il passa sur le Soleil ; qu'on ne devoit pas s'en étonner, puisque le diamètre de Vénus, que les Astronomes les plus exacts faisoient encore de près de 4 minutes dans son périégée, n'avoit été trouvé que de 1' 16" seulement dans son passage au-devant du Soleil.

Comme les diamètres de Mercure & de Vénus, qui avoient été observés dans leurs passages au-devant du Soleil, différoient si considérablement de ceux que tous les Astronomes attribuoient à ces planètes, cela fit croire à plusieurs savans de ces temps-là, que quelque illusion optique pouvoit en être la cause. Schickard, célèbre professeur en astronomie & en hébreu dans l'université de Tubinge, fut de ce sentiment ; il composa, à l'occasion du diamètre de Mercure observé par Gassendi, une dissertation qu'il adressa à ce philosophe : on y voit les raisons qui lui faisoient croire que cette planète, lorsqu'elle est vue sur le Soleil, devoit perdre de sa grandeur apparente. La dilatation de la lumière du Soleil qui, par sa nature, se répand de tous côtés, & se renfle aux approches des

corps, en est, selon lui, la cause principale. Les lumières dont on a coutume de se servir pour éclairer les appartemens pendant la nuit, lui servent d'exemple : si l'on fait présenter au-devant d'une de ces lumières un bâton, & qu'on l'observe de loin, il paroîtra dentelé profondément à l'endroit par où passe la lumière ; d'où, par analogie, il conclut que les mêmes apparences doivent suivre Mercure lorsqu'il passe au-devant du Soleil. Horoccius convient avec Schickard, que la lumière se dilate à un point presque incroyable, lorsque, pour l'apercevoir, nous n'avons d'autre secours que celui de la vue simple. Il admet aussi l'expérience de cet Astronome, mais il la croit tout-à-fait étrangère à son sujet ; il prétend en effet que la diminution du bâton dont il est question dans l'expérience de Schickard, n'a d'autres causes que les humeurs de l'œil, qui rompent & qui amplifient les rayons de la lumière ; mais que si l'on reçoit sur un mur l'ombre du bâton, elle paroîtra d'une grandeur uniforme. Or, continue Horoccius, c'est l'ombre de Mercure & de Vénus que l'on observe, lorsque l'on reçoit sur un tableau, dans la chambre obscure, l'image du Soleil qu'on a fait passer à travers une lunette, ce qui modère tellement les rayons de cet astre, que la vue n'en est point offensée. On n'a donc rien à craindre alors de la trop grande dilatation des rayons du Soleil, & Vénus & Mercure ont été vus de la même grandeur qu'ils devoient paroître. Pour mieux combattre son adversaire, Horoccius se sert des éclipses de Soleil, parce qu'à la simple vue l'on juge toujours la partie éclipsée trop petite, au lieu que les lunettes la représentent, aussi-bien que le diamètre de la Lune, dans sa véritable grandeur apparente : il cite l'éclipse du 22 Mai 1639, & celle du 12 Mai 1621, dont il a observé la première & Gassendi la seconde.

Mais quel fonds peut-on faire sur ces observations dont parle Horoccius ? Quand même Gassendi & lui auroient excellé dans l'art d'observer, cet art étoit alors très-borné, les

les moyens leur manquoient pour l'exactitude, puisque le micromètre n'étoit point encore connu. Sur une quantité aussi grande qu'est celle du diamètre apparent de la Lune, comparé au diamètre apparent de Mercure, ils pouvoient aisément se tromper dans leur estime d'une ou deux minutes, sans que l'erreur pût être sensible. Les observations de Bouillaud, le plus célèbre Astronome de ces temps-là, ne sont marquées que dans cette précision, & par conséquent les deux observations dont parle Horoccius, n'attaquent en rien le sentiment de Schickard.

Il est aisé de voir, par ce qui vient d'être dit, que quoiqu'on eût, du temps de Gassendi & d'Horoccius, l'idée de la diminution des corps opaques lorsqu'ils sont vus sur un fond lumineux, on n'avoit cependant pu parvenir à établir rien de certain sur ce sujet. Personne en effet n'avoit cherché les moyens de mesurer avec exactitude les diamètres de Mercure & de Vénus, lorsqu'ils nous présentent leur côté éclairé. On peut joindre à cela que la méthode grossière dont les Astronomes s'étoient servie pour mesurer le diamètre de ces planètes dans leurs passages au-devant du Soleil, avoit dû influencer sur l'exactitude de leurs observations.

M. Huguens, qui est venu dans la suite, a à la vérité observé le diamètre éclairé de Vénus, avec une exactitude qui a surpassé de beaucoup celle de ses prédécesseurs; mais comme il ne paroît pas avoir eu en vue la question présente, je n'insisterai pas sur son observation: je me contenterai seulement de faire remarquer, comme en passant, qu'entre son résultat & celui d'Horoccius & de Crabtrée, il y a 17 à 18 secondes de différence, dont Vénus leur auroit paru plus petite dans son passage au-devant du Soleil. Or, quoique l'observation d'Horoccius & de Crabtrée (comme je l'ai remarqué un peu plus haut) ne soit pas à l'abri de toute censure, cette quantité m'a paru trop considérable pour ne pas mériter attention, d'autant mieux

Mém. 1784.

O o o

que j'ai pris un milieu entre les résultats de ces deux Astronomes.

L'expérience faite par Schickard, du bâton au-devant d'une chandelle, quoique simple & grossière, m'ayant paru mériter quelque attention, j'ai imaginé un moyen de la répéter beaucoup plus exactement.

J'ai pris une lame de cuivre d'un pouce de largeur & de cinq à six de longueur, médiocrement polie. Je l'ai élevée au dessus d'une table, de façon que ses deux surfaces fussent perpendiculaires, & ses deux grands côtés parallèles à l'horizon; je l'ai arrêtée dans cette position, par ses deux extrémités. J'ai mis, à la distance d'environ six pieds de cette règle, un large oculaire de sept pouces & quelques lignes de foyer. Cet oculaire étoit fermement arrêté sur une règle de bois placée horizontalement. Cette règle portoit un chassis peint avec du blanc de céruse, & bien uni, de manière que l'oculaire étoit entre le chassis & la lame de cuivre. Le chassis étoit destiné à recevoir l'image de la lame de cuivre; il pouvoit s'approcher ou s'écarter de l'oculaire à volonté, étant construit de façon que la règle de bois entroit dedans fort exactement, & il étoit facile de l'arrêter à un point fixe quelconque, par une vis qu'on avoit fait pratiquer en dessous. Le tout étoit fixé très-solidement, & de niveau avec la lame de cuivre. Je plaçai, pendant la nuit, une très-forte bougie au-devant de la lame, & une autre aussi forte par-derrrière. J'avois partagé verticalement la lame de cuivre par un grand carton, afin que la bougie la plus proche de l'oculaire n'éclairât que la moitié de la lame; & d'ailleurs la flamme de la bougie plus éloignée étoit assez longue pour être aperçue au-dessus & au-dessous de la partie obscure de la lame. Les choses étant ainsi disposées, j'approchai mon chassis jusqu'à ce que je visse distinctement la peinture de mon objet, & ayant ferré la vis, je l'arrêtai à ce point. Les principaux phénomènes que je me contenterai de rapporter, sont au nombre de

deux. Il partoit des deux bords de l'image de la partie éclairée de la lame, une lumière blanchâtre qui, semblable à la queue d'une comète, alloit toujours en s'affoiblissant, à proportion qu'elle s'éloignoit des bords de l'image de la lame, & qui finissoit à peu de distance. Une semblable lumière paroissoit aussi sur les bords de la représentation de la partie obscure de la lame, mais avec cette différence qu'elle s'étendoit, dans celle-ci, sur une partie de la largeur de cette représentation. Pour mesurer actuellement la partie éclairée & celle qui étoit opaque, j'avois fait diviser une échelle en 100.^{es} de lignes, & l'ayant fait évider en dedans, je mis à la place des lignes, des soies de cocon très-déliées. Ces soies formoient une espèce de réticule, dont je me servis au lieu de micromètre, & que j'avois jugé très-propre pour en faire les fonctions. Il m'apprit, par un grand nombre d'observations réitérées & faites avec grand soin, que la partie opaque de la lame paroissoit $\frac{1}{10}$ de ligne plus petite que la partie éclairée; mais, pour en rendre l'effet encore plus sensible, j'ai imaginé l'expérience suivante.

J'ai fait tourner & arrondir, le plus exactement qu'il m'a été possible, deux plaques de cuivre dont la plus grande avoit onze lignes, & la plus petite neuf lignes & demie de diamètre; je les ai substituées à la lame de cuivre, & je les ai placées à deux pouces ou environ de distance l'une de l'autre; leur direction répondoit à celle de l'oculaire & du châssis, afin qu'abaissant ou élevant l'une des pièces, je pusse faire concourir leurs images l'une sur l'autre. Je plaçai une seule bougie en devant, mais un peu à côté; & le tout s'étant peint sur le châssis, je fis mouvoir une des pièces, jusqu'à ce que le bord inférieur d'une des images rasât le bord supérieur de l'autre; je fis même en sorte qu'elles avançassent un peu l'une sur l'autre, sans cependant que la chose pût être trop sensible. Je changeai la bougie de position en la plaçant par-derrrière, & faisant en sorte que les deux cercles fussent vus tout entiers sur

la flamme de la bougie; j'aperçus alors très-distinctement & sans peine une interruption entre les deux ombres, qui me laissoit entrevoir la lumière. Je vis aussi, comme dans la première expérience, une lumière blanchâtre qui passoit par l'intervalle que formoit l'interruption des deux ombres, & qui s'étendoit sur une partie de ces ombres. Que peut-on conclure de cette expérience, sinon que les rayons de la lumière, pour former cette interruption & se faire apercevoir, s'étoient fléchis deux fois & en différens sens avant que de continuer leur route jusqu'à l'oculaire; qu'outre ces modifications qu'ils avoient souffertes, ils avoient aussi un peu avancé sur la surface du premier cercle avant que d'aller joindre l'autre cercle, ce qui se prouve par cette lumière pâle & blanchâtre que j'ai aperçue de part & d'autre sur les deux cercles; & que par conséquent les corps opaques perdent de leur grandeur apparente quand ils sont vus tout entiers sur un corps lumineux.

On ne peut pas opposer à mes expériences ce que nous avons vu qu'Horoccius avoit objecté à Schickard. Mon oculaire me peignoit la représentation de mes cercles, précisément de la même façon que les objectifs ou les lunettes nous représenteroient, soit une éclipse de Soleil, soit un passage de Vénus ou de Mercure sur le disque apparent de cet astre; mais, pour avoir une démonstration complète de cette diminution, & pour savoir en même temps, d'une façon encore plus exacte, quelle en doit être la quantité relativement aux lunettes de différentes longueurs, & aux objets plus ou moins éclairés, j'avois commencé plusieurs expériences de différentes espèces, que le temps ne m'a pas permis d'achever: j'en rapporterai cependant une que j'ai faite il y a plusieurs mois avec une lunette de sept pieds & demi, dans une maison, rue des Postes. L'on peut voir d'un donjon appartenant à cette maison, un globe qui est placé à l'extrémité du dome des Invalides: le diamètre apparent de ce globe vu à cette distance, est environ quinze fois plus petit que le diamètre

apparent du Soleil, & par conséquent je pouvois espérer de voir ce globe tout entier sur le Soleil, quand cet astre viendrait à passer par-derrrière. Ayant saisi ce moment, je mesurai le diamètre horizontal du globe, que je trouvaï égal à 165 parties de mon micromètre. Il est bon de faire remarquer que les bords de ce globe m'ont paru tranchés avec une si grande netteté, que j'ai pu m'assurer, à une partie de micromètre près, de la quantité que je rapporte, & s'il y a eu quelqu'erreur dans l'observation, j'ose dire qu'elle a toute été en excès. Dans le cas présent, le globe étoit vu tout entier sur un corps très-lumineux; il falloit ensuite que je me trouvasse entre le Soleil & le globe, à peu-près sur la même ligne, afin qu'il l'éclairât de mon côté, pour mesurer une seconde fois le même diamètre, sans être obligé de changer ma distance de ce globe. Dans ce second cas, le diamètre du globe ne m'a paru guère plus grand que 175 parties du même micromètre, ni plus petit que 173; d'où je conclus qu'il m'avoit paru de 9 à 10 parties plus petit lorsque je l'observai au-devant du Soleil, qu'à son opposé. Ces 9 à 10 parties répondent, dans mon micromètre, à près de 6 secondes de degré.

Ce seroit donc de cette quantité, ou à peu-près, dont feroient diminués les diamètres des corps opaques vus sur un fond lumineux; mes premières expériences feroient cette quantité un peu plus grande. Il résulte toujours de toutes ces expériences, que les corps opaques, vus sur un fond lumineux, éprouvent à nos yeux une diminution réelle, lorsque nous mesurons leurs diamètres apparens avec quelque instrument, dans cette position, & que cette diminution est d'environ 5 à 6 secondes; ce que j'ai cru pouvoir être fort utile dans l'astronomie; j'invite, au surplus, les Astronomes à tenter de nouvelles expériences & observations sur une matière aussi intéressante.



M É M O I R E

*SUR LE FROID observé à l'Observatoire royal
& aux Chartreux, à la fin de 1783.*

Par M. LE GENTIL,

Lû
le 20 Janvier
1784.

J'AVOIS deux thermomètres placés à côté l'un de l'autre, un à esprit-de-vin, que j'ai construit; & un à mercure, de M. Lavoisier, pareil à celui de M. Cassini, & qui ont été présentés à l'Académie par cet Académicien. Il est divisé en huitièmes, comme celui de M. de Cassini; & ayant été éprouvés dans les caves, ils ont marqué le même point.

Le 29, à 7 heures $\frac{1}{2}$ du matin, thermomètre à esprit de-vin	— 9 ^d .
A 6 heures du soir	— 10 ^d & 10 $\frac{1}{2}$.
Thermomètre de M. Lavoisier	— 9 $\frac{3}{4}$.
A 3 heures après midi	— 7 ^d $\frac{1}{2}$ & 8.
Le 30, à 7 heures $\frac{1}{2}$ & à 8 heures, thermomètre à esprit-de-vin	— 12 $\frac{1}{8}$.
Thermomètre de M. Lavoisier	— 12 $\frac{6}{8}$.
A 2 heures après midi, thermomètre à esprit-de-vin..	— 9 $\frac{7}{8}$.
Thermomètre de M. Lavoisier	— 10 $\frac{1}{8}$.
A 5 heures après midi, thermomètre à esprit-de-vin..	— 11.
Thermomètre de M. Lavoisier	— 11 $\frac{3}{4}$.
A 9 heures du soir, thermomètre de M. Lavoisier...	— 12.
Thermomètre de M. Lavoisier	— 12 $\frac{2}{4}$.
Le 31, à 7 h $\frac{1}{2}$ du matin, thermomètre à esprit-de-vin..	— 11.
Thermomètre de M. Lavoisier	— 11 $\frac{2}{4}$.

Mais il paroît que le plus grand froid est arrivé entre minuit & 5 heures du matin: en effet voici les observations de M. Cassini qui le confirment.

Son thermomètre étoit plus élevé que le mien de 7 à

8 pieds, étant placé extérieurement à l'embrasure de la fenêtre du cabinet, du quart-de-cercle mobile, plein nord.

Le 28 Décembre, à 8 heures du matin..... — 3^d.

Le 29, à 8 heures du matin..... — 7.

Le 30, à 7 heures $\frac{1}{2}$ du matin..... — 12 $\frac{7}{8}$.

A 9 heures du soir..... — 14 $\frac{1}{8}$.

A minuit $\frac{1}{4}$ — 15 $\frac{3}{8}$.

Pendant la nuit du 30 au 31, le ciel se couvre, le froid diminue, & le dégel se prépare.

Le 31, à 8 heures du matin..... — 10^d

A midi..... — 7 $\frac{1}{2}$.

Ces observations, du temps du plus grand froid, s'accordent avec ce que le P. Dom Germain a observé aux Chartreux de Paris, & qu'il a bien voulu me communiquer.

Le 20 Décembre, le thermomètre bien placé, vu à 7 heures & demie, 7^d au-dessous de zéro. Baromètre 28 pouces 3 lignes. Vent N. N. O.

Le 28 il a neigé toute la journée; il est tombé 7 ou 8 pouces de neige. Le Thermomètre est resté à 2 degrés au-dessous de zéro. Le Baromètre 27 pouces 4 lignes. Vent N. E.

Le temps s'est découvert pendant la nuit.

Le 29 le thermomètre, à 8 heures, étoit à 10^d au-dessous de zéro. Le baromètre 27 pouces 10 lignes. Vent N. O. A 2 heures après midi, 7^d sous zéro.

Le 30, à 8 heures, 13^d $\frac{1}{2}$ au-dessous de zéro. Le baromètre 27 pouces 9 lignes. Vent N. E. A 2 heures après midi, 11^d au-dessous de zéro.

Le 31, à 5 heures du matin, 15^d au-dessous de zéro. Le Baromètre 27 pouces 7 lignes. Le vent E. Sur les 6 heures du matin, le temps s'est couvert. A 2 heures après midi, 5^d sous zéro. Le temps s'est adouci, & le 1.^{er} Janvier il a commencé à dégeler. A 2 heures après midi, 4. degrés $\frac{1}{2}$ au-dessous de zéro. Vent de S. E.



R E M A R Q U E

S U R

LES VENTS QUI RÉGNENT À PARIS
ET DANS LES ENVIRONS

Par M. LE GENTIL.

Lû
le 3 Mars
1784.

J'AI l'honneur d'annoncer à l'Académie que je lui demande à prendre date parmi les Mémoires qu'elle a destinés à l'impression, dans le volume de 1781, pour une conclusion que j'ai tirée d'après un très-grand nombre d'observations que j'ai faites, tant pendant mes voyages, que depuis mon retour; conclusion qu'on peut aussi entrevoir dans la dissertation du Docteur Halley, sur les vents généraux & alizés.

Cette conclusion, dis-je, est que, dans notre climat, à Paris & dans les environs, les vents généraux sont de la partie de l'Ouest, c'est-à-dire, qu'ils sont variables du Nord-ouest au Sud-ouest, selon les saisons; que ces vents soufflent ici perpétuellement, comme les vents généraux & alizés sont perpétuellement de la partie de l'Est entre les tropiques. Les autres vents variables que nous ressentons, étant, selon moi, des espèces de vents rampans sur la surface de la terre, n'empêchent point que les vents de Nord-ouest au Sud-ouest ne soient constans au-dessus d'eux, c'est-à-dire, à 1200 ou 1500 toises & même plus, au-dessus de la surface de la terre.

C'est

C'est de cette conclusion, comme d'un fait, que je demande à prendre date, à l'Académie, parmi les Mémoires pour l'année 1781.

J'ai l'honneur de prévenir encore l'Académie que je travaille actuellement à un Mémoire sur le froid que nous avons ressenti cet hiver à Paris, comparé avec les hivers de 1684, 1709, 1740 & 1776; que ce Mémoire est déjà fort avancé; & que j'y fais entrer l'influence de ces vents généraux dont je parle.

REMARQUES ET OBSERVATIONS
SUR L'ASTRONOMIE DES INDIENS,
& sur l'ancienneté de cette Astronomie.

Par M. LE GENTIL.

Lû
le 13 Mars
1784.

J'AI déjà fait part à l'Académie, dans deux différens Mémoires, de ce que j'avois pu recueillir dans mon voyage à Pondichery, sur l'astronomie des Brames, & sur la conformité de cette astronomie avec celle des anciens Chaldéens: je vais l'entretenir aujourd'hui sur quelques nouvelles connoissances que j'ai acquises au sujet de cette astronomie.

Là religion & l'astronomie sont tellement liées ensemble chez les Indiens, qu'il est évident qu'elles sont à peu-près de même date chez ces peuples: il y a même lieu de croire que l'astronomie a précédé la religion, telle qu'elle existe aujourd'hui; en sorte que la religion, dans l'Inde, se peut dire en quelque sorte la fille de l'astronomie.

C'est sans doute une raison, indépendamment de celle du climat, c'est sans doute, dis-je, une raison pourquoi l'astronomie n'a fait aucuns progrès dans l'Inde, depuis son origine, ou depuis ses premiers inventeurs, que je suppose être des Indiens; pourquoi les Indiens, de nos jours, n'observent point le ciel; pourquoi enfin ils restent, à cet égard, dans une inaction si singulière à nos yeux. S'ils cultivent l'astronomie, ils n'y sont pas portés par les mêmes vues que nous, mais uniquement par des motifs de religion: ils montroient, à Pondichery, la plus grande indifférence pour mes instrumens d'astronomie, & pour les observations célestes que je faisois avec leur secours. Cette indifférence vient évidemment de ce qu'ils ne veulent pas emprunter la moindre chose des étrangers, & de ce

qu'ils se persuadent en savoir assez pour remplir le but unique qu'ils se sont de tout temps proposé en cultivant l'astronomie. En effet, cette science, toute imparfaite qu'elle peut être encore chez eux, leur a suffi, dans cet état d'imperfection, depuis plus de quatre mille ans, pour maintenir leur religion. Leurs tables du Soleil & de la Lune, qui ne paroissent pas avoir une date moins ancienne, sont encore passablement d'accord avec le ciel dans les conjonctions & les oppositions de la Lune, & en cela leur objet est rempli. Il est vrai que ces tables auroient certainement besoin de très-grandes corrections dans tout autre point de l'orbite lunaire, dans les quadratures, par exemple; mais que leur importent ces corrections? Il n'arrive point d'éclipses dans ces circonstances. Les quadratures ne sont donc nullement intéressantes pour eux. Le premier & le second quartier de la Lune n'ont de rapport à aucun article de leur religion. Or, il n'en est pas de même des éclipses qui ont, dans tous les temps, épouvanté les peuples foibles & ignorans. On sait que le peuple saisira toujours avec avidité les contes qu'on pourra lui faire sur ce phénomène; c'est ainsi que les Indiens ont de tout temps été bercés par les Brames, & endormis avec la fable, que les signes que l'on remarque quelquefois dans le Soleil & dans la Lune (car ils ne connoissent point les termes d'éclipses), proviennent d'un grand dragon ou serpent qui, dans ce moment, cherche à avaler le Soleil ou la Lune; & que ce n'est qu'avec les prières les plus ardentes & les plus ferventes, qu'ils parviendront à obtenir la délivrance de l'un ou de l'autre astre que le dragon cherche à dévorer: malheur qui, s'il arrivoit, leur ajoutent les Brames, entraîneroit pour jamais la privation de la lumière dans le monde entier.

Presque tous les termes astronomiques des éclipses sont tirés de cette fable, chez les Indiens: de-là les Brames ont imaginé le terme de *pat-ona-chandren*, qui veut dire *la Lune offensée par le dragon*, pour exprimer la distance

de la Lune à son nœud; c'est ce que nous appelons *l'argument de la latitude*.

Les Brames devoient donc annoncer aux peuples des phénomènes effrayans; ils devoient leur en marquer le jour & l'heure; leur prédire, pour ainsi dire, à point nommé, un évènement capable, par ses suites, de les obliger d'avoir recours à la divinité, & sur-tout aux Brames eux-mêmes, comme se disant les interprètes de la divinité, & les médiateurs des peuples auprès d'elle. En conséquence les Brames, pour s'attirer la vénération & le respect de ces peuples, & les tenir continuellement dans la crainte & dans la dépendance, ont eu un besoin essentiel du calcul des éclipses. Pour le faire, il leur a fallu étudier les mouvemens du Soleil & de la Lune. Nous sommes donc redevables à la religion des Brames, de tous les fragmens d'astronomie que nous retrouvons épars chez les Indiens, fragmens qui ne sont visiblement que des restes ou des débris d'un dépôt considérable d'observations astronomiques, & de recherches qui ont péri, & qui avoient servi de base aux Indiens pour établir leurs élémens, & leur théorie des éclipses.

Ils ont dans l'Inde, à ce qu'il m'a paru, deux différentes méthodes de calculer les éclipses: tous les Indiens sçavans que j'ai vus & interrogés là-dessus, à Pondichery, se sont accordés en cela. L'une de ces méthodes se nomme, selon eux, *vaquiam*, qui veut dire *nouveau*; & l'autre *sittandum*, c'est-à-dire, *ancien*.

La méthode que j'ai apportée avec moi, & que j'ai fait imprimer, est selon le *vaquiam*: je n'ai pu me procurer l'ancienne.

Huit à dix ans avant mon voyage, M. de l'Isle, de cette Académie, avoit déjà eu connoissance de deux méthodes de calculer les éclipses, selon les Indiens; l'une lui fut communiquée en 1750 par le P. Patoüillet; l'autre en

1754 par le P. Duchamp, Missionnaire. Ces deux méthodes, qui reviennent à peu-près au même, se trouvent au dépôt de la Marine; mais qu'elles sont loin de réunir l'ordre, la méthode, & la clarté nécessaires pour être facilement entendues! & j'ai eu souvent occasion, en lisant & étudiant ces méthodes, de n'avoir pu les connoître avant mon départ. Cependant, à l'aide des connoissances que j'ai pu acquérir à Pondichery, sur l'astronomie du pays, de la façon de procéder des Brames, d'envelopper & de cacher leurs opérations astronomiques, je suis parvenu à débrouiller plusieurs élémens très-importans de la théorie du Soleil, de la Lune, & des éclipses, & de les comparer à ceux qui me furent communiqués à Pondichery en 1768 & 1769.

J'ai fait voir, dans mon *Astronomie Indienne*, que les Brames de la côte de Coromandel avoient une époque qu'ils nommoient *caly-ougam*, & que cette époque remontoit trois mille cent deux ans avant Jésus-Christ.

Dans la méthode communiquée par le Père Patouillet, à M. de l'Isle, l'auteur semble, à la vérité, dater d'une autre époque que de *caly-ougam*; mais il déguise sa marche, & s'il ne paroît partir que de la mort de Salivaganam, arrivée la onzième année de la période de soixante ans des Brames, l'an 78 de Jésus-Christ, c'est un moyen de plus qu'il a employé de marcher à l'ombre de grands nombres qui masquent & voilent son principal point de départ. En effet, malgré les détours qu'il emploie, sans doute pour n'être point découvert, j'ai retrouvé l'époque *caly-ougam*, & la précession des équinoxes qu'il fait de 54", comme la supposent généralement tous les Brames.

Une chose est très-curieuse, ce sont des tables du Soleil & de la Lune, que l'on trouve à la suite de cette méthode, mais elles n'appartiennent point à la méthode; elles en supposent encore une autre tout-à-fait différente, que nous n'avons point, & qui vraisemblablement est perdue; car

il y a tout lieu de croire que le P. Patouillet en auroit eu communication ainsi que des tables. Au surplus, j'ai trouvé la clef de ces tables; je peux parler ainsi, car ces tables n'ont aucun titre; les chiffres n'y ont nulle valeur apparente: on ne distingue, au premier coup d'œil, qu'une multitude de nombres assez simples en apparence, rangés cependant avec une espèce d'ordre, mais que le Millionnaire, qui n'entendoit point la matière, n'a pu débrouiller sans doute. Il a pris ces nombres tels qu'on les lui a donnés, avec les fautes (car il y en a), & nous les a transmis de même.

Ces tables ont une forme lapidaire, c'est-à-dire, que je conjecture que, dans le principe, elles furent gravées sur des pierres d'où on les aura extraites. Je crois avoir quelques raisons de le soupçonner, & même d'assez vraisemblables; d'après les calculs que j'ai faits, leur époque paroîtroit environ mille ans plus ancienne encore que l'Ère *caly-ougam*, qui remonte déjà trois mille cent deux ans avant Jésus-Christ. Ces tables auroient par cette raison précédé le déluge; mais si en effet elles avoient été gravées sur des pierres, il n'y auroit rien d'étonnant qu'elles eussent résisté, & échappé à l'inondation générale; & Josèphe ne semble-t-il pas favorable à cette opinion?

Ces tables, pour le Soleil, sont comprises sous neuf carrés-longs, ou parallélogrammes, renfermant chacune soixante-dix petites cases. Dix de ces cases sont horizontales, ou de suite; & sept sont verticales.

Afin de conserver l'authenticité de ces tables, je les présente à l'Académie dans la forme qu'elles ont dans le manuscrit: j'ai cru qu'il suffisoit d'en exposer ici le premier & le neuvième carré, qui donneront suffisamment l'idée des sept autres.

La première suite de chiffres du premier carré, celle qui est en tête, renferme les nombres naturels depuis 1 jusqu'à 10.

Pareillement la première suite du carré suivant renferme la suite des nombres naturels depuis 10 jusqu'à 20, & ainsi de suite dans les sept autres carrés qui suivent; en sorte que le neuvième carré renferme à sa première suite les chiffres de la neuvième dizaine, ou depuis 80 jusqu'à 90 degrés.

Or, ayant supposé que ces nombres étoient une espèce de titre renfermant des degrés, j'en ai dès-lors conclu, avec la plus grande facilité, les autres nombres de chaque carré.

Cette première suite de chiffres n'étant donc évidemment autre chose, selon moi, que des degrés qui représentent la distance du Soleil à son apogée & à son périhélie en même temps; la seconde suite sera l'équation du centre du Soleil, exprimée en minutes de degré, & la troisième sera les secondes de ces minutes.

La quatrième renfermera le mouvement journalier du Soleil, exprimé en minutes de degré, en partant de son périhélie; & la cinquième marquera les secondes de ces minutes.

Ce mouvement, par cette raison, va en diminuant dans la table.

La sixième suite de cases renferme pareillement le mouvement journalier du Soleil, mais en partant de son apogée, en sorte que ce mouvement-ci fait tout le contraire du premier, puisqu'il va insensiblement en augmentant; enfin la septième suite donne les secondes.

Ces deux mouvemens s'avancent donc, pour ainsi dire, en sens contraire l'un de l'autre, pour se rencontrer & s'accorder ensemble à 90 degrés, où doit être la moyenne distance du Soleil à la Terre. Là, ils sont de la même quantité; ils forment ce que nous appelons le moyen mouvement journalier, qui est, dans le Soleil, de 59' 8", selon ces tables.

On voit encore que l'auteur suppose l'équation du centre du Soleil, de $130' 34''$ ($2^d 10' 34''$) à 90 degrés juste de son périégée: c'est ce que nous appelons la plus grande équation du centre du Soleil, que Ptolémée faisoit de $2^d 23' 10''$; mais les tables Indiennes ne la supposent, comme l'on voit, que de $2^d 10' \frac{1}{2}$: les Astronomes modernes ne trouvent que $1^d 56'$. L'on en doit conclure que la détermination des Indiens approche beaucoup davantage de la nôtre, que ne fait celle de Ptolémée.

Les tables de la Lune ont la même forme que celles du Soleil: on y trouve le moyen mouvement journalier de la Lune, de $790' 35''$ ($13^d 10' 35''$), & la plus grande équation de son centre, de $302' 26''$ ($5^d 2' 26''$). M. Cassini la suppose de $4^d 58' 44''$, & M. Halley de $4^d 57' 46''$.

Cette équation est la seule qui ait lieu dans les syzygies. C'est aussi la seule qu'il importoit aux Brames de connoître dans leur système d'appliquer l'astronomie au maintien de la religion.

On remarque dans la Lune une autre inégalité, dont on attribue la découverte à Ptolémée; celle-ci peut encore aller jusqu'à $2^d \frac{1}{2}$. Elle est très-considérable, comme l'on voit; mais comme elle ne se fait remarquer que dans les quadratures, les Brames qui ne font nulle attention à ces points de l'orbite lunaire, l'ont de tout temps ignorée, ils s'inquiètent même fort peu de son existence; si on leur en parle, ils ont l'air de ne pas seulement vous écouter.

À la suite de ces tables du Soleil & de la Lune, on en trouve une autre intitulée (*pour les Planètes*), & qui ne renferme cependant que les diamètres du Soleil & de la Lune. Cette table est construite avec un art tout-à-fait ingénieux, que ni les Hypparque, ni les Ptolémée, ni aucun astronome Grec de l'école d'Alexandrie, n'ont jamais connu; mais il a fallu encore deviner cette table, car le titre que l'on voit qu'elle porte, n'en peut guère indiquer l'usage. Elle m'a paru fondée sur trois suppositions, dont

dont l'une est conforme aux observations modernes les plus précises.

La première de ces trois suppositions est que, dans tous les cas possibles, depuis 0^d jusqu'à 90^d , le demi-diamètre apparent de la Lune & celui du Soleil ajoutés ensemble, sont égaux à un demi-degré, ou à $30'$. Cette supposition est à la vérité en défaut d'un peu plus d'une minute; mais il n'y a guère plus d'un siècle que nous ne connoissons pas en Europe la somme des demi-diamètres du Soleil & de la Lune, à une minute près.

La seconde supposition, qui suit de la nature de ces tables, est que le demi-diamètre du Soleil apogée est égal au demi-diamètre de la Lune dans ses moyennes distances; cette supposition est confirmée par les observations de nos jours: en effet, selon M. Cassini, ces diamètres ne diffèrent entr'eux, dans ces circonstances, que de $4''$, & selon M. Halley, ils ne diffèrent point du tout.

Enfin la troisième supposition est que le demi-diamètre apparent du Soleil, dans ses moyennes distances, excède de $2' 30''$ celui de la Lune apogée, supposition qui n'est en excès que de $1' 5''$ à $6''$.

D'après ces trois suppositions, l'auteur Indien a construit sa table dans la même forme que les précédentes. Les nombres naturels qui sont en tête de chaque carré, depuis 1 jusqu'à 90^d , représentent donc, pour le Soleil, les degrés de son éloignement à son apogée; & pour la Lune, ce sont les degrés de son éloignement à sa moyenne distance à la Terre, en allant à son apogée: en conséquence, la seconde suite de cases renferme les demi-diamètres apparens du Soleil, depuis son apogée jusqu'à 90^d de distance; la troisième suite donne les secondes.

La quatrième suite donne les demi-diamètres apparens de la Lune, depuis sa moyenne distance jusqu'à son apogée; la cinquième renferme les secondes.

Il suit de-là, que les demi-diamètres du Soleil vont en croissant, dans cette table, & ceux de la Lune en diminuant,

& cela selon une proportion qui est telle qu'un demi-diamètre quelconque , pris à volonté dans cette table, celui du Soleil , par exemple , à quelque degré qu'il réponde , est toujours complètement à un demi-degré de celui de la Lune , & réciproquement.

Je n'ai plus qu'un mot à dire concernant la latitude de la Lune , dont la table termine tout ce qui appartient au Soleil & à la Lune. L'inclinaison de l'orbite de la Lune n'est, dans cette table , que de $4^d\ 30'$; c'est le seul élément de la théorie de la Lune , qui diffère de nos tables , d'une quantité même assez considérable , car cette inclinaison s'observe de 5 degrés au moins.

Cette différence d'un demi-degré ou 30 minutes, suffit pour faire trouver éclipse une pleine Lune qui pourroit cependant n'être pas éclipse ; mais dans ce cas même, la Lune n'éviteroit l'ombre de la Terre que d'une très-petite quantité ; elle en effleurerait au moins la pénombre, & vraisemblablement en apercevrait-on quelques vestiges.

Nous ne savons pas comment les Bames ont déterminé l'inclinaison de l'orbite de la Lune : s'ils l'ont déduite des éclipses , on sait qu'à une si petite distance du nœud, une erreur de 4 à 5 secondes dans la latitude, en occasionne une de 4 à 5 minutes, à 90 degrés du nœud, dans l'arc qui mesure l'inclinaison de l'orbite.

Il est beaucoup plus vraisemblable de penser qu'ils ont déterminé cette inclinaison , en comparant la Lune à des étoiles remarquables. Cette méthode qu'ils paroissent avoir suivie dans toutes les observations qu'ils ont faites originairement sur la Lune , étoit infiniment plus sûre que la première ; pour qu'ils se trompassent en effet d'un demi-degré sur l'inclinaison , il eût fallu qu'ils se fussent trompés dans leurs observations , d'une quantité égale au diamètre entier de la Lune , ce qui est impossible.

Enfin des Astronomes qui ont déterminé la plus grande équation du centre de la Lune , à deux ou trois minutes près de ce que nous trouvons aujourd'hui pour cette

équation, ne peuvent pas avoir commis une erreur de 30 minutes & même plus sur l'inclinaison de l'orbite lunaire. Il se peut très-bien, & je serois assez porté à le penser, que les Brames, en construisant leurs tables, aient diminué à dessein l'inclinaison de l'orbite lunaire; à moins que l'on n'aime mieux supposer encore que cette inclinaison a augmenté depuis la construction de ces tables, comme on admet une diminution dans l'obliquité de l'écliptique depuis deux à trois mille ans.

Un fait est certain, c'est que la même table qui donne ici la latitude de la Lune de degré en degré, l'inclinaison de son orbite de $4^d 30'$ seulement, donne également la déclinaison du Soleil pour les mêmes degrés, & l'obliquité de l'écliptique de 24 degrés juste, mais que nous n'observons cependant aujourd'hui que de $23^d 28' \frac{1}{4}$; en sorte que la somme de l'obliquité de l'écliptique & de l'inclinaison de l'orbite de la Lune, est de $28^d 30'$ dans ces tables, & de $28^d 29$ à $30'$ dans les nôtres; ce qui sembleroit indiquer que les Brames auroient bien observé; & que l'inclinaison de l'orbite de la Lune auroit augmenté d'un degré ou environ, depuis leurs premières observations & la construction de leurs tables.

Dans la supposition que les Brames auroient diminué à dessein l'inclinaison observée de l'orbite de la Lune, on en pourroit peut-être trouver la raison dans les motifs qui les engagent à prédire les éclipses, mais je réserve ces détails pour nos assemblées particulières.

*TABLES INDIENNES des mouvemens du Soleil,
de la Lune, & de leurs diamètres apparens ; de la
latitude de la Lune, & de l'obliquité de l'Écliptique,
dont il est question dans le Mémoire précédent.*

Pour le Soleil.

Ravimanda.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Padacani.	2.	4.	7.	9.	11.	13.	16.	18.	20.	23.
Danagatti.	20.	20.	0.	19.	38.	57.	15.	33.	51.	8.
Bougogatti.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.
	26.	26.	26.	26.	25.	25.	24.	24.	24.	23.
	56.	56.	56.	56.	56.	56.	56.	56.	56.	56.
	50.	50.	50.	50.	51.	51.	51.	52.	52.	53.

11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
25.	27.	29.	32.	34.	36.	38.	41.	43.	45.
24.	40.	55.	10.	24.	37.	49.	0.	11.	21.
61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.
22.	22.	21.	21.	20.	29.	16.	17.	17.	16.
56.	56.	56.	56.	56.	56.	56.	56.	56.	57.
54.	54.	55.	55.	56.	57.	58.	59.	59.	0.

21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.
47.	49.	51.	53.	55.	57.	60.	62.	63.	65.
30.	38.	45.	51.	56.	59.	0.	0.	59.	57.
61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.
15.	14.	13.	12.	10.	9.	7.	6.	5.	4.
57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.
1.	2.	3.	4.	6.	7.	9.	10.	11.	12.

31.	32.	33.	34.	35.	36.	37.	38.	39.	40.
67.	69.	71.	73.	75.	77.	79.	70.	72.	84.
53.	49.	43.	36.	27.	17.	6.	54.	40.	25.
61.	61.	61.	60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.
3.	2.	0.	59.	57.	56.	55.	54.	52.	51.
57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.
13.	14.	16.	17.	19.	20.	21.	22.	24.	25.

41.	42.	43.	44.	45.	46.	47.	48.	49.	50.
86.	87.	89.	91.	92.	94.	95.	97.	98.	100.
8.	49.	28.	5.	40.	15.	50.	23.	53.	20.
60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.
49.	45.	45.	44.	42.	41.	40.	38.	37.	35.
57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.
27.	29.	31.	32.	34.	35.	36.	38.	39.	41.

51.	52.	53.	54.	55.	56.	57.	58.	59.	60.
101.	103.	104.	105.	107.	108.	109.	110.	112.	113.
45.	9.	32.	53.	11.	28.	43.	13.	7.	15.
60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.
34.	31.	30.	28.	26.	24.	22.	20.	18.	16.
57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	58.
43.	45.	46.	48.	50.	52.	56.	57.	58.	0.

61.	62.	63.	64.	65.	66.	67.	68.	69.	70.
114.	115.	116.	117.	118.	119.	120.	121.	121.	122.
21.	25.	28.	27.	27.	23.	17.	9.	59.	47.
60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.	59.	59.	59.
13.	11.	9.	6.	6.	4.	1.	59.	57.	55.
58.	58.	58.	58.	58.	58.	58.	58.	58.	58.
3.	4.	7.	8.	10.	12.	15.	17.	21.	21.

71.	72.	73.	74.	75.	76.	77.	78.	79.	80.
123.	124.	124.	125.	126.	126.	127.	127.	128.	128.
33.	14.	58.	36.	11.	44.	15.	44.	11.	36.
59.	59.	59.	59.	59.	59.	59.	59.	59.	59.
53.	51.	48.	45.	42.	40.	38.	36.	34.	32.
58.	58.	58.	58.	58.	58.	58.	58.	58.	58.
23.	25.	28.	31.	34.	36.	38.	40.	42.	44.

81.	82.	83.	84.	85.	86.	87.	88.	89.	90.
128.	129.	129.	129.	130.	130.	130.	130.	130.	130.
59.	19.	36.	51.	5.	15.	22.	21.	31.	34.
59.	59.	59.	59.	59.	59.	59.	59.	59.	59.
30.	27.	24.	22.	20.	17.	15.	12.	11.	8.
58.	58.	58.	58.	58.	58.	59.	59.	59.	59.
46.	49.	52.	54.	56.	59.	1.	4.	5.	8.

Pour la Lune.

Chandra.
Padacani.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
5.	10.	16.	21.	26.	31.	37.	42.	47.	52.
20.	40.	0.	19.	38.	35.	12.	28.	44.	59.
86a.	86a.	86a.	86a.	859.	859.	859.	859.	859.	858.
15.	15.	15.	11.	52.	43.	32.	21.	3.	51.
720.	720.	720.	720.	721.	721.	721.	721.	722.	722.
55.	55.	55.	59.	8.	27.	38.	49.	4.	19.

11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
58.	63.	68.	73.	79.	84.	89.	94.	99.	104.
13.	26.	38.	50.	9.	13.	23.	31.	37.	40.
858.	858.	857.	857.	857.	856.	856.	856.	855.	855.
36.	16.	58.	38.	22.	51.	30.	2.	48.	6.
722.	722.	722.	723.	723.	724.	724.	725.	725.	726.
35.	54.	5.	37.	48.	19.	40.	8.	21.	10.

21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.
109.	114.	119.	124.	128.	133.	137.	142.	146.	151.
39.	35.	26.	12.	51.	26.	57.	28.	57.	37.
854.	854.	853.	853.	852.	851.	851.	850.	850.	849.
43.	7.	42.	9.	48.	50.	50.	58.	16.	58.
726.	727.	727.	728.	728.	729.	729.	730.	730.	730.
37.	8.	28.	1.	22.	20.	40.	10.	14.	12.

31.	32.	33.	34.	35.	36.	37.	38.	39.	40.
156.	160.	165.	169.	173.	178.	182.	186.	190.	194.
5.	25.	0.	23.	45.	3.	15.	24.	30.	34.
849.	848.	847.	847.	846.	845.	845.	844.	844.	843.
10.	34.	58.	23.	39.	58.	23.	38.	3.	31.
732.	732.	733.	733.	734.	735.	735.	736.	737.	737.
0.	24.	12.	47.	31.	12.	47.	32.	7.	36.

41.	42.	43.	44.	45.	46.	47.	48.	49.	50.
198.	202.	206.	210.	213.	227.	221.	224.	228.	231.
34.	30.	24.	16.	58.	36.	11.	45.	15.	44.
842.	842.	841.	840.	839.	839.	837.	836.	835.	834.
51.	58.	21.	35.	42.	0.	45.	40.	35.	31.
738.	739.	739.	740.	741.	742.	743.	748.	745.	746.
19.	12.	49.	35.	28.	10.	25.	30.	38.	39.

51.	52.	53.	54.	55.	56.	57.	58.	59.	60.
235.	238.	241.	244.	247.	250.	253.	256.	259.	261.
6.	24.	37.	45.	45.	46.	41.	32.	27.	55.
833.	832.	831.	830.	829.	828.	821.	826.	824.	823.
35.	34.	31.	12.	33.	47.	1.	30.	48.	20.
747.	748.	749.	750.	751.	752.	753.	754.	756.	757.
35.	36.	39.	58.	31.	29.	3.	40.	21.	61.

496 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

61.	62.	63.	64.	65.	66.	67.	68.	69.	70.
264.	267.	269.	271.	274.	276.	278.	280.	282.	284.
30.	3.	28.	49.	6.	18.	28.	34.	28.	20.
822.	822.	821.	890.	819.	818.	816.	815.	814.	813.
53.	53.	13.	13.	2.	13.	58.	45.	54.	41.
758.	758.	759.	759.	762.	762.	764.	765.	766.	767.
13.	50.	57.	57.	8.	57.	12.	15.	16.	39.

Azamayanamou.

71.	72.	73.	74.	75.	76.	77.	78.	79.	80.
285.	287.	289.	290.	292.	293.	294.	295.	297.	298.
54.	35.	5.	39.	6.	28.	45.	57.	4.	6.
812.	811.	810.	809.	808.	806.	805.	804.	803.	802.
34.	25.	20.	5.	7.	43.	42.	31.	16.	9.
768.	769.	770.	772.	773.	774.	775.	776.	777.	779.
36.	45.	50.	5.	3.	37.	39.	39.	54.	1.

81.	82.	83.	84.	85.	86.	87.	88.	89.	90.
299.	299.	300.	301.	301.	301.	301.	309.	309.	302.
0.	50.	37.	10.	25.	59.	52.	4.	15.	26.
800.	799.	798.	797.	796.	794.	793.	792.	791.	790.
56.	30.	21.	20.	11.	51.	38.	23.	13.	35.
780.	781.	782.	783.	784.	786.	787.	788.	789.	790.
14.	31.	49.	50.	59.	19.	33.	47.	57.	35.

Pour les Planètes.

Abazarda.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Padacani.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.
Danam.	1.	2.	3.	4.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
Bouffam.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.
	59.	58.	57.	56.	54.	53.	52.	51.	50.	49.

11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.
13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	21.	22.	23.
14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.
47.	46.	45.	43.	43.	42.	41.	39.	38.	37.

21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.
15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.
24.	25.	26.	27.	29.	30.	31.	32.	33.	34.
14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.
36.	35.	34.	33.	31.	30.	28.	27.	27.	26.

31.	32.	33.	34.	35.	36.	37.	38.	39.	40.
15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.
36.	37.	38.	39.	40.	41.	42.	43.	44.	45.
14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.
24.	23.	22.	21.	20.	19.	18.	17.	16.	15.

41.	42.	43.	44.	45.	46.	47.	48.	49.	50.
15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.
46.	47.	48.	49.	50.	51.	52.	53.	54.	55.
14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.
14.	13.	12.	11.	10.	9.	8.	8.	6.	5.

Mém. 1784

Rrr

498 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

51.	52.	53.	54.	55.	56.	57.	58.	59.	60.
15.	15.	15.	15.	15.	15.	16.	16.	16.	16.
56.	57.	58.	58.	59.	0.	1.	2.	2.	3.
14.	14.	14.	14.	14.	14.	13.	13.	13.	13.
4.	3.	2.	2.	1.	0.	59.	58.	57.	57.

61.	62.	63.	64.	65.	66.	67.	68.	69.	70.
16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.
4.	4.	5.	6.	7.	7.	8.	8.	9.	9.
13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.
56.	56.	53.	54.	53.	53.	52.	52.	51.	51.

71.	72.	73.	74.	75.	76.	77.	78.	79.	80.
16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.
10.	10.	11.	12.	12.	12.	12.	13.	13.	13.
13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.
50.	50.	49.	48.	48.	48.	48.	47.	47.	47.

81.	82.	83.	84.	85.	86.	87.	88.	89.	90.
16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.
13.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	15.	15.
13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.
47.	46.	46.	46.	46.	46.	46.	46.	45.	45.

Les Tables suivantes représentent la latitude de la Lune & l'obliquité de l'écliptique: la clé que j'ai trouvée pour ouvrir l'entrée aux Tables précédentes servira pour les suivantes.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
24.	48.	73.	197.	121.	145.	170.	194.	218.	242.
23.	46.	8.	28.	44.	57.	10.	20.	23.	30.
4.	9.	14.	18.	23.	28.	37.	37.	42.	46.
44.	28.	11.	53.	34.	13.	52.	30.	8.	46.

Cranti.
Chach.
Cheba.

11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
266.	290.	314.	338.	361.	385.	408.	432.	455.	478.
28.	25.	15.	1.	41.	17.	47.	10.	28.	38.
51.	55.	60.	65.	69.	74.	78.	83.	87.	62.
23.	59.	35.	10.	44.	15.	45.	17.	42.	8.

21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.
501.	524.	547.	570.	592.	614.	636.	659.	680.	702.
41.	35.	22.	5.	27.	46.	58.	2.	50.	39.
96.	100.	105.	109.	113.	118.	122.	126.	130.	135.
30.	55.	18.	57.	52.	22.	26.	38.	53.	0.

31.	32.	33.	34.	35.	36.	37.	38.	39.	40.
723.	745.	766.	787.	808.	828.	848.	868.	887.	908.
56.	33.	40.	31.	9.	33.	47.	45.	37.	7.
139.	143.	147.	150.	154.	158.	162.	166.	169.	173.
3.	5.	3.	58.	50.	40.	26.	9.	49.	25.

Rrr ij

500 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

41.	42.	43.	44.	45.	46.	47.	48.	49.	50.
927.	946.	965.	983.	1001.	1019.	1037.	1054.	1071.	1088.
21.	27.	13.	41.	52.	50.	29.	48.	47.	26.
176.	180.	183.	187.	190.	194.	197.	200.	203.	206.
58.	30.	53.	23.	44.	2.	17.	29.	36.	40.

51.	52.	53.	54.	55.	56.	57.	58.	59.	60.
1104.	1120.	1136.	1152.	1167.	1181.	1196.	1220.	1223.	1237.
50.	54.	40.	5.	10.	54.	16.	14.	44.	15.
209.	212.	215.	218.	221.	223.	226.	228.	231.	233.
39.	35.	29.	17.	0.	41.	18.	49.	18.	43.

61.	62.	63.	64.	65.	66.	67.	68.	69.	70.
1250.	1262.	1274.	1286.	1297.	1308.	1319.	1329.	1338.	1348.
3.	31.	36.	20.	27.	30.	3.	9.	48.	7.
236.	238.	240.	242.	244.	246.	248.	250.	251.	253.
2.	18.	29.	35.	45.	27.	20.	7.	50.	29.

71.	72.	73.	74.	75.	76.	77.	78.	79.	80.
1356.	1365.	1373.	1380.	1387.	1394.	1400.	1406.	1411.	1416.
55.	20.	20.	53.	55.	29.	49.	33.	52.	46.
255.	256.	257.	259.	260.	261.	262.	263.	264.	265.
5.	34.	58.	19.	36.	47.	54.	57.	51.	40.

DES SCIENCES.

for

81.	82.	83.	84.	85.	86.	87.	88.	89.	90.
1421.	1425.	1428.	1431.	1435.	1436.	1437.	1439.	1439.	1440.
8.	6.	36.	29.	5.	14.	55.	0.	41.	0.
266.	267.	267.	267.	268.	268.	269.	269.	269.	270.
22.	0.	23.	59.	47.	47.	8.	28.	46.	0.

S U P P L É M E N T

Où l'on fait voir que les Équations aux différences ordinaires , pour lesquelles les conditions d'intégrabilité ne sont pas satisfaites , sont susceptibles d'une véritable intégration , & que c'est de cette intégration que dépend celle des équations aux différences partielles élevées.

Par M. M O N G E.

I.

ON fait que toutes les équations aux différences ordinaires à deux variables , appartiennent à des courbes réelles. En effet , pour le premier ordre , elles peuvent toutes , excepté une seule , être mises sous la forme $M dx + N dy = 0$; & par conséquent , étant pris un point à volonté , c'est-à-dire , étant données les valeurs de x & de y , on peut toujours trouver par cette équation l'inclinaison de la tangente à la courbe en ce point , ou , ce qui revient au même , trouver la direction du point décrivant , parce que cette direction est déterminée par le rapport de dy à dx , que donne cette équation. Pour le second ordre , toutes les équations à deux variables , excepté une seule , peuvent être mises sous la forme $L ddy + M ddx + N = 0$, L , M , N , renfermant les variables avec leurs différences premières. Ainsi , étant donné un point à volonté , & la direction de la tangente en ce point , ce qui détermine x , y , $\frac{dy}{dx}$; & faisant la valeur de ddx , une hypothèse arbitraire , ce dont on est le maître ; il est toujours possible , au moyen de

l'équation différentielle, de trouver la valeur de ddy , & par conséquent, le changement de direction que le point décrivant éprouve dans cet endroit de la courbe, ou, ce qui revient au même, de trouver le rayon de courbure de la courbe. Il en est de même des ordres supérieurs.

Lorsque les équations différentielles du premier ordre renferment plus de deux variables, on peut les diviser en deux classes; les unes, comme les suivantes,

$$dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2),$$

$$z^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) = a^2(dx^2 + dy^2),$$

sont élevées par rapport aux différences, & elles sont toutes regardées comme absurdes; les autres peuvent être ramenées à la forme linéaire

$$Ldx + Mdy + Ndz \dots = 0,$$

dans laquelle les coefficients $L, M, N \dots$ peuvent renfermer les variables sous des radicaux; & parmi ces dernières, celles qui ne satisfont pas à certaines conditions, sont encore regardées comme absurdes. Le nombre des conditions dont il s'agit ici, est toujours égal au nombre des variables, moins deux; par exemple, pour le cas de trois variables, si l'équation différentielle est mise sous la forme $dz = p dx + q dy$, l'équation de condition est $(\frac{dp}{dy}) = (\frac{dq}{dx})$, que l'on peut développer de la manière suivante :

$$L[(\frac{dM}{dz}) - (\frac{dN}{dy})] + M[(\frac{dN}{dx}) - (\frac{dL}{dz})] + N[(\frac{dL}{dy}) - (\frac{dM}{dx})] = 0.$$

Pour le cas de quatre variables, si l'équation différentielle est mise sous la forme $dz = p du + q dx + r dy$, les conditions sont

$$(\frac{d^2 p}{du dy}) = (\frac{d^2 q}{du dx}).$$

$$\left(\frac{d^2 p}{dx dy}\right) = \left(\frac{d^2 r}{du dx}\right),$$

& on peut les développer comme dans le cas précédent.

S'il y a cinq variables, & que l'équation différentielle soit sous la forme $dz = p dv + q du + r dx + s dy$, les trois conditions sont

$$\left(\frac{d^3 p}{du dx dy}\right) = \left(\frac{d^3 q}{dv dx dy}\right),$$

$$\left(\frac{d^3 p}{du dx dy}\right) = \left(\frac{d^3 r}{dv du dy}\right),$$

$$\left(\frac{d^3 p}{du dx dy}\right) = \left(\frac{d^3 s}{dv du dx}\right);$$

& ainsi de suite, pour un plus grand nombre de variables.

Je me propose de faire voir qu'il n'y a aucune équation différentielle qui soit absurde, si toutefois l'on entend par le mot qu'elle exprime, une propriété impossible, imaginaire,..... &c. Je ferai voir que toutes les équations différentielles expriment des propriétés réelles, soit qu'elles satisfassent ou non aux conditions que je viens de rapporter, je montrerai qu'elles sont toutes susceptibles d'une véritable intégration, & pour jeter sur cette matière un plus grand jour, j'exposerai ce que signifient, dans l'espace, celles qui sont à trois variables.

II.

DE toutes les équations aux différences ordinaires du premier ordre, & à deux variables, il n'y en a qu'une seule qui ne soit pas linéaire, & cette équation est

$$M^2 dx^{2m} + N^2 dy^{2m} = 0,$$

M, N étant fonctions de x, y ; or, cette équation ne peut rien exprimer de réel, à moins que l'on n'ait en même temps $M = 0, N = 0$, ou que l'on n'ait en même temps $dx = 0, dy = 0$. Le premier de ces deux résultats ne peut pas être regardé comme une intégrale, parce

parce qu'il ne renferme pas de constante arbitraire; donc, la véritable intégrale de cette équation est le système des deux équations simultanées $x = a, y = b$; c'est-à-dire, que l'équation dont il s'agit n'appartient pas à une ligne courbe, mais à un point unique quelconque, pris sur le plan des x, y . Il y a donc cette différence entre les équations linéaires du premier ordre à deux variables, & la seule équation de cet ordre qui soit élevée, que les premières appartiennent toutes à des courbes, & que l'intégrale de chacune d'elles est une équation unique, complétée par une seule constante arbitraire; tandis que la dernière appartient à un point, & que son intégrale est le système de deux équations finies simultanées, & complétées par deux arbitraires.

La propriété de l'équation aux différences ordinaires élevées, du premier ordre & à deux variables, avoit déjà été observée; mais comme cette équation est unique, on l'avoit regardée comme une exception à la règle générale, & l'on n'avoit pas remarqué que c'étoit le commencement d'une chaîne immense, à laquelle tenoient les plus grandes difficultés du calcul intégral. En effet, parmi les équations aux différences ordinaires à trois variables, celles qui satisfont à la condition que j'ai rapportée dans l'article précédent, & qui est connue sous le nom de *condition d'intégrabilité*, appartiennent toutes à des surfaces courbes, & l'intégrale de chacune d'elles est une équation unique, complétée par une seule constante arbitraire; mais toutes les équations qui ne satisfont pas à cette condition, sont en nombre infini, & elles n'appartiennent pas à des surfaces; leurs lieux sont des courbes à double courbure, tracées dans l'espace, & l'intégrale de chacune d'elles est le système de deux équations simultanées. Enfin, parmi ces équations, il n'y en a qu'une seule,

$$M^2 dx^{2m} + N^2 dy^{2m} + P^2 dz^{2m} = 0,$$

Mém. 1784. Sff

dont l'intégrale soit le système de trois équations finies simultanées, $x = a$, $y = b$, $z = c$; elle n'appartient ni à une surface courbe, ni à une courbe à double courbure; son lieu est un point unique pris arbitrairement dans l'espace.

Pour les équations aux différences ordinaires du premier ordre, à quatre variables, l'intégrale de celles qui satisfont en même temps aux deux conditions que j'ai rapportées, est une seule équation complétée par une seule constante arbitraire; l'intégrale de celles qui ne satisfont qu'à une seule de ces deux conditions, est le système de deux équations simultanées; l'intégrale de celles qui ne satisfont à aucune des deux conditions, est le système de trois équations finies simultanées; enfin il n'y en a qu'une seule,

$$M^m du^{2m} + N^m dx^{2m} + P^m dy^{2m} + Q^m dz^{2m} = 0,$$

dont l'intégrale soit le système de quatre équations simultanées, $u = a$, $x = b$, $y = c$, $z = e$. Il en est de même pour un plus grand nombre de variables.

Ainsi l'objet des équations connues sous le nom de *conditions d'intégrabilité*, n'est pas, comme on l'a cru jusqu'ici, d'indiquer celles des équations différentielles dont les intégrales sont possibles, mais de faire connoître le nombre des équations finies simultanées dont doivent être composées les intégrales qui sont toujours possibles. Avant que d'aller plus loin, éclaircissions ce qu'on vient de voir, par des exemples simples.

III.

EXEMPLE I. Soit proposée l'équation

$$(A) \quad dz^2 = a^2 (dx^2 + dy^2),$$

dans laquelle a est une constante donnée. Il est bien évident que cette équation appartient à la courbe à double courbure, dont les élémens font un angle constant avec le plan des x, y ; ainsi les équations de toutes les droites

qui font le même angle avec le plan des x, y , doivent satisfaire à la proposée, quelles que soient d'ailleurs les directions de ces droites; or ces équations sont

$$(B) \quad x = az + \zeta,$$

$$(C) \quad y = z\sqrt{\frac{1}{a^2} - a^2} + \gamma,$$

a, ζ, γ étant trois constantes arbitraires; donc le système de ces deux équations prises simultanément est une solution de la proposée. En effet, si l'on différencie ces deux équations, les deux constantes arbitraires ζ, γ , s'évanouiront, & l'on aura

$$dx = a dz,$$

$$dy = dz\sqrt{\frac{1}{a^2} - a^2};$$

& éliminant a entre ces deux dernières équations, on aura

$$dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2).$$

Quoique le système des deux équations (A), (B), soit complété par trois constantes arbitraires, a, ζ, γ , on va voir qu'il n'est pas l'intégrale complète de l'équation (A), & que cette intégrale complète est encore plus générale.

Si l'on élimine entre (A) & (B) la constante a , l'équation résultante

$$(x - \zeta)^2 + (y - \gamma)^2 = \frac{z^2}{a^2}$$

sera celle de toutes les surfaces coniques dont les sommets seront dans le plan des x, y , & dont les côtés seront avec ce plan l'angle constant; si l'on fait $\gamma = \phi \zeta$, ϕ étant une fonction arbitraire, l'équation

$$(x - \zeta)^2 + (y - \phi \zeta)^2 = \frac{z^2}{a^2}$$

appartiendra seulement à celles de ces surfaces coniques dont le sommet sera placé sur une certaine courbe tracée dans le plan des x, y , l'équation de cette courbe étant

Sff ij

$y = \phi x$; & si l'on considère deux de ces surfaces courbes consécutives, elles se couperont en une droite dont on aura la seconde équation, en différenciant l'équation des cônes par rapport au paramètre variable ζ ; ainsi les équations de cette droite seront

$$(D) \quad (x - \zeta)^2 + (y - \phi\zeta)^2 = \frac{r^2}{a^2},$$

$$(E) \quad x - \zeta + (y - \phi\zeta)\phi'\zeta = 0.$$

Cette droite formera encore avec le plan des x, y , l'angle constant, & elle sera une de celles qui satisfont à l'équation (A). Mais si l'on considère la suite des surfaces coniques, on aura une suite de droites comme la précédente, qui ne différeront de position qu'en vertu du paramètre variable ζ ; & toutes ces droites se trouvant deux à deux consécutivement sur une même surface conique, elles se couperont nécessairement deux à deux consécutivement, & elles seront par conséquent les tangentes d'une même courbe à double courbure: donc les tangentes de cette courbe à double courbure étant également inclinées au plan des x, y , les élémens de cette courbe feront, avec ce plan, des angles constans; donc enfin les équations de cette courbe seront l'intégrale complète de la proposée.

Or il est évident que l'on aura les équations de la courbe à double courbure, en différenciant les deux équations (D), (E), par rapport au paramètre variable ζ ; de plus, l'équation (E) est déjà la différentielle de (D) prise de cette manière: donc l'intégrale complète de l'équation (A), est le système des trois équations simultanées,

$$(D) \quad (x - \zeta)^2 + (y - \phi\zeta)^2 = \frac{r^2}{a^2},$$

$$(E) \quad x - \zeta + (y - \phi\zeta)\phi'\zeta = 0,$$

$$(F) \quad 1 - (\phi'\zeta)^2 + (y - \phi\zeta)\phi''\zeta = 0,$$

dont les deux dernières sont les différentielles première

& seconde de (D) , prises en ne faisant varier que l'indéterminée ζ , & dans lesquelles ϕ est une fonction arbitraire; c'est-à-dire, que cette intégrale est le résultat de l'élimination de l'indéterminée ζ entre les trois équations (D) , (E) , (F) .

Il est facile de vérifier cette intégrale par la différenciation : en effet, les différentielles des deux équations (D) , (E) , prises par rapport à ζ , ayant lieu, il s'ensuit que l'on peut différencier ces deux équations, en regardant ζ comme constante, ce qui donnera

$$(d) \quad (x - \zeta) dx + (y - \phi \zeta) dy = \frac{z dz}{a},$$

$$(e) \quad dx + dy \phi' \zeta = 0;$$

& éliminant entre les quatre équations (D) , (E) , (d) , (e) , les trois indéterminées ζ , $\phi \zeta$, $\phi' \zeta$, on aura

$$(A) \quad dz^2 = a^2 (dx^2 + dy^2).$$

Le filet d'une vis dont l'axe est perpendiculaire au plan des x , y , est un cas particulier de cet exemple; & le filet d'une vis tracée sur une surface cylindrique à base quelconque, & perpendiculaire au plan des x , y , en est le cas général.

I V.

EXEMPLE II. Soit proposée l'équation

$$(A) \quad z^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) = a^2 (dx^2 + dy^2),$$

dans laquelle a est une constante donnée. Il est évident, à cause de la proportion

$$a : z :: \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} : \sqrt{(dx^2 + dy^2)},$$

que si l'on conçoit un cercle dont le rayon soit a , dont le centre soit dans le plan des x , y , & dont le plan soit perpendiculaire à ce dernier, la proposée appartient à toutes les courbes dont l'élément fait avec le plan des x , y , le même angle que l'élément du cercle pris à même hauteur, ou, ce qui revient au même, pris pour un z égal à celui

de la courbe; donc tous les cercles, dont le rayon est a , dont les plans sont parallèles aux z , & dont les centres sont placés dans le plan des x, y , doivent satisfaire à la proposée: or les équations de ces cercles sont

$$(B) \quad (x - a)^2 + (y - c)^2 + z^2 = a^2,$$

$$(C) \quad x - a = \gamma (y - c),$$

a, c, γ étant trois constantes arbitraires; donc le système de ces deux équations prises simultanément, est une solution particulière de l'équation (A). En effet, si l'on différencie les deux (A), (B), on aura

$$(x - a)dx + (y - c)dy + zdz = 0,$$

$$dx = \gamma dy,$$

& si l'on élimine entre ces quatre équations les trois arbitraires a, c, γ , l'équation résultante sera la proposée. Quoique le système des deux équations (A), (B), soit complété par trois arbitraires, on verra cependant que l'intégrale complète de la proposée est encore plus générale.

L'équation (B) appartient à une sphère dont le rayon est a , & dont le centre est placé sur le plan des x, y , en un point dont les coordonnées sont a, c ; si l'on fait $c = \phi a$, l'équation

$$(D) \quad (x - a)^2 + (y - \phi a)^2 + z^2 = a^2$$

appartiendra à toutes les sphères de même rayon, dont les centres seront placés dans le plan des x, y , sur une certaine courbe, l'équation de cette courbe étant $y = \phi x$; si parmi ces sphères on en considère deux consécutives, elles se couperont suivant un cercle, dont on aura la seconde équation en différenciant l'équation de la sphère par rapport au paramètre variable c ; ainsi les équations de ce cercle seront

$$(D) \quad (x - a)^2 + (y - \phi a)^2 + z^2 = a^2$$

$$(E) \quad x - a + (y - \phi a) \phi' a = 0,$$

& ces équations satisferont encore à la proposée. Mais si l'on considère la suite des sphères, dont les centres sont placés sur la même courbe, on aura une suite de cercles comme le précédent, qui ne différeront qu'en vertu du paramètre variable ζ ; tous ces cercles se trouvant deux à deux consécutivement sur une même sphère, ils pourront se couper deux à deux consécutivement, & la suite de leurs points d'intersection formera une courbe à double courbure touchée par tous les cercles: donc chaque élément de cette courbe à double courbure étant commun à un des cercles, cet élément fera, avec le plan des x, y , l'angle comporté par la proposée; donc les équations de cette courbe à double courbure seront l'intégrale complète de l'équation (A) .

Or il est évident que, pour avoir les équations de cette courbe à double courbure, il faut différencier les équations (D) , (E) , par rapport au paramètre variable a ; de plus l'équation (E) est déjà la différentielle de (D) prise de cette manière: donc il suffira de différencier (E) ; donc l'intégrale complète de la proposée sera le système des trois équations simultanées

$$(D) (x - a)^2 + (y - \varphi a)^2 + z^2 = a^2,$$

$$(E) x - a + (y - \varphi a)\varphi' a = 0,$$

$$(F) 1 - (\varphi' a)^2 + (y - \varphi a)\varphi'' a = 0;$$

dont les deux dernières sont les différentielles première & seconde de (D) , prise en regardant a comme seule variable, & dans lesquelles φ est une fonction arbitraire; c'est-à-dire que l'intégrale complète est le résultat de l'élimination de l'indéterminée a entre les trois équations (D) , (E) , (F) ; & que, dans chaque cas particulier, cette intégrale ne peut être exprimée que par le système de deux équations simultanées.

Pour vérifier ce résultat par la différenciation, il faut remarquer que les différentielles des deux équations (D) , (E) , prises par rapport à a , ont lieu, & qu'ainsi on peut

différencier les deux équations (D) , (E) , en regardant a comme constante : or si l'on exécute cette différenciation, on a les deux équations

$$(d) (x - a)dx + (y - \varphi a)dy + z dz = 0;$$

$$(e) dx + dy\varphi'a = 0,$$

& si, entre les quatre équations (D) , (E) , (d) , (e) , on élimine les trois indéterminées a , φa , $\varphi'a$, on trouve

$$(A) z^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) = a^2(dx^2 + dy^2),$$

donc l'intégrale que l'on vient de trouver est exacte,

V.

EXEMPLE III. Soit proposée l'équation

$$(A) \left. \begin{array}{l} (x dy - y dx)^2 \\ (y dz - z dy)^2 \\ (z dx - x dz)^2 \end{array} \right\} = a^2(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

dans laquelle a est une constante donnée. Si l'on met cette équation sous la forme

$$d.\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)} = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)},$$

il sera facile de reconnoître qu'elle appartient à toutes les courbes à double courbure dont les tangentes sont en même-temps tangentes à une sphère dont le rayon est a , & dont le centre est à l'origine ; donc les équations de toutes les tangentes à la sphère seront une solution particulière de la proposée ; or les équations de ces tangentes sont

$$(B) ax + by + z\sqrt{a^2 - \alpha^2 - \beta^2} = a^2;$$

$$(C) x - a = \gamma(y - \beta),$$

a , β étant les coordonnées du point de contact, & γ déterminant la direction de la tangente ; donc si, dans ces équations

équations, on regarde comme arbitraires les trois quantités α , ζ , γ , on aura une solution particulière de la proposée, ce dont il est facile de s'assurer par la différenciation.

Quoique les deux équations (B) , (C) , soient complétées par trois arbitraires, on va voir cependant qu'elles ne sont pas encore l'intégrale complète de l'équation (A) .

L'équation (B) est celle du plan tangent à la sphère pour un point de contact, dont les coordonnées, dans les sens des x & y , sont respectivement α , ζ : si l'on fait $\zeta = \phi \alpha$, on détermine le point de contact à être placé sur une certaine courbe, dont la projection sur le plan des x , y , a pour équation $y = \phi x$; & l'équation du plan tangent devient

$$(D) \quad \alpha x + y \phi \alpha + z \sqrt{a^2 - \alpha^2 - (\phi \alpha)^2} = a^2.$$

Si l'on considère deux plans tangens consécutifs, ces plans se couperont suivant une droite tangente à la sphère, & on aura la seconde équation de cette droite, en différenciant celle du plan par rapport au paramètre variable α ; ainsi les deux équations de cette droite seront

$$(D) \quad \alpha x + y \phi \alpha + z \sqrt{a^2 - \alpha^2 - (\phi \alpha)^2} = a^2,$$

$$(E) \quad x + y \phi' \alpha - z \frac{\alpha + \phi \alpha \phi' \alpha}{\sqrt{a^2 - \alpha^2 - (\phi \alpha)^2}} = 0;$$

& parce que la droite, à laquelle appartiennent ces deux équations, est tangente à la sphère, il s'ensuit qu'elles satisfont à la proposée. Mais si l'on considère la suite de tous les plans qui touchent la sphère dans les points pris sur la courbe, on aura une suite de droites comme la précédente, & ces droites prises deux à deux consécutivement se couperont, puisqu'elles seront deux à deux dans un même plan tangent; donc elles seront les tangentes d'une même courbe à double courbure; & les équations de cette courbe à double courbure seront l'intégrale complète de la proposée. Or il est évident que, pour

314 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

avoir les équations de cette courbe à double courbure, il faut différencier les équations (D) , (E) , de la droite, par rapport au paramètre variable a ; de plus l'équation (E) étant déjà la différentielle de (D) prise de cette manière, il suffira de différencier (E) : donc en faisant, pour abréger,

$$a^2 - a^2 - (\phi a)^2 = (\psi a)^2,$$

l'intégrale complète de la proposée sera le système des quatre équations simultanées

$$(D) \quad ax + y\phi a + z\psi a = a^2,$$

$$(E) \quad x + y\phi' a + z\psi' a = 0,$$

$$(F) \quad y\phi'' a + z\psi'' a = 0,$$

$$a^2 + (\phi a)^2 + (\psi a)^2 = a^2,$$

dans lesquelles ϕ & ψ sont des fonctions arbitraires; de ces quatre équations la dernière est destinée à l'élimination actuelle de la fonction surabondante; & (E) , (F) , sont les différences première & seconde de (D) , prises en regardant a comme seule variable. L'élimination d'une des fonctions étant faite, l'intégrale sera le résultat de l'élimination de a entre les trois équations (D) , (E) , (F) .

Il est facile de vérifier ce résultat par la différenciation, comme ceux des deux exemples précédens.

Dans mon Mémoire sur les développées des courbes à double courbure (*Tome X des Savans étrangers*), j'ai donné le nom d'*Arrête de rebroussement* à la courbe touchée par toutes les droites qui constituent une surface développable; d'après cela, l'équation dont il s'agit ici appartient à l'arrête de rebroussement d'une surface quelconque développable circonscrite à la sphère.

V I.

LES trois exemples que je viens de rapporter suffisent pour faire voir, 1.^o que les équations aux différences ordi-

naires à trois variables élevées, & qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité, ne sont pas absurdes, mais qu'elles expriment des propriétés réelles; 2.^o que ces équations sont susceptibles d'une véritable intégration, & que leurs lieux sont des courbes à double courbure qui ne peuvent être exprimées que par le système de deux équations simultanées, les autres équations, quand leur nombre est plus grand que deux, étant destinées à éliminer des indéterminées, ou des fonctions surabondantes; 3.^o que les intégrales de ces équations différentielles doivent être complétées par une fonction arbitraire, ce que les Géomètres ne s'étoient encore permis que pour les intégrales des équations aux différences partielles.

Ces considérations ouvrent un nouveau champ à l'analyse & à la géométrie, & elles donnent lieu à un calcul intégral qui mérite l'attention des Géomètres, car on verra dans la suite que l'intégration des équations aux différences partielles élevées, ne dépend que de ce genre de calcul.

Je vais exposer quelques résultats d'une assez grande généralité.

V I I.

THÉORÈME I. L'intégrale complète de l'équation aux différences ordinaires à trois variables,

$$(A) \quad F\left(\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}\right) = 0,$$

dans laquelle les variables elles-mêmes n'entrent pas, & où F est une fonction quelconque de deux quantités, algébrique ou transcendante, déterminée ou arbitraire, est le résultat de l'élimination de l'indéterminée a entre les trois équations suivantes,

$$(B) \quad F\left(\frac{x-a}{z}, \frac{y-za}{z}\right) = 0,$$

$$(C) \quad \left(\frac{dF}{da}\right) = 0,$$

$$(D) \left(\frac{d d F}{d a^2} \right) = 0,$$

dans lesquelles F est la même fonction de deux quantités que celle de la proposée, & où ϕ est une fonction arbitraire.

Pour le démontrer, il faut observer que les différentielles des deux équations (B) , (C) , par rapport à l'indéterminée a ont lieu, & que par conséquent on peut différencier ces équations en regardant a comme constante, ce qui, en faisant pour abrégé

$$\frac{x-a}{z} = m, \quad \frac{y-\phi a}{z} = n,$$

donne

$$\left(\frac{d F}{d m} \right) d m + \left(\frac{d F}{d n} \right) d n = 0;$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[\left(\frac{d d F}{d m^2} \right) + \left(\frac{d d F}{d n d m} \right) \phi' a \right] d m \\ & + \left[\left(\frac{d d F}{d m d n} \right) + \left(\frac{d d F}{d n^2} \right) \phi' a \right] d n \end{aligned} \right\} = 0;$$

or ces deux dernières équations ne peuvent pas subsister indépendamment de la valeur de la fonction F , à moins que l'on n'ait en même-temps les deux équations suivantes $d m = 0$, $d n = 0$, ou

$$\frac{x-a}{z} = \frac{dx}{dz},$$

$$\frac{y-\phi a}{z} = \frac{dy}{dz};$$

donc éliminant a & ϕa de l'équation (B) , au moyen des deux dernières, on aura la proposée

$$F\left(\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}\right) = 0.$$

V I I I.

L'ÉQUATION $d z^2 = a^2 (d x^2 + d y^2)$ de l'article *III*, est dans le cas du théorème précédent, car elle peut être mise sous la forme

$$a^2 \left(\frac{dx^2}{dz^2} + \frac{dy^2}{dz^2} \right) - 1 = 0;$$

aussi nous avons vu que son intégrale complète est le résultat de l'élimination de l'indéterminée a entre l'équation suivante,

$$a^2 \left[\left(\frac{x-a}{z} \right)^2 + \left(\frac{y-\varphi a}{z} \right)^2 \right] - 1 = 0,$$

& ses deux différentielles première & seconde, prises en regardant a comme seule variable.

I X.

THÉORÈME II. Les trois quantités X, Y, Z , étant composées chacune des trois variables x, y, z , l'intégrale complète de l'équation aux différences ordinaires du premier ordre,

$$F \left(\frac{dX}{dZ}, \frac{dY}{dZ} \right) = 0,$$

est le résultat de l'élimination de l'indéterminée a entre les trois équations suivantes,

$$F \left(\frac{X-a}{Z}, \frac{Y-\varphi a}{Z} \right) = 0,$$

$$\left(\frac{dF}{da} \right) = 0,$$

$$\left(\frac{d^2F}{da^2} \right) = 0,$$

dans lesquelles la fonction F est la même que celle de la proposée, & où φ est une fonction arbitraire.

Ce théorème se démontre comme le précédent.

X.

L'ÉQUATION

$$z^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) = a^2(dx^2 + dy^2)$$

de l'article IV, est dans le cas du dernier théorème, car on peut le mettre sous la forme.

$$\frac{z^2 dz^2}{a^2 - z^2} = dx^2 + dy^2,$$

ou sous la suivante,

$$[dV(a^2 - z^2)]^2 = dx^2 + dy^2;$$

aussi nous avons vu que son intégrale complète est le résultat de l'élimination de l'indéterminée a entre l'équation

$$\frac{(x - a)^2}{a^2 - z^2} + \frac{(y - \phi a)^2}{a^2 - z^2} = 1,$$

& ses différentielles, première & seconde, prises en regardant a comme seule variable.

X I.

IL suit de tout ce qu'on vient de voir, que si l'on conçoit une surface courbe dont l'équation $M = 0$, outre les trois coordonnées x, y, z , renferme encore un paramètre variable a , & une fonction arbitraire de ce paramètre, représentée par ϕa ; & que si l'on imagine toutes les surfaces courbes différentes que l'on obtiendrait en donnant successivement à a toutes les valeurs possibles, & en supposant que la forme de la fonction ϕ soit invariable, deux quelconques de ces surfaces, prises consécutivement, se couperont en une courbe, dont les équations seront

$$(A) \quad M = 0,$$

$$(B) \quad \left(\frac{dM}{da}\right) = 0;$$

la suite de ces courbes d'intersection composera une surface courbe qui sera l'enveloppe de toutes les premières, & on aura l'équation finie de cette enveloppe, en x, y, z , en éliminant le paramètre variable a entre les deux équations (A) , (B) ; mais cette élimination n'est pas possible en général, parce que la fonction ϕ est arbitraire.

De plus, si l'on considère les courbes d'intersection dont la suite compose l'enveloppe, deux quelconques de ces

courbes, prises consécutivement, se couperont en un certain point dont les coordonnées seront déterminées par les trois équations

$$(A) \quad M = 0,$$

$$(B) \quad \left(\frac{dM}{d\alpha} \right) = 0,$$

$$(C) \quad \left(\frac{d^2M}{d\alpha^2} \right) = 0;$$

& la suite de ces points composera une courbe à double courbure, dont on auroit les deux équations finies, en éliminant le paramètre α entre les trois équations (A), (B), (C). La courbe à double courbure dont il s'agit ici, non-seulement touche toutes les surfaces possibles comprises dans l'équation $M = 0$, mais encore chacun de ses élémens se trouve sur trois de ces surfaces prises consécutivement; enfin cette courbe est la limite de l'enveloppe.

Pour avoir l'équation différentielle de l'enveloppe, délivrée de la fonction arbitraire ϕ , il faut différencier l'équation (A), & par rapport à x & par rapport à y , en regardant α & $\phi\alpha$ comme constantes dans ces deux cas, ce qui est permis à cause de l'équation (B); on aura donc alors les trois équations

$$M = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{dx} \right) = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{dy} \right) = 0;$$

entre lesquelles, éliminant les deux quantités α & $\phi\alpha$, on aura une équation aux différences partielles, $V = 0$, qui appartiendra à l'enveloppe, indépendamment de la forme de la fonction ϕ qui a disparu, c'est-à-dire, qui appartiendra à toutes les enveloppes que l'on auroit en donnant, dans $M = 0$, à la fonction ϕ , successivement toutes les formes possibles.

Quant à la limite, nous avons déjà vu que pour avoir

son équation il faut différencier aux différences ordinaires les deux équations (A), (B), en regardant a & ϕa comme constantes, ce qui est permis en vertu des équations (B) (C), & éliminer entre les quatre équations

$$(A) \quad M = 0,$$

$$(B) \quad \left(\frac{dM}{da} \right) = 0,$$

$$d(A) \quad dM = 0,$$

$$d(B) \quad d \left(\frac{dM}{da} \right) = 0,$$

les trois quantités a , ϕa , $\phi' a$, ce qui produit une équation $U = 0$ du premier ordre, aux différences ordinaires élevées à trois variables, & pour laquelle la condition d'intégrabilité n'est pas satisfaite.

X I I.

ACTUELLEMENT les deux équations

$$V = 0,$$

$$U = 0$$

dont la première est aux différences partielles, & dont la seconde est aux différences ordinaires, sont telles, que l'une quelconque étant donnée, il est toujours facile d'obtenir l'autre sans connoître leurs équations intégrales.

1.^o Étant donnée l'équation aux différences partielles, $V = 0$, si l'on substitue pour p ou pour q la valeur prise dans $dz = p dx + q dy$ (supposons que ce soit la valeur de p que l'on substitue), on aura une équation $V' = 0$, composée des variables x , y , z , de leurs différences ordinaires dx , dy , dz , & de la quantité q ; & le résultat de l'élimination de la quantité q entre les deux équations

$$V' = 0,$$

$$\left(\frac{dV'}{dq} \right) = 0,$$

donnera l'équation aux différences ordinaires $U = 0$.

2.^o Réciproquement, étant donnée $U = 0$, si l'on substitue

pour dz la valeur $pdx + qdy$, on aura une équation $U = 0$, composée des variables x, y, z , des différences partielles p, q , & de la quantité $\frac{dy}{dx}$. Je représente cette dernière quantité par ω ; cela posé, le résultat de l'élimination de ω entre les deux équations

$$U = 0, \\ \left(\frac{dU}{d\omega} \right) = 0,$$

donnera l'équation aux différences partielles $V = 0$.

Par exemple, dans l'article III, l'équation $M = 0$ est

$$(x - a)^2 + (y - \phi a)^2 = \frac{z^2}{a^2},$$

& les deux équations $V = 0, U = 0$, sont

$$p^2 + q^2 = a^2, \\ dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2).$$

La première de ces deux équations étant posée, pour avoir la seconde, il faut substituer pour p la valeur $\frac{dz - qdy}{dx}$, ce qui donne

$$q^2(dx^2 + dy^2) - 2qdydz + dz^2 - a^2dx^2 = 0;$$

différencier cette dernière équation en regardant q comme seule variable, ce qui donne

$$q(dx^2 + dy^2) = dydz,$$

en vertu de laquelle la précédente devient

$$qdydz = dz^2 - a^2dx^2;$$

& éliminant q entre les deux dernières, on trouve l'équation aux différences ordinaires

$$dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2).$$

Réciproquement étant donnée l'équation

$$dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2),$$

pour trouver l'équation aux différences partielles, il faut

322 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
 substituer pour dz sa valeur $pdx + qdy$, ce qui, en
 faisant $\frac{dy}{dx} = \omega$, donne

$\omega^2(q^2 - a^2) + 2\omega pq + p^2 - a^2 = 0$;
 différencier cette équation en regardant ω comme seule
 variable, ce qui donne

$$\omega(q^2 - a^2) + pq = 0,$$

$$\omega pq + p^2 - a^2 = 0;$$

& éliminant ω , on trouve l'équation aux différences
 partielles

$$p^2 + q^2 = a^2.$$

XIII.

POUR démontrer en général la proposition de l'article
précédent, je ferai d'abord remarquer que le résultat de
 l'élimination des deux quantités a, ζ , entre les trois équations

$$\varphi(a, \zeta) = 0,$$

$$\left(\frac{d.\varphi(a, \zeta)}{da}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d.\varphi(a, \zeta)}{d\zeta}\right) = 0,$$

est le même que celui qu'on obtiendrait en éliminant
 d'abord a entre les deux équations

$$\varphi(a, \zeta) = 0,$$

$$\left(\frac{d.\varphi(a, \zeta)}{d\zeta}\right) = 0,$$

ce qui donneroit un premier résultat $\downarrow \zeta = 0$; puis
 en éliminant ζ entre les deux équations

$$\downarrow \zeta = 0,$$

$$2\left(\frac{\downarrow \zeta}{d\zeta}\right) = 0,$$

Cela posé, l'équation aux différences ordinaires $U = 0$,
 est le résultat de l'élimination des quantités $a, \varphi a, \varphi' a$
 entre les quatre équations

$$M = 0,$$

$$dM = 0,$$

$$\frac{dM}{da} = 0,$$

$$\frac{d^2M}{da^2} = 0;$$

ou bien si l'on représente par $k = 0$, le résultat de l'élimination de ϕa , entre les deux premières, l'équation $U = 0$, est alors le résultat de l'élimination de a , entre les deux équations

$$k = 0,$$

$$\left(\frac{dk}{da}\right) = 0.$$

Pareillement, l'équation aux différences partielles $V = 0$, est le résultat de l'élimination des quantités $a, \phi a, dz$ entre les quatre équations

$$M = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{ds}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = 0,$$

$$dz = p dx + q dy;$$

ou bien, en représentant $\frac{dy}{ds}$ par ϕ , on aura l'équation $V = 0$, en éliminant d'abord ϕa & dz entre les équations

$$M = 0,$$

$$dM = 0,$$

$$dz = p dx + q dy;$$

puis après avoir représenté le résultat par $k' = 0$, en éliminant a & ϕ entre les suivantes,

$$Uuu ij$$

$$k' = 0,$$

$$\left(\frac{dk'}{da}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dk'}{d\omega}\right) = 0;$$

& pour faire cette dernière opération, on peut, en vertu du lemme, éliminer d'abord a entre $k' = 0$, & $\left(\frac{dk'}{da}\right) = 0$, ce qui donnera un résultat $k'' = 0$, & éliminer ensuite ω entre $k'' = 0$, & $\left(\frac{dk''}{d\omega}\right) = 0$.

Or l'équation $k' = 0$ étant le résultat de l'élimination de dz entre $k' = 0$, & $dz = p dx + q dy$, le résultat de l'élimination de a entre $k' = 0$, & $\left(\frac{dk'}{da}\right) = 0$, sera le même que celui de l'élimination de dz entre

$$U = 0,$$

$$\& dz = p dx + q dy;$$

donc on aura l'équation $V = 0$, en éliminant d'abord dz entre ces deux dernières équations, ce qui donnera un résultat $k'' = 0$, & éliminant ensuite ω entre les deux suivantes

$$k'' = 0,$$

$$\left(\frac{dk''}{d\omega}\right) = 0;$$

ce qui est la première partie de la proposition.

Quant à la seconde partie, il faut observer que puisque l'équation $V = 0$, résulte des deux suivantes

$$U = 0,$$

$$dz = p dx + q dy,$$

reciproquement l'équation $U = 0$ doit résulter de ces deux-ci,

$$V = 0,$$

$$dz = p dx + q dy,$$

par l'élimination des deux quantités p, q : or l'élimination actuelle d'une de ces deux quantités étant faite, ce qui donne un résultat que je représente par $h = 0$, il ne reste aucune équation pour éliminer l'autre de ces quantités; donc, si c'est q qui reste, pour le faire disparaître, il faut l'éliminer entre les deux équations

$$h = 0,$$

$$\left(\frac{dh}{dq} \right) = 0;$$

ce qui est la seconde partie de la proposition.

X I V.

Nous avons vu (*XII*) que l'intégrale de l'équation aux différences partielles $V = 0$ est le résultat de l'élimination de l'indéterminée a entre les deux équations

$$(A) \quad M = 0,$$

$$(B) \quad \left(\frac{dM}{da} \right) = 0;$$

& que celle de l'équation aux différences ordinaires élevées $U = 0$, est le résultat de l'élimination de la même indéterminée a entre les trois suivantes,

$$(A) \quad M = 0,$$

$$(B) \quad \left(\frac{dM}{da} \right) = 0,$$

$$(C) \quad \left(\frac{d^2 M}{da^2} \right) = 0:$$

il suit de-là, que des deux équations $V = 0, U = 0$, l'une quelconque étant proposée, si l'on connoît l'intégrale de l'autre, sous la forme que je viens de rapporter, on

connoîtra aussi celle de la première ; c'est-à-dire , que si l'on connoît l'intégrale de l'équation $U = 0$, & que cette intégrale soit sous la forme des trois équations (A) , (B) , (C) , on aura celle de l'équation $V = 0$, en supprimant l'équation (C) . Réciproquement étant connue l'intégrale de l'équation $V = 0$, sous la forme des deux équations (A) , (B) , on aura celle de l'équation $U = 0$, en combinant les deux équations (A) , (B) , avec la différentielle de (B) prise en regardant l'indéterminée a comme seule variable.

Ainsi le calcul intégral des équations aux différences ordinaires élevées , & celui des équations aux différences partielles sont absolument dépendans l'un de l'autre ; & de la perfection de l'une de ces espèces de calcul s'ensuivroit nécessairement celle de l'autre.

X V.

Tout ce qui précède ne présenteroit qu'un cercle inutile , si les formes des équations que l'on fait intégrer se correspondoient dans l'un & l'autre calcul ; mais je vais faire voir , par deux exemples , que certaines équations aux différences ordinaires , comprises dans les formes que j'ai traitées ci-dessus , correspondent à des équations aux différences partielles que l'on ne peut encore intégrer par aucune autre méthode , & réciproquement.

Exemple I. L'équation aux différences ordinaires

$$(U) \left\{ \begin{array}{l} (x dy - y dx)^2 \\ + (y dz - z dy)^2 \\ + (z dx - x dz)^2 \end{array} \right\} = a^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

dont j'ai trouvé l'intégrale par des considérations géométriques , & qui appartient aux arrêtes de rebroussement de toutes les surfaces développables circonscrites à la même sphère , n'est comprise dans aucune des formes générales dont j'ai donné les intégrales ; mais si l'on substitue pour

On a la valeur $p dx + q dy$, & qu'ensuite on élimine $\frac{dy}{dx}$ au moyen de la différentielle, prise en regardant $\frac{dy}{dx}$ comme seule variable, l'équation aux différences partielles que l'on obtiendra, sera

$$z - px - qy = a^2 \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

qui appartient à toutes les surfaces développables circonscrites à la même sphère. Or cette équation est comprise dans celles que M. de la Grange a intégrées, & en faisant, pour abréger

$$z - ax - \phi a \cdot y - a^2 \sqrt{1 + a^2 + (\phi a)^2} = M,$$

son intégrale est le résultat de l'élimination de a entre les deux équations suivantes :

$$M = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{da} \right) = 0;$$

Donc l'intégrale de l'équation aux différences ordinaires (U), est le résultat de l'élimination de la même indéterminée a entre les trois équations

$$M = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{da} \right) = 0,$$

$$\left(\frac{ddM}{da^2} \right) = 0.$$

Exemple II. Réciproquement l'équation aux différences partielles

$$(V) \left\{ \begin{array}{l} bx^2 (z + px - qy)^2 \\ + aby^2 (z - px + qy)^2 \\ + az (z + px + qy)^2 \end{array} \right\} = 0,$$

328 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

ne peut s'intégrer par aucune des méthodes connues; mais si l'on substitue pour p la valeur prise dans $dz = p dx + q dy$, & qu'après avoir différencié en regardant q comme seule variable, on élimine q , on aura

$$(xdz + zdx)^2 + a(zdy + ydz)^2 + b(xdy + ydz)^2 = 0,$$

équation aux différences ordinaires élevées, comprise dans dans le cas du *théorème III*, & dont l'intégrale, en faisant, pour abréger,

$$\left(\frac{z^2 - a}{xy}\right)^2 + a\left(\frac{yz - qa}{xy}\right)^2 + b = M,$$

est le résultat de l'élimination de a entre les trois équations

$$M = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{da}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{ddM}{da^2}\right) = 0;$$

donc l'intégrale de l'équation aux différences partielles (V), est le résultat de l'élimination de l'indéterminée a entre les deux premières seulement de ces trois équations, c'est-à-dire, entre

$$M = 0$$

$$\& \left(\frac{dM}{da}\right) = 0.$$

X V I.

JUSQU'ICI il n'a été question, dans ce Mémoire, que des équations aux différences ordinaires élevées; mais les équations aux différences ordinaires linéaires à trois variables, & qui ne satisfont pas aux anciennes conditions d'intégrabilité, ne sont pas absurdes, elles appartiennent de même toutes à des courbes à double courbure, & elles sont toutes susceptibles d'une véritable intégration; enfin

la recherche de leur intégrale ne dépend que de l'intégration d'une équation aux différences ordinaires à deux variables.

En effet, soit

$$(A) \quad Ldx + Mdy + Ndz = 0,$$

une équation aux différences ordinaires, linéaire, & qui ne satisfasse pas à la condition d'intégrabilité; d'après ce que l'on vient de voir sur les équations élevées, on mettra pour dz la valeur $pdx + qdy$, ce qui donnera

$$(L + Np)dx + (M + Nq)dy = 0;$$

puis, après avoir différencié cette équation, en ne faisant varier que $\frac{dy}{dx}$, on éliminera $\frac{dy}{dx}$, ce qui se réduit à égaler à zéro les coefficients de dx & dy , & l'on aura les deux équations simultanées,

$$(B) \quad L + Np = 0,$$

$$(C) \quad N + Nq = 0.$$

Cela fait, on intégrera ou l'une ou l'autre de ces deux équations, en regardant comme constante la variable qui n'a pas varié dans la différence partielle; par exemple, on intégrera la première,

$$Ldx + Ndz = 0,$$

en regardant y comme constante, & on complétera l'intégrale par une fonction arbitraire de y ; enfin on substituera dans (C) pour q la valeur tirée de l'intégrale, ce qui produira une seconde équation sans différentielles; & ces deux équations appartiendront à la courbe à double courbure, qui est le lieu de la proposée.

EXEMPLE I. Soit proposé d'intégrer l'équation

$$(A) \quad dz = xy(xdx + ydy).$$

Les deux équations aux différences partielles sont, pour ce cas,

$$(B) \quad p = x^2y,$$

$$(C) \quad q = xy^2,$$

l'intégrale de la première est

$$z = \frac{x^2y}{3} + \phi y;$$

ϕ étant une fonction arbitraire; je la différencie en regardant y comme seule variable, ce qui donne

$$q = \frac{x^2}{3} + \phi' y;$$

& substituant pour q cette valeur dans (C), je trouve

$$xy^2 = \frac{x^2}{3} + \phi' y;$$

donc l'intégrale de la proposée est le système des deux équations simultanées,

$$z = \frac{x^2y}{3} + \phi y$$

$$xy^2 = \frac{x^2}{3} + \phi' y.$$

Cette intégrale peut être mise sous une autre forme, car les deux équations (B), (C), peuvent être remplacées par les suivantes,

$$py - qx = 0,$$

$$p = x^2y.$$

Or l'intégrale de la première est $z = \phi(x^2 + y^2)$; &

pour que la seconde soit satisfaite, il faut que l'on ait $xy = z\phi'(x^2 + y^2)$; donc l'intégrale complète de la proposée est encore le système des deux équations simultanées,

$$z = \phi(x^2 + y^2),$$

$$xy = z\phi'(x^2 + y^2),$$

ce qu'il est facile de vérifier par la différenciation. Ainsi la proposée appartient à une courbe à double courbure tracée sur une surface quelconque de révolution, l'axe coïncidant avec la ligne des z ; mais la projection de cette courbe sur le plan perpendiculaire à l'axe, dépend de la courbe génératrice, d'une manière énoncée par la seconde des deux équations intégrales.

X V I I I.

EXEMPLE II. Soit proposé d'intégrer

$$(A) \quad dz = xy(dx - dy).$$

Les deux équations aux différences partielles deviennent

$$(B) \quad p = xy,$$

$$(C) \quad q = -xy,$$

l'intégrale de la première est $z = \frac{x^2 y}{2} + \phi y$, & pour que l'équation (C) soit satisfaite, il faut que l'on ait

$$xy + \frac{x^2}{2} + \phi' y = 0;$$

donc l'intégrale de l'équation (A) est le système des deux équations simultanées

$$z = \frac{x^2 y}{2} + \phi y,$$

$$xy + \frac{x^2}{2} + \phi' y = 0.$$

X x x ij

Autrement, les deux équations (B), (C), peuvent être remplacées par les deux suivantes,

$$\begin{aligned} p + q &= 0, \\ p &= xy. \end{aligned}$$

L'intégrale de la première est

$$z = \phi(x - y);$$

& pour que la seconde soit satisfaite, il faut que l'on ait

$$xy = \phi'(x - y);$$

done l'intégrale complète de la proposée est encore le système des deux équations simultanées

$$\begin{aligned} z &= \phi(x - y), \\ xy &= \phi'(x - y). \end{aligned}$$

c'est-à-dire, que la proposée (A) appartient à une courbe à double courbure, tracée sur une surface cylindrique à base quelconque, les droites de la surface étant parallèles à la droite qui partage en deux parties égales l'angle formé par les axes des x & des y ; mais la projection de la courbe sur le plan des x, y , dépend de la base de la surface cylindrique, d'une manière exprimée par la seconde des deux équations intégrales.

X I X.

Si le nombre des variables étoit plus grand que trois, on se comporteroit d'une manière analogue, c'est-à-dire, qu'on substituerait d'abord pour dz la valeur

$$p du + q dx + r dy \dots \dots \&c.$$

& qu'ensuite, pour éliminer $\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du} \dots \dots \&c.$ on différencieroit le résultat, en regardant chacune de ces

quantités comme seule variable, ce qui produiroit un nombre d'équations suffisant pour l'élimination; & alors on auroit des équations aux différences partielles, que l'on traiteroit comme celles des deux cas précédens.

Exemple III. Soit proposé d'intégrer

$$x du + y dx + z dy + x dz = 0.$$

Je substitue pour dz la valeur, & je trouve

$$(u + px) du + (y + qx) dx + (z + rx) dy = 0;$$

je différencie, en regardant $\frac{dx}{du}$, $\frac{dy}{du}$, chacune en particulier, comme seule variable, & j'élimine ces deux quantités; ce qui, dans le cas où toutes les différences sont linéaires, se réduit à égaler à zéro les coefficients de du , dx , dy , & j'obtiens les trois équations aux différences partielles,

$$x + px = 0,$$

$$y + qx = 0,$$

$$z + rx = 0.$$

L'intégrale de la première est

$$xz + u^2 = \phi(x, y),$$

ϕ étant une fonction de deux quantités; & pour que les deux autres équations soient satisfaites, il faut que l'on ait

$$y + \phi'(x, y) = 0,$$

$$z + \phi''(x, y) = 0,$$

ϕ' & ϕ'' étant les coefficients de dx & dy , dans la différentielle de la fonction ϕ ; donc, l'intégrale complète de la proposée est le système des trois équations simultanées

$$xz + u^2 = \phi(x, y),$$

$$y = \phi'(x, y),$$

$$z = \phi''(x, y).$$

Le nombre des équations intégrales n'est pas toujours, comme dans le cas précédent, égal au nombre des variables diminué d'une unité.

Exemple IV. Soit proposée l'équation

$$(A) \quad udu + xdx + xdy + zdz = 0.$$

On voit d'abord qu'on peut la réduire à trois termes, sous la forme suivante :

$$udu + x(dx + dy) + zdz = 0,$$

dont l'intégrale est évidemment le système des deux équations simultanées

$$u^2 + z^2 + \phi(x + y) = 0,$$

$$2x = \phi'(x + y) = 0.$$

Ainsi toutes les fois que la proposée sera susceptible d'être réduite à trois termes, son intégrale ne contiendra pas plus de deux équations ; mais dans tous les cas où elle sera susceptible de cette forme, il ne sera pas toujours aussi facile que dans cet exemple simple, de l'y ramener ; alors, en opérant comme dans l'article XX, le calcul indiquera la réduction des équations. En effet, si dans la proposée on met pour dz la valeur $pdu + qdx + rdy$, on aura les trois équations aux différences partielles,

$$u + pz = 0,$$

$$x + qz = 0,$$

$$x + rz = 0;$$

l'intégrale de la première est

$$(E) \quad z^2 + u^2 = \phi(x, y),$$

ϕ étant supposée une fonction de deux quantités ; & pour que les deux autres soient satisfaites, il faut que l'on ait

$$(F) \quad -2x = \phi'(x, y),$$

$$(G) \quad -2x = \phi''(x, y),$$

ϕ' & ϕ'' étant les coefficients de dx & dy dans la différentielle de $\phi(x, y)$.

Mais les deux équations (F) , (G) , étant entre les deux mêmes variables x & y , il s'ensuit que la fonction ϕ , qui étoit regardée comme composée de deux quantités, n'est composée que d'une seule; car si l'on fait

$$\phi(x, y) = z', \text{ \& } dz' = p'dx + q'dy,$$

les équations (F) , (G) , deviennent

$$(F') \quad - 2x = p',$$

$$(G') \quad - 2x = q',$$

ce qui donne $p' - q' = 0$, & par conséquent

$$z' = \psi(x + y),$$

ψ étant une fonction arbitraire de la seule quantité $x + y$; donc l'équation (E) deviendra

$$z^2 + u^2 = \psi(x + y),$$

& une des deux équations (F') ou (G') sera employée: & pour que l'autre soit satisfaite, il faudra que l'on ait

$$- 2x = \psi'(x + y);$$

donc l'intégrale de la proposée (A) est le système des deux dernières équations prises simultanément, comme on l'avoit trouvée d'abord.

CONCLUSION.

LES équations aux différences ordinaires, soit élevées, soit linéaires, qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité, ne renferment rien d'absurde, si l'on entend par-là qu'elles expriment des propriétés impossibles, imaginaires . . . ; elles énoncent toutes des propriétés réelles, & elles sont susceptibles d'une véritable intégration en quantités finies. Ce qu'il y avoit d'absurde, c'étoit que leurs intégrales pussent être exprimées par une seule équation; par exemple, pour le cas de trois variables, il étoit absurde que l'équation appartînt à une surface courbe, ce que l'on supposoit tacitement; dans ce cas

elle appartient à une courbe à double courbure, qui peut être déterminée par une seule équation différentielle, mais qui ne peut être exprimée en quantités finies, que par le système de deux équations simultanées.

Des Équations aux différences ordinaires élevées du second ordre, & pour un nombre de variables plus grand que deux.

X X i.

DANS le Mémoire que j'ai donné sur les développées des courbes à double courbure, imprimé parmi ceux des Savans étrangers, *tome X*, j'ai fait voir, 1.^o que, quoique chaque courbe eût un nombre infini de développées, elle n'avoit cependant, pour chacun de ses points, qu'un seul rayon de courbure; 2.^o que lorsque la courbe étoit à double courbure, la suite des centres de courbure formoit une ligne courbe qui n'étoit pas une des développées; 3.^o que x, y, z , étant les coordonnées rectangulaires d'un point de la courbe, l'expression du carré du rayon de courbure pour ce point, en ne faisant nulle aucune différence seconde, étoit

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2)^3 : \left\{ \begin{array}{l} (dxddy - dyddx)^2, \\ + (dzddx - dxddz)^2, \\ + (dyddz - dzddy)^2. \end{array} \right.$$

Si donc on vouloit avoir l'équation différentielle de toutes les courbes à double courbure, dont le rayon de courbure est constant, il faudroit égaler l'expression précédente à une constante a , ce qui donneroit

$$(A) (dx^2 + dy^2 + dz^2)^3 = a^2 \left\{ \begin{array}{l} (dxddy - dyddx)^2, \\ + (dzddx - dxddz)^2, \\ + (dyddz - dzddy)^2, \end{array} \right.$$

équation élevée, du genre de celles que l'on regarde ordinairement comme absurdes, & qui cependant exprime une

une propriété réelle, & qui est susceptible d'une véritable intégration, même en quantités finies,

X X I I.

D'ABORD il est évident que tous les cercles dont le rayon est a , quelles que soient d'ailleurs leurs positions dans l'espace, doivent satisfaire à cette équation; or les équations d'un cercle placé d'une manière quelconque dans l'espace, sont

$$(x - a)^2 + (y - \epsilon)^2 + (z - \gamma)^2 = a^2,$$

$$x - a + (y - \epsilon)\epsilon + (z - \gamma)\eta = 0,$$

a , ϵ , γ , étant les coordonnées du centre, & ϵ , η , déterminant les deux directions du plan du cercle; donc, si dans ces deux équations on regarde les cinq quantités a , ϵ , γ , ϵ , η , comme des constantes arbitraires, elles satisferont à l'équation aux différences ordinaires du second ordre (A); ce qu'il est facile de vérifier par la différenciation; car si l'on différencie aux différences ordinaires, premières & secondes, chacune de ces équations, on aura en tout six équations, entre lesquelles éliminant les cinq constantes arbitraires, on trouvera l'équation (A). Mais quoique les équations au cercle contiennent cinq arbitraires, elles ne sont encore qu'un cas particulier de l'intégrale complète; car les angles que les élémens consécutifs de la circonférence du cercle font entr'eux, sont égaux & dans un même plan, & l'on peut concevoir une courbe telle que ces angles, sans cesser d'être égaux, soient dans des plans perpétuellement différens: les équations de cette courbe satisferoient à l'équation (A), puisque son rayon de courbure seroit constant; & elles ne seroient pas comprises dans celle du cercle, puisque la courbe seroit à double courbure.

Les trois coordonnées rectangulaires de la courbe que l'on considère étant x , y , z , soient a , ϵ , γ , les coordonnées respectives du centre de courbure qui correspond

à ce point; de plus soient $\zeta = \varphi a$, $\gamma = \psi a$, les équations de la courbe qui passe par tous les centres de courbure, φ & ψ , étant deux fonctions de a . Cela posé, la longueur du rayon de courbure devant être égale à une constante a , on aura d'abord

$$(B) (x - a)^2 + (y - \varphi a)^2 + (z - \psi a)^2 = a^2.$$

Puis, dans toute courbe à double courbure, les distances d'un même centre quelconque de courbure aux trois points consécutifs de la courbe, dont il est le centre, sont toujours égales entr'elles; donc la distance du point de la courbe au centre de courbure correspondant ne change pas, lorsqu'on fait varier deux fois de suite l'ordonnée a ; donc les différences première & seconde de l'équation (B), prises en regardant a comme seule variable, doivent avoir lieu; donc on aura encore

$$(C) x - a + (y - \varphi a)\varphi' a + (z - \psi a)\psi' a = 0,$$

$$(D) \left\{ \begin{array}{l} -1 - (\varphi' a)^2 - (\psi' a)^2 \\ + (y - \varphi a)\varphi'' a + (z - \psi a)\psi'' a \end{array} \right\} = 0.$$

La considération qui vient de fournir les dernières équations est générale, & elle appartient à toutes les courbes à double courbure; mais la courbe dont il s'agit, a cela de particulier, que son rayon de courbure étant constant, la distance du même centre de courbure à quatre points consécutifs de la courbe est toujours la même; donc la distance du point de la courbe au centre de courbure ne change pas encore, lorsqu'on fait varier une troisième fois l'ordonnée; donc la différence troisième de l'équation (B), prise en regardant a comme seule variable, doit encore avoir lieu; donc on aura la quatrième équation

$$(E) \left\{ \begin{array}{l} -3\varphi' a\varphi'' a - 3\psi' a\psi'' a \\ + (y - \varphi a)\varphi''' a + (z - \psi a)\psi''' a \end{array} \right\} = 0.$$

Ainsi, en représentant l'équation (B) par $M = 0$, le système des quatre équations simultanées,

$$(B) \quad M = 0,$$

$$(C) \quad \left(\frac{dM}{da}\right) = 0,$$

$$(D) \quad \left(\frac{d^2M}{da^2}\right) = 0,$$

$$(E) \quad \left(\frac{d^3M}{da^3}\right) = 0,$$

appartient à la courbe dont le rayon de courbure est constant & $= a$, & il exprime la même chose que l'équation aux différences secondes ordinaires (A).

Les quatre équations que je viens de trouver seroient l'intégrale finie de l'équation (A), si leur nombre n'excédait pas celui des variables x, y, z ; mais, entre ces quatre équations, on peut éliminer x, y, z , & il reste entre $a, \phi a, \psi a$, une équation de condition qui doit être satisfaite, pour que les trois équations employées à l'élimination soient l'intégrale demandée.

Il résulte au moins de-là que les fonctions ϕ & ψ ne doivent pas être toutes deux arbitraires; & que l'une des deux étant prise à volonté, la forme de l'autre s'ensuit, pour que la courbe dont les équations sont $C = \phi a, \gamma = \psi a$, passe par les centres de courbure d'une courbe dont la courbure est constante. De plus, si l'on élimine les coordonnées x, y, z , l'équation résultante est en $a, \phi a, \psi a$, précisément la même que l'équation (A) en x, y, z , ce qui tient à une propriété remarquable des courbes de courbure constante, & que nous exposerons bientôt.

XXIII.

QUOIQUE les quatre équations (B), (C), (D), (E), ne présentent qu'un résultat différentiel, leur considération

Yyy ij

conduit cependant à l'intégrale première de l'équation (A). En effet si, de ces quatre équations, on différencie les deux premières, en regardant a comme constante, ce qui est permis en vertu de la seconde & de la troisième; & qu'entre les quatre équations (B), (C), $d(B)$, $d(C)$, on élimine les fonctions ϕ , ϕ' , on aura les deux équations

$$(b) \quad (x-a)^2 (dy^2 + dx^2) + 2(x-a)(z-\psi a) dx dz \\ + (z-\psi a)^2 (dy^2 + dz^2) = a^2 dy^2,$$

$$(c) \quad (x-a)(dy^2 + dx^2) + [(x-a)\psi' a + (z-\psi a)] dx dz \\ + (z-\psi a)\psi' a (dy^2 + dz^2) = 0.$$

Puis, après avoir pris dans l'équation $d.(B)$, la valeur de $\phi' a$, qui est $\phi' a = - \frac{\psi' a dz + dx}{dy}$, si on la différencie en regardant a comme constante, ce qui est encore permis, en vertu de l'équation (E), on trouvera

$$\phi'' a = - \frac{dz}{dy} \psi'' a.$$

Enfin substituant cette valeur de $\phi'' a$ dans (D), on aura la troisième équation

$$(d) \quad - (dx^2 + dy^2) - (dy^2 + dz^2) (\psi' a)^2 - 2 dx dz \psi' a \\ + (x-a) \psi'' a dx dz + (z-\psi a) \psi'' a (dy^2 + dz^2) = 0;$$

les trois équations (b), (c), (d), sont le résultat de l'élimination de la fonction ϕ & de ses différences entre les quatre équations (B), (C), (D), (E), & celles de leurs différentielles que l'on a pu prendre en regardant a comme constante.

Or, si l'on représente l'équation (b) par $N = 0$, les équations (c), (d) seront $(\frac{dN}{da}) = 0$, $(\frac{ddN}{da^2}) = 0$, ce qu'il est facile de reconnoître à l'inspection; donc une des intégrales, première & complète de l'équation (A)

aux différences ordinaires secondes, est le résultat de l'élimination de α entre les trois équations

$$(b) \quad N = 0,$$

$$(c) \quad \left(\frac{dN}{d\alpha} \right) = 0,$$

$$(d) \quad \left(\frac{ddN}{d\alpha^2} \right) = 0.$$

Il est facile de vérifier ce résultat par la différenciation, car si l'on différencie aux différences ordinaires les deux premières de ces équations, en regardant α comme constante, ce qui est permis en vertu de la seconde & de la troisième; & qu'entre les quatre équations (b) , (c) , $d(b)$, $d(c)$, on élimine les trois quantités α , $\downarrow\alpha$, $\downarrow'\alpha$, le résultat de l'élimination sera l'équation (A) de l'article XXII.

XXIV.

Si, au lieu d'éliminer la fonction ϕ & ses différentielles ϕ' , ϕ'' entre les équations (B) , (C) , $d(B)$, $d(C)$, on eût éliminé la fonction \downarrow & ses différentielles \downarrow' , \downarrow'' , on auroit trouvé, en faisant, pour abrégé,

$$(x - a)^2 (dz^2 + dx^2) + 2(x - a)(y - \phi a) dx dy + (y - \phi a)^2 (dy^2 + dz^2) - a^2 dz^2 = N^2,$$

que l'autre intégrale première & complète de l'équation (A) est le résultat de l'élimination de α entre les trois équations

$$(b') \quad N^2 = 0,$$

$$(c') \quad \left(\frac{dN^2}{d\alpha} \right) = 0,$$

$$(d') \quad \left(\frac{ddN^2}{d\alpha^2} \right) = 0,$$

intégrale qui est complétée par la fonction arbitraire ϕ ,

comme l'autre l'étoit par la fonction ψ , & qu'on peut vérifier de même par la différenciation.

X X V.

ACTUELLEMENT que nous avons les deux intégrales premières & complètes de l'équation (A), il est facile de trouver son intégrale finie. Pour cela il faut observer que, s'il étoit possible d'éliminer a entre les trois équations de la première intégrale, ce qui produiroit deux équations sans a , & ensuite d'éliminer encore a entre les trois équations de la seconde intégrale, ce qui produiroit deux autres équations sans a ; on auroit alors quatre équations sans a , qui contiendroient les quantités différentielles $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, & les deux fonctions arbitraires ϕ , ψ ; & en éliminant entre ces quatre équations les deux quantités $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, les deux équations résultantes seroient l'intégrale finie de l'équation (A). Mais, quoique les éliminations dont il s'agit ici ne puissent pas se faire en général, on peut néanmoins les indiquer; d'ailleurs il est nécessaire de remarquer que a devant être éliminé d'abord entre les trois équations (b), (c), (d), prises en particulier, & ensuite entre les trois autres (b'), (c'), (d'), prises de même en particulier, avant de combiner ces six équations, il faut accentuer a dans un des systèmes, par exemple, dans le second. D'après cela, en faisant, pour abrégé,

$$\begin{aligned} (x - a) (dy^2 + dx^2) + 2(x - a) (z - \psi a) dx dz \\ + (z - \psi a)^2 (dy^2 + dz^2) - a^2 dy^2 = N, \\ (x - a') (dz^2 + dx^2) + 2(x - a') (y - \phi a') dx dy \\ + (y - \phi a')^2 (dy^2 + dz^2) - a'^2 dz^2 = L, \end{aligned}$$

l'intégrale finie & complète de l'équation (A) est le résultat

de l'élimination des quatre quantités a , a' , $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, entre les six équations suivantes,

$$\begin{aligned} L &= 0, & N &= 0, \\ \left(\frac{dL}{da'} \right) &= 0, & \left(\frac{dN}{da} \right) &= 0, \\ \left(\frac{d^2L}{da'^2} \right) &= 0, & \left(\frac{d^2N}{da^2} \right) &= 0: \end{aligned}$$

& parce que les deux quantités $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, ne sont pas sous les fonctions arbitraires, l'élimination actuelle de ces quantités est possible. Cette élimination étant faite, il restera quatre équations sans différentielles, & l'intégrale finie de l'équation (A) sera le résultat de l'élimination des deux indéterminées a , a' entre ces quatre équations, que je ne rapporte pas, parce qu'elles sont d'un trop grand développement.

On opérera d'une manière analogue pour avoir l'intégrale finie d'une équation aux différences ordinaires d'un ordre quelconque, toutes les fois qu'on aura toutes les intégrales premières complètes.

On voit donc, non-seulement que l'équation (A) aux différences secondes ordinaires, qui ne satisfait pas aux conditions d'intégrabilité, n'est pas absurde, & qu'elle exprime une propriété réelle, puisqu'elle appartient à toutes les courbes à double courbure, dont le rayon de courbure est constant & $= a$; mais encore que cette équation est susceptible de deux véritables intégrations aux différences premières & d'une intégration en quantités finies; enfin que ses deux intégrales premières sont complétées chacune par une fonction arbitraire particulière, & que son intégrale finie est complétée par ces deux fonctions.

XXVL

AVANT que de quitter cet exemple, je rapporterai quelques propriétés de la courbe qui en est l'objet, moins

parce qu'elles sont très-remarquables, que pour donner une idée des résultats auxquels peut conduire la considération des équations aux différences ordinaires élevées.

1.^o Nous avons vu, *article XXIII*, qu'en faisant, pour abrégér,

$$(x - a)^2 + (y - \phi a)^2 + (z - \psi a)^2 - a^2 = M,$$

le système des quatre équations

$$M = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{da}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d^2M}{da^2}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d^3M}{da^3}\right) = 0,$$

appartient à la courbe dont la courbure est constante; mais que ce système n'est pas une intégrale, parce qu'en éliminant entre ces quatre équations, les trois coordonnées x, y, z , on arrive à une équation de condition qui est entre $a, \phi a, \psi a$, la même que l'équation aux différences ordinaires secondes, en x, y, z . Il résulte de-là que la courbe dont les coordonnées sont $a, \phi a, \psi a$, est aussi de courbure constante; & parce que les quatre équations expriment que quatre points consécutifs de la seconde courbe sont à égales distances du même point correspondant de la première, il s'ensuit que le rayon de courbure de la seconde courbe est le même, de grandeur & de position, que celui de la première.

Donc, lorsque la courbure d'une courbe est constante, cette courbe, & celle qui passe par ses centres de courbure, sont réciproques, c'est-à-dire, que ces deux courbes sont réciproquement, l'une, la ligne des centres de courbure de l'autre.

On

On pourroit arriver à ce résultat par une autre considération, car j'ai fait voir dans le Mémoire sur les développées (*Savans étrangers*, tome X), que les équations d'une courbe à double courbure étant $y = \phi x$, $z = \psi x$, & a , ζ , γ , étant les coordonnées de la courbe qui passe par les centres, pour avoir en a , ζ , γ , les équations de cette dernière, il falloit, en faisant, pour abréger,

$$(a - x)^2 + (\zeta - \phi x)^2 + (\gamma - \psi x)^2 - a^2 = M,$$

éliminer x entre les trois équations

$$\left(\frac{dM}{dx}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d^2M}{dx^2}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d^3M}{dx^3}\right) = 0;$$

donc, si le rayon de courbure de la première courbe est constant, & $= a$, il faut de plus, que l'on ait $M = 0$. Ainsi, une courbe de courbure-constante étant donnée, les équations de la ligne de ses centres satisfont aux quatre équations

$$M = 0, \quad \left(\frac{dM}{dx}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d^2M}{dx^2}\right) = 0, \quad \left(\frac{d^3M}{dx^3}\right) = 0.$$

Mais nous avons vu, *article XXIII*, que la ligne des centres étant donnée, les équations de la courbe de courbure constante satisfaisoient aux quatre équations

$$M = 0, \quad \left(\frac{dM}{da}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d^2M}{da^2}\right) = 0, \quad \left(\frac{d^3M}{da^3}\right) = 0.$$

De plus, les x , y , z entrent dans M , de la même manière que les a , ζ , γ ; donc, la courbe de courbure

constante, & celle qui passe par ses centres de courbure, se déduisent l'une de l'autre de la même manière, & sont par conséquent réciproques, comme je l'ai énoncé plus haut.

2.^o L'élément de la courbe qui passe par les centres de courbure d'une autre courbe, est toujours dirigé dans le plan normal à la seconde, car deux centres de courbure consécutifs sont toujours sur le même plan normal; mais lorsque la courbure d'une courbe est constante, l'élément de la ligne des centres est de plus perpendiculaire au rayon de courbure commun; donc les tangentes correspondantes des deux courbes sont toujours à la même distance, & dirigées dans des plans rectangulaires.

Donc, lorsque la courbure d'une courbe est constante, cette courbe & celle qui passe par ses centres de courbure, sont par-tout à la même distance l'une de l'autre; elles s'entrelacent perpétuellement, en se présentant toujours leurs concavités, à peu-près comme les torons d'une corde à deux brins, & leurs tangentes aux extrémités du rayon de courbure commun sont dans des plans rectangulaires.

Le filet d'une vis à base circulaire, est évidemment une courbe à courbure constante, & ses équations satisfont à l'équation (A). La ligne des centres de cette courbe est le filet d'une autre vis de même pas & de même axe, mais tracée sur un cylindre d'un diamètre plus ou moins grand que celui de la première, suivant que l'inclinaison constante de la tangente de la première est plus ou moins grande que 45 degrés; & le diamètre du cylindre de la seconde courbe est tel que, pour le même pas, l'inclinaison des tangentes des deux courbes sont complément l'une de l'autre.

Enfin, tout le monde connoît les vis à deux filets équidistans; on les emploie fréquemment dans les arts, & principalement dans les balanciers des monnoies: lorsque les tangentes de ces filets font des angles de 45 degrés avec le plan de la base du cylindre, ces deux courbes sont réciproquement l'une la ligne des centres de courbure de l'autre.

XXVII.

THÉORÈME I. La différence dx de la variable principale étant constante, si l'on a une équation aux différences secondes ordinaires à trois variables

$$(A) \quad F\left(\frac{ddy}{dx^2}, \frac{ddz}{dx^2}\right) = 0,$$

dans laquelle il n'entre que les différences secondes & la différence première constante dx ; l'intégrale première de cette équation sera le résultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les trois équations suivantes,

$$(B) \quad F\left(\frac{dy - \alpha dx}{x dx}, \frac{dz - \phi \alpha dx}{x dx}\right) = 0,$$

$$(C) \quad \left(\frac{dF}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$(D) \quad \left(\frac{ddF}{d\alpha^2}\right) = 0,$$

dans lesquelles la fonction F est la même que celle de la proposée, & où ϕ est une fonction arbitraire.

Pour le démontrer, soit fait, pour abrégé,

$$\frac{dy - \alpha dx}{x dx} = u, \quad \frac{dz - \phi \alpha dx}{x dx} = v,$$

les deux premières équations intégrales (B) , (C) , deviendront

$$(B') \quad F(u, v) = 0,$$

$$(C') \quad \left(\frac{dF}{du}\right) + \left(\frac{dF}{dv}\right) \phi' \alpha = 0;$$

si l'on différencie ces deux dernières équations, en regardant α comme constante, ce qui est permis en vertu des deux équations (C) , (D) , les différentielles seront toutes deux de la forme

$$Mdu + Ndv = 0;$$

Z z z ij

elles ne pourront pas subsister simultanément, & indépendamment de la forme de la fonction F , à moins que l'on n'ait en même-temps $du = 0$, $dv = 0$; ou, développant les valeurs de du & dv , à moins que l'on n'ait

$$\frac{dy - a dx}{x dx} = \frac{ddy}{d x^2},$$

$$\frac{dz - \varphi a dx}{x dx} = \frac{ddz}{d x^2};$$

or si l'on élimine de l'équation (B) les quantités a , φa , au moyen des deux dernières équations, on aura la proposée (A); donc, &c.

X X V I I I.

THÉORÈME II. La différence dx de la variable principale étant toujours regardée comme constante, & les quantités Y , Z étant composées l'une & l'autre, d'une manière quelconque, des trois variables x , y , z , & de leurs différences premières; si l'on a une équation aux différences ordinaires secondes

$$F\left(\frac{dY}{dx^2}, \frac{dZ}{dx^2}\right) = 0;$$

dans laquelle il n'entre que les différences des quantités x , Y , Z , l'intégrale première de cette équation sera le résultat de l'élimination de a entre les trois équations

$$F\left(\frac{Y - a dx}{x dx}, \frac{Z - \varphi a dx}{x dx}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dF}{da}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{ddF}{da^2}\right) = 0,$$

dans lesquelles F est la fonction de la proposée, & où φ est une fonction arbitraire.

Ce théorème est une suite du précédent.

XXIX.

THÉORÈME III. Quel que soit le nombre des variables u, x, y, z, \dots , parmi lesquelles u est la variable principale, dont la différence première du est regardée comme constante; de plus, les trois quantités X, Y, Z , étant composées d'une manière quelconque de toutes les variables & de leurs différences premières; si l'on a une équation aux différences ordinaires secondes

$$F\left(\frac{dY}{dX}, \frac{dZ}{dX}\right) = 0,$$

qui ne renferme que les différences des quantités X, Y, Z , une des intégrales premières de cette équation sera le résultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les trois équations

$$F\left(\frac{Y - \alpha du}{X}, \frac{Z - \beta \alpha du}{X}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dF}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{ddF}{d\alpha^2}\right) = 0.$$

XXX.

THÉORÈME IV. Quel que soit le nombre des variables parmi lesquelles u est la variable principale, dont la différence première du est regardée comme constante; de plus, les trois quantités U, V, W , étant composées d'une manière quelconque de toutes les variables; si l'on a l'équation aux différences ordinaires secondes

$$F\left(\frac{ddU}{ddW}, \frac{ddV}{ddW}\right) = 0,$$

outre l'intégrale première déduite du théorème précédent; cette équation en aura encore une autre, qui sera le résultat de l'élimination de l'indéterminée α' entre les trois équations suivantes

$$F \left[\frac{u dU - (U - \alpha') du}{u dW - W du}, \frac{u dV - (V - \phi \alpha') du}{u dW - W du} \right] = 0;$$

$$\left(\frac{dF}{d\alpha'} \right) = 0,$$

$$\left(\frac{ddF}{d\alpha'^2} \right) = 0.$$

Ces deux derniers théorèmes se démontrent comme le premier.

CONCLUSION.

ON voit donc, 1.^o que les équations aux différences ordinaires secondes, qui ne satisfont pas aux anciennes conditions d'intégrabilité, & par une analogie évidente celles des ordres supérieurs, n'énoncent rien d'absurde; qu'elles sont susceptibles d'une véritable intégration, & que leurs intégrales sont complétées par des fonctions arbitraires; 2.^o que celles de ces équations qui ne renferment que trois variables, appartiennent à des courbes à double courbure, dont elles expriment la génération; & c'est lorsque cette génération ne dépend pas seulement de quelques points donnés à volonté, mais de courbes prises arbitrairement, que les intégrales de ces équations différentielles sont complétées par des fonctions arbitraires.

Des Équations aux différences partielles du premier ordre.

XXXI.

ON a déjà vu qu'étant proposée une équation aux différences partielles du premier ordre, & à trois variables, représentée par $V = 0$, si l'on substitue dans cette équation pour p ou q , pour p , par exemple, la valeur prise dans l'équation $dZ = p dx + q dy$, & qu'on élimine q du résultat, au moyen de la différentielle prise en regardant q comme seule variable, on aura une équation aux différences ordinaires $U = 0$, qui en général sera élevée. On a vu pareillement que si l'intégrale complète de l'équation aux différences ordinaires est le résultat de l'élimination de α entre les trois équations

$$M = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{da} \right) = 0,$$

$$\left(\frac{ddM}{da^2} \right) = 0;$$

M étant trouvée par intégration, & contenant une fonction arbitraire de a , l'intégrale complète de l'équation aux différences partielles $V = 0$, est le résultat de l'élimination de a entre les deux premières de ces équations intégrales; en sorte que de la perfection du calcul intégral des équations aux différences ordinaires, s'ensuivroit celle du calcul des équations aux différences partielles.

Ce que j'ai dit dans le Mémoire précédent sur l'intégration des équations aux différences partielles linéaires, est un cas particulier de la méthode que je viens de proposer, car l'équation linéaire est toujours de la forme

$$Lp + Mq + N = 0.$$

Si l'on élimine p , au moyen de l'équation $dz = pdx + qdy$,

on a $Ldz + Ndx + q(Mdx - Ldy) = 0$;

& si l'on différencie cette dernière équation, en regardant q comme seule variable, on a

$$Mdx - Ldy = 0,$$

& par conséquent

$$Ldz + Ndx = 0,$$

qui sont les deux équations que j'ai données, & que M. de la Grange avoit publiées auparavant.

X X X I I.

LES intégrales de toutes les équations aux différences partielles, même du premier ordre & à trois variables, ne sont pas susceptibles d'être mises sous la forme précédente, parce que cette forme suppose tacitement que l'équation

appartient à une surface courbe; & il y a un nombre infini d'équations aux différences partielles qui appartiennent à des courbes à double courbure, & dont l'intégrale ne peut être exprimée que par le système de deux équations simultanées, entre lesquelles il n'y a rien à éliminer, ou par le système de trois équations, entre lesquelles il faut éliminer une indéterminée, comme je vais le faire voir dans l'exemple suivant.

Soit proposé d'intégrer l'équation

$$p - Ay = \phi(q + Ax),$$

dans laquelle A est une constante, & où ϕ est une fonction arbitraire.

Ce que cette équation a de remarquable, c'est que si l'on fait $A = 0$, elle devient $p = \phi q$, qui appartient à toutes les surfaces développables, & dont l'intégrale est connue; tandis que si on laisse subsister A , elle n'appartient plus à une surface courbe, mais à une courbe à double courbure.

En effet, soit fait, pour abrégé,

$$q + Ax = a,$$

ce qui donnera

$$p - Ay = \phi a.$$

Il est clair que la quantité a est une indéterminée sur la valeur de laquelle rien ne doit être prononcé, & qui est destinée à disparaître par élimination. Si l'on substitue pour p & q les valeurs précédentes dans $dz = p dx + q dy$, on aura

$$dz = dx \phi a + a dy - A(x dy - y dx).$$

Actuellement, si cette équation aux différences ordinaires étoit intégrable en regardant a comme constant, & si son intégrale complétée par une fonction arbitraire de a étoit $M = 0$, il est évident, par les principes de ce genre de calcul, que l'intégrale complète de la proposée seroit

seroit le résultat de l'élimination de a entre les deux équations $M = 0$, $(\frac{dM}{da}) = 0$; mais l'équation aux différences ordinaires ne satisfait pas aux conditions d'intégrabilité, elle appartient à une courbe à double courbure, qui ne peut être exprimée en quantités finies, que par le système de deux équations, & d'après l'article XVI, si la quantité a étoit une constante absolue, ces deux équations seroient

$$z = x\phi a + ay + \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\psi'\left(\frac{y}{x}\right) = -Ax^2.$$

De plus, a n'est pas une constante absolue, elle doit seulement être regardée comme constante dans l'intégration précédente, c'est-à-dire, que cette intégration est prise en regardant comme constantes les deux quantités $\frac{y}{x}$ & a ; donc la fonction ψ qui complète l'intégrale doit être composée de ces deux quantités; donc l'intégrale complète de la proposée est le résultat de l'élimination de l'indéterminée a entre les trois équations

$$(A) \quad z = x\phi a + ay + \psi\left(\frac{y}{x}, a\right)$$

$$(B) \quad x\phi' a + y + \psi''\left(\frac{y}{x}, a\right)$$

$$(C) \quad \psi'\left(\frac{y}{x}, a\right) = -Ax^2,$$

dont la seconde est la différentielle de la première, prise en regardant a comme seule variable, & dans lesquelles ψ est une fonction arbitraire de deux quantités, ψ' & ψ'' étant les coefficients de du & dv dans la différentielle de $\psi(u, v)$. Le résultat de cette élimination comporte deux équations qui sont celles de la courbe à double

554 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
courbure, à laquelle appartient l'équation aux différences
partielles.

Parmi les équations aux différences partielles, il y en
a donc qui appartiennent à des courbes à double courbure;
leur intégrale finie ne peut être exprimée que par le sys-
tème de deux équations entre lesquelles il n'y a rien à
éliminer, & cette intégrale est complétée par une fonction
arbitraire de deux quantités, ce que les Géomètres ne
s'étoient encore permis que pour les intégrales des équations
à quatre variables.

Comme la conclusion précédente est extraordinaire, je
vais la vérifier de plusieurs manières.

1.^o Si, dans l'intégrale, on fait $A = 0$, l'équation (C)
donne $\psi' = 0$, ce qui indique que la quantité $\frac{y}{x}$ n'entre
pas dans la fonction ψ ; ainsi cette intégrale se réduit aux
deux équations

$$\begin{aligned} z &= x\phi a + ay + \psi a \\ x\phi'a + y + \psi'a &= 0, \end{aligned}$$

qui sont l'intégrale connue de l'équation $p = \phi q$, que
l'on obtient en faisant de même dans la proposée $A = 0$.

2.^o Si l'on différencie l'équation (A) en regardant a
comme constante, ce qui est permis en vertu de (B), on
trouve

$$\begin{aligned} p &= \phi a - \frac{y}{x} \psi' \left(\frac{y}{x}, a \right), \\ q &= a + \frac{1}{x} \psi' \left(\frac{y}{x}, a \right); \end{aligned}$$

si l'on substitue pour ψ' , la valeur, prise dans (C), on a

$$\begin{aligned} p &= \phi a + Ay, \\ q &= a - Ax; \end{aligned}$$

& enfin, éliminant a , on obtient

$$p - Ay = \phi(q + Ax),$$

qui est la proposée.

3.^o Si l'on prend des cas particuliers, c'est-à-dire, si l'on donne aux fonctions φ , ψ , des formes déterminées, & qu'on élimine a entre les trois équations (A), (B), (C), on aura deux équations qui, par la différenciation, satisfont à la proposée.

X X X I I I.

EN opérant d'une manière analogue, on trouve qu'étant proposée l'équation aux différences partielles à quatre variables u , x , y , z ,

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) + Aux = \varphi\left[\left(\frac{dz}{dx}\right) - Axy, \left(\frac{dz}{dx}\right) - Auy\right],$$

dans laquelle A est une constante absolue, & φ une fonction arbitraire de deux quantités; son intégrale complète est le résultat de l'élimination des deux indéterminées a , ζ , entre les quatre équations suivantes,

$$z = ax + \zeta x + y\varphi(a, \zeta) + \psi\left(\frac{u}{y}, a, \zeta\right),$$

$$u + y\varphi'(a, \zeta) + \psi' = 0,$$

$$x + y\varphi''(a, \zeta) + \psi'' = 0,$$

$$\psi' = Ay^2,$$

dont la deuxième & la troisième sont les différentielles de la première, prises en regardant a pour l'une, & ζ pour l'autre, comme seule variable; dans lesquelles ψ est une fonction arbitraire de trois quantités; où φ' & φ'' sont les deux coefficients de la différence de φ ; & où ψ' , ψ'' , sont les coefficients de la différence de ψ .

Le calcul intégral des équations aux différences ordinaires, & celui des équations aux différences partielles, dépendant réciproquement l'un de l'autre, tous les pas que l'on fait dans la seconde de ces deux espèces de calculs, sont utiles à la première; ainsi, je vais rapporter quelques théorèmes, qui ne sont pas compris dans ceux de M. de la Grange.

Je supposerai que le nombre des variables soit quelconque,
& je ferai, pour abrégér,

$$dz = pdu + qdx + rdy \dots\dots\dots$$

THÉORÈME I. Les quantités U, X, Y , étant des
fonctions données respectivement en u, x, y , l'intégrale
complète de l'équation aux différences partielles

$$F(z, pU, qX, rY \dots\dots) = 0,$$

ne dépend que des quadratures.

Soit fait

$$pU = a rY,$$

$$qX = \mathcal{C} rY,$$

$$\dots\dots\dots$$

$a, \mathcal{C} \dots\dots$ étant des indéterminées sur la valeur desquelles
on ne doit rien statuer, & qui sont destinées à disparaître
par l'élimination; & soient substituées dans la proposée
pour $pU, qX \dots\dots$ leurs valeurs, l'équation deviendra

$$f(z, a, \mathcal{C}, \dots\dots rY) = 0,$$

de laquelle on pourra tirer la valeur de rY en $z, a, \mathcal{C} \dots\dots$. Soit cette valeur

$$rY = f(z, a, \mathcal{C} \dots\dots),$$

on en conclura

$$pU = af(z, a, \mathcal{C} \dots\dots),$$

$$qX = \mathcal{C}f(z, a, \mathcal{C} \dots\dots);$$

substituant pour $p, q, r \dots\dots$ ces valeurs dans

$$dz = pdu + qdx + rdy \dots\dots\dots$$

on aura

$$\frac{dz}{f(z, a, \mathcal{C} \dots\dots)} = \frac{adu}{U} + \frac{\mathcal{C}dx}{X} + \frac{dy}{Y} \dots\dots\dots$$

équation dont l'intégrale, en regardant $a, C \dots$ comme constantes, ne dépend que des quadratures, & doit être complétée par une fonction arbitraire des constantes hypothétiques $a, C \dots$. Soit $M = 0$, cette intégrale ainsi complétée; elle ne pourra pas être employée seule, parce qu'il faut indiquer ce qui a été regardé comme constant dans l'intégration; on aura donc, simultanément,

$$M = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{da}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{dC}\right) = 0,$$

.....

Toutes ces équations devant avoir lieu, indépendamment des valeurs de $a, C \dots$ si l'on élimine ces indéterminées, on aura l'intégrale complète de la proposée. L'élimination dont il s'agit ici, ne peut pas s'exécuter en général, parce que les quantités $a, C \dots$ sont sous la fonction arbitraire & sous les différences partielles.

X X X V.

THÉORÈME II. Les quantités $L, M, N, P \dots$ en même nombre que les variables, étant composées des variables & des différences partielles premières, de manière que toutes les équations suivantes, moins une, étant posées, la dernière s'en suive nécessairement,

$$dL = 0,$$

$$dM = 0,$$

$$dN = 0,$$

$$dP = 0,$$

.....

si l'on a une équation composée de toutes ces quantités;
& que je représente par

$$F(L, M, N, P, \dots) = 0,$$

F étant une fonction quelconque donnée, algébrique ou transcendante, arbitraire ou déterminée; on aura l'intégrale de cette équation, en éliminant d'abord toutes les différences partielles, & une des deux fonctions arbitraires ϕ ou ψ , entre les équations suivantes,

$$L = \phi(a, \zeta, \dots),$$

$$M = \psi(a, \zeta, \dots),$$

$$N = a,$$

$$P = \zeta,$$

.....

$$F(\phi, \psi, a, \zeta, \dots) = 0,$$

dans lesquelles F est la même fonction que celle de la proposée; ce qui produira une équation unique que je représente par $M = 0$, puis en éliminant toutes les indéterminées a, ζ, \dots entre les équations

$$M = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{da}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{d\zeta}\right) = 0,$$

.....

Exemple. Soit proposée l'équation

$$F[p, q, r, \dots (z - pu - qx - ry, \dots)] = 0,$$

dans laquelle F indique une fonction quelconque donnée. Comme de toutes les équations

$$dp = 0,$$

$$dq = 0,$$

$$dr = 0,$$

.....

$$d(z - px - qy - ry \dots) = 0,$$

une quelconque fuit de toutes les autres, la proposée est dans le cas du théorème, & son intégrale est le résultat de l'élimination des indéterminées $a, C \dots$ entre les équations suivantes,

$$F\{\phi(a, C \dots), a, C \dots [z - a\phi(a, C \dots) - ax - Cy \dots]\} = 0,$$

$$\left(\frac{dF}{da}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dF}{dC}\right) = 0,$$

.....

M. de la Grange avoit donné un résultat analogue, seulement pour le cas de deux variables principales.

X X X V I.

Sur les équations aux différences partielles des ordres supérieurs.

CE que nous avons dit des équations aux différences partielles du premier ordre, a pareillement lieu pour celles des ordres supérieurs; c'est-à-dire qu'en faisant, pour abrégér,

$$dz = p dx + q dy,$$

$$dp = r dx + s dy,$$

$$dq = s dx + t dy,$$

si l'on substitue dans une équation aux différences partielles secondes $V = 0$, pour r & t leurs valeurs en dp, dq, dx, dy , prises dans les équations précédentes, on aura une équation qui ne renfermera plus d'autres différences

partielles secondes que s ; & si l'on différencie cette équation en regardant s comme seule variable, & qu'ensuite on élimine s au moyen de cette différentielle, on aura une équation $U = 0$ aux différences ordinaires entre les variables x, y, z, p, q , dont l'intégrale fournira celle de la proposée.

Le résultat aux différences ordinaires que j'ai représenté en général par $U = 0$, peut arriver sous plusieurs formes très-différentes.

1.^o Ce résultat peut comporter deux équations aux différences ordinaires, ce qui aura toujours lieu lorsque la proposée sera linéaire, & dans quelques cas des différences élevées; alors si les intégrales de ces deux équations aux différences ordinaires sont $M = a$, $N = c$, a & c étant les constantes arbitraires introduites par les intégrations, l'intégrale première de la proposée sera $M = \phi N$.

2.^o Si le résultat aux différences ordinaires ne renferme qu'une seule équation élevée, & que l'intégrale complète de cette équation soit le résultat de l'élimination de l'indéterminée a entre trois équations de cette forme

$$\begin{aligned} M &= 0, \\ \left(\frac{dM}{da} \right) &= 0, \\ \left(\frac{ddM}{da^2} \right) &= 0, \end{aligned}$$

l'intégrale première de la proposée sera le résultat de l'élimination de a entre les deux premières équations

$$\begin{aligned} M &= 0, \\ \left(\frac{dM}{da} \right) &= 0. \end{aligned}$$

3.^o Enfin si le résultat aux différences ordinaires est une équation linéaire unique, & pour laquelle les anciennes conditions d'intégrabilité ne soient pas satisfaites, on se comportera

comportera d'une manière analogue à ce que j'ai fait, *article XXXII.*

Je vais apporter un exemple pour chacun de ces trois cas.

XXXVII.

EXEMPLE I. Soit proposé d'intégrer l'équation aux différences partielles secondes

$$r - s^2 + A = 0,$$

dans laquelle A est une constante.

Je substitue pour r & t leurs valeurs prises dans

$$dp = r dx + s dy, dq = s dx + t dy,$$

ce qui donne

$$s(dq dy + dp dx) = dp dq + A dx dy.$$

Je différencie cette équation en regardant s comme seule variable, & j'élimine s , ce qui, dans ce cas où s est linéaire, se réduit à égaler à zéro chacun des deux membres; & j'ai les deux équations aux différences ordinaires

$$dq dy + dp dx = 0,$$

$$dp dq + A dx dy = 0,$$

desquelles on tire

$$dp = - dy \sqrt{A},$$

$$dq = dx \sqrt{A};$$

or ces deux équations sont des différences exactes, & leurs intégrales complètes sont

$$p + y \sqrt{A} = a,$$

$$q + x \sqrt{A} = c;$$

donc faisant $a = \phi c$, l'intégrale complète première de la proposée est

$$p + y \sqrt{A} = \phi[q - x \sqrt{A}].$$

Mém. 1784.

B b b b

Si dans la proposée on fait $A = 0$, elle devient $rt - s^2 = 0$, équation des surfaces développables; & si on fait la même supposition dans l'intégrale, on a $p = \phi q$, qui est une des intégrales premières de cette équation.

Actuellement, l'intégrale que l'on vient de trouver, est précisément l'équation que j'ai traitée, *article XXXII*; donc l'intégrale complète de la proposée est le résultat de l'élimination de l'indéterminée a entre les trois équations

$$z = x\phi a + ay + \psi\left(\frac{y}{a}, a\right),$$

$$x\phi'a + y + \psi'\left(\frac{y}{a}, a\right),$$

$$\psi'\left(\frac{y}{a}, a\right) = x^2 V(A),$$

dont la seconde est la différentielle de la première, prise en regardant a comme seule variable; & dans lesquelles ϕ est une fonction arbitraire d'une quantité, ψ est une fonction arbitraire de deux quantités, ψ' & ψ'' sont les coefficients de du & dv dans la différentielle de $\psi(u, v)$.

Ainsi la proposée appartient à une courbe à double courbure, excepté dans le cas où l'on a $A = 0$; alors elle appartient à toutes les surfaces développables.

XXXVIII.

EXEMPLE II. Soit proposé d'intégrer l'équation

$$(rt - s^2)^2 + 4rs = 0.$$

Je chasse r & t , au moyen des équations

$$dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy,$$

ce qui donne

$$\left[dpdq - s(dqdy + dpdx) \right]^2 + 4sdx dy^2 (dp - sdy) \Big\} = 0;$$

différenciant cette équation, en regardant s comme seule variable, & éliminant ensuite s au moyen de cette différentielle, je trouve l'équation aux différences ordinaires,

$$dpdq = dy^2.$$

Or, cette équation élevée est comprise dans celles que j'ai traitées, *article VII*, & en faisant, pour abréger,

$$(p - a)(q - \phi a) - y^2 = M,$$

son intégrale est le résultat de l'élimination de a entre les trois équations

$$M = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{da}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d^2M}{da^2}\right) = 0;$$

donc une des intégrales premières de la proposée est le système des deux premières de ces trois équations, c'est-à-dire, le résultat de l'élimination de l'indéterminée a entre les deux suivantes,

$$(p - a)(q - \phi a) - y^2 = 0,$$

$$(p - a)\phi' a + q - \phi a = 0.$$

Pour avoir l'intégrale finie, je tire de ces deux équations les valeurs de p & q , ce qui donne

$$p = a + \frac{y^2}{\sqrt{(-\phi' a)}},$$

$$q = \phi a + y\sqrt{(-\phi' a)};$$

& substituant ces valeurs dans $dz = p dx + q dy$, je trouve

$$dz = a dx + dy\phi a + \frac{y^2}{\sqrt{(-\phi' a)}}(dx - dy\phi' a).$$

Si cette dernière équation étoit intégrable, en regardant a comme constante, & que son intégrale, complétée par

Bbbb ij

une fonction arbitraire de a , fût $M = 0$, l'intégrale finie demandée seroit le résultat de l'élimination de a entre les deux équations $M = 0$, $(\frac{dM}{da}) = 0$, & cette intégrale appartiendrait à une surface courbe. Mais la dernière équation aux différences ordinaires n'est pas intégrable en regardant a comme constante; & pour qu'elle le devînt, il faudroit encore regarder $x - y\phi'a$ comme constante; donc je pourrai l'intégrer dans cette double hypothèse, & alors il faudra, 1.^o compléter l'intégrale par une fonction arbitraire des deux quantités regardées comme constantes dans l'intégration; 2.^o exprimer par deux équations, que ces deux quantités n'ont pas varié, ce qui donnera

$$\begin{aligned} z &= ax + y\phi a + \psi [(x - y\phi'a), a] \\ x + y\phi'a - y\phi''a\psi' + \psi'' &= 0, \\ \psi' &= \frac{1}{\sqrt{-(\phi'a)}}; \end{aligned}$$

donc l'intégrale finie de la proposée est le résultat de l'élimination de a entre les trois équations précédentes, dont la seconde est la différentielle de la première, prise en regardant a comme constante, & dans lesquelles ϕ est une fonction arbitraire d'une quantité, ψ est une fonction arbitraire de deux quantités, & ψ' , ψ'' sont les coefficients de du & dv dans la différentielle de $\psi(u, v)$. Ainsi la proposée appartient à une courbe à double courbure.

X X X I X.

EXEMPLE III. Soit proposé

$$Ar + Bq + z = 0,$$

dans laquelle A & B sont des constantes.

Je substitue pour r sa valeur dans $dp = rdx + sdy$, & je trouve

$$Adp + (Bq + z)dx = Asdy;$$

Éliminant s au moyen de la différentielle prise en regardant s comme seule variable, ce qui se réduit à égaler à zéro les deux membres de l'équation, j'obtiens les deux équations aux différences ordinaires simultanées,

$$A p + (B q + z) dx = 0,$$

$$dy = 0,$$

en sorte que si la première satisfaisoit aux conditions d'intégrabilité, & que son intégrale fût $M = a$, l'intégrale première de la proposée seroit $M = \phi y$. Mais la première équation ne satisfait pas aux conditions d'intégrabilité, & son intégrale, prise indépendamment de la seconde équation, seroit le système des deux équations simultanées,

$$A p + \phi x = 0,$$

$$\phi' x = B q + z;$$

donc cette intégrale devant être prise en supposant que la seconde équation ait lieu, l'arbitraire qui la complète doit être aussi fonction de y ; & l'on doit avoir pour intégrale première de la proposée, le système des équations simultanées,

$$A p + \phi(x, y) = 0,$$

$$\phi'(x, y) = B q + z,$$

dans lesquelles ϕ' est le coefficient de dx dans la différentielle de $\phi(x, y)$.

Cette intégrale première peut être mise sous une autre forme; car si l'on tire de ces équations les valeurs suivantes de p, q ,

$$p = \frac{-\phi(x, y)}{A},$$

$$q = \frac{\phi'(x, y) - z}{B},$$

566 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
 & qu'on les substitue dans $dz = p dx + q dy$, on aura

$$dz = \frac{-dx\phi(x,y)}{A} + \frac{dy\psi(x,y) - zdy}{B}.$$

équation aux différences ordinaires du premier ordre, qui ne renferme aucune indéterminée, & qui devant subsister sans condition, est elle-même la véritable intégrale première de l'équation aux différences partielles du second ordre, c'est-à-dire, qu'elle exprime la même chose, & qu'elle est de la même généralité que la proposée; & parce que cette équation ne satisfait pas aux conditions d'intégrabilité, & que son intégrale ne peut être exprimée que par le système de deux équations simultanées, il s'en suit que la proposée appartient à une courbe à double courbure.

Actuellement, pour intégrer encore une fois cette équation, soit $\phi(x, y)$ le coefficient de dx dans la différentielle d'une autre fonction arbitraire $\psi(x, y)$, de manière que l'on ait

$$\phi(x, y) = \psi(x, y),$$

$$\phi'(x, y) = \psi'(x, y),$$

ψ' étant le coefficient de dx dans la différence seconde de ψ , l'équation aux différences ordinaires deviendra

$$dz = -d\frac{\psi(x,y)}{A} + dy\left[\frac{\psi'(x,y) - z}{B} + \frac{\psi''(x,y)}{A}\right],$$

ψ'' étant le coefficient de dy dans la différentielle de $\psi'(x, y)$. Or d'après ce que j'ai dit sur l'intégration des équations aux différences ordinaires linéaires, l'intégrale de cette équation est le système des deux équations simultanées

$$z = -\frac{\psi(x,y)}{A} + \pi y,$$

$$\pi y = \frac{\psi'(x,y) - z}{B} + \frac{\psi''(x,y)}{A}.$$

dans lesquelles x est une fonction arbitraire de la seule quantité y ; donc ce système d'équations est aussi l'intégrale finie & complète de la proposée; ce qu'il est très-facile de vérifier par la différenciation.

X L.

Le même procédé s'applique aux équations d'ordres supérieurs. Je ne me permettrai qu'un seul exemple.

Soit proposé d'intégrer l'équation aux différences partielles du troisième ordre

$$\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right) \left(\frac{d^3 z}{dy^3}\right) = \left(\frac{d^3 z}{dx^2 dy}\right) \left(\frac{d^3 z}{dx dy^2}\right),$$

je chasse trois de ces différences partielles au moyen des trois équations suivantes

$$dr = \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) dx + \left(\frac{d^2 z}{dx dy}\right) dy,$$

$$ds = \left(\frac{d^2 z}{dx dy}\right) dx + \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) dy,$$

$$dt = \left(\frac{d^2 z}{dx dy^2}\right) dx + \left(\frac{d^2 z}{dy^3}\right) dy,$$

ce qui donne, en conservant $\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$,

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) (dt dy^2 - dr dx^2) = dr (ds dy - dr dx);$$

je différencie cette équation en regardant $\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$ comme seule variable, & j'élimine cette quantité au moyen de la différentielle, ce qui, à cause que $\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$ est linéaire, se réduit à égaler à zéro chacun des membres de l'équation, & j'ai les deux équations aux différences ordinaires

$$dr(ds dy - dr dx) = 0,$$

$$dt dy^2 - dr dx^2 = 0.$$

La première de ces deux équations a deux racines, dont l'une est $dr = 0$, en vertu de laquelle la seconde équation devient $dt dy^2 = 0$; dont une des racines est $dt = 0$; donc on a simultanément les deux équations

$$dr = 0,$$

$$dt = 0;$$

or les intégrales complètes de ces équations sont $r = a$, $t = c$; donc une des intégrales premières de la proposée est

$$t = \phi r,$$

ce qu'il est facile de vérifier par la différenciation.

X L I.

Les équations aux différences partielles élevées ne sont pas les seules qui puissent appartenir à des courbes à double courbure; la plupart des équations linéaires sont encore dans le même cas; nous nous contenterons de le faire voir par l'équation

$$(A) Ar + Bs + Ct + Dp + Eq + F = 0,$$

dans laquelle tous les coefficients sont constants. Nous avons déjà traité cette équation dans le Mémoire précédent, *article XXX*; mais l'intégrale que nous avons trouvée est encore trop particulière.

Si l'on substitue dans cette équation par r & t leurs valeurs prises dans

$$dp = rdx + sdy, dq = sdy + tdy,$$

& qu'ensuite l'on élimine s au moyen de la différentielle prise en regardant s comme seule variable, on aura les deux équations aux différences ordinaires simultanées

$$(B) A dy^2 - B dx dy + C dx^2 = 0,$$

$$(C) Adpdy - Cdqdx + dxdy(Dp + Eq + F) = 0,$$

les

les racines de la première sont

$$dy - k dx = 0, \text{ \& } dy + k' dx = 0,$$

k & k' étant les racines de l'équation algébrique

$$Ak^2 - Bk + C = 0;$$

ainsi, en employant la première racine, & l'introduisant dans l'équation (C), les deux équations aux différences ordinaires simultanées deviennent

$$(D) \quad dy - k dx = 0,$$

$$(E) \quad A(dp + k'dq) + dx(Dp + Eq + F) = 0.$$

Ce sont ces deux équations qui doivent donner une des intégrales premières de la proposée.

L'intégrale de l'équation (D) est $y - kx = a$, a étant la constante arbitraire; si celle de l'équation (E) étoit $M = C$, l'intégrale première seroit $M = \phi a$; mais, 1.^o l'équation (E) n'appartient pas en général à une surface courbe, & son intégrale ne peut être une équation unique que dans le cas où les coefficients de la proposée satisfont à l'équation

$$CD^2 + AE = BDE;$$

Dans tous les autres cas, l'intégrale de l'équation aux différences ordinaires (E), considérée indépendamment de l'équation (D), ne peut être exprimée que par le système des deux équations simultanées

$$A(p + k'q) + \phi x = 0,$$

$$\phi'x = Dp + Eq + F;$$

2.^o l'équation (E) ne doit pas être considérée seule, & son intégrale doit être prise en supposant que l'équation (D) ait lieu, c'est-à-dire, que a soit constant; donc cette intégrale doit être complétée, non pas par une fonction de x seulement, mais par une fonction de x & de a ; donc

la forme sous laquelle se présente d'abord l'intégrale première de la proposée, est le système des deux équations

$$(F) A(p + k'q) + \varphi(x, y - kx) = 0,$$

$$(G) \varphi'(x, y - kx) = Dp + Eq + F,$$

dans lesquelles φ est une fonction arbitraire de deux quantités, & où φ' est le coefficient de du dans la différence de $\varphi(u, v)$.

Cette intégrale se vérifie par la différenciation; d'ailleurs si l'on fait $D = 0$, $E = 0$, $F = 0$, la proposée devient

$$Ar + Bs + Ct = 0,$$

& l'équation (G) donne $\varphi'(x, y - kx) = 0$, ce qui exprime que la fonction φ , n'est composée que de la seule quantité $y - kx$; donc alors l'intégrale première se réduit à l'équation unique & connue

$$A(p + k'q) + \varphi(y - kx) = 0.$$

Des deux équations (F), (G) on tire les valeurs suivantes de p & de q ,

$$p(Dk' - E) = \frac{E}{A} \varphi(x, y - kx) - k' [F - \varphi'(x, y - kx)],$$

$$q(Dk' - E) = -\frac{D}{A} \varphi(x, y - kx) + F - \varphi'(x, y - kx);$$

& en les substituant dans $dz = p dx + q dy$, on trouve

$$(H) dz(Dk' - E) = \frac{1}{A} (E dx - D dy) + (F - \varphi') (dy - k' dx),$$

équation aux différences ordinaires, qui exprime seule la même chose que la proposée, & qui est une de ses intégrales premières, complétée par une fonction de deux

quantités. Si dans cette équation, l'on change les deux quantités k, k' l'une en l'autre, il est évident que l'on aura l'autre intégrale première de la proposée.

Les deux intégrales premières de l'équation (A) aux différences partielles linéaires, sont donc l'une & l'autre une véritable équation aux différences ordinaires, dans laquelle il n'est plus question des manières différentes dont la quantité z a pu varier; & parce que ces deux équations ne satisfont pas à la condition d'intégrabilité, & que leur intégrale commune ne peut être exprimée que par le système de deux équations simultanées, il s'ensuit que la proposée n'appartient pas en général à une surface courbe, mais à une courbe à double courbure.

Pour intégrer l'équation (H), il faut observer d'abord que l'intégrale du premier membre doit être une fonction des deux quantités $Ex - Dy$ & $y - k'x$, & ensuite que les différences partielles de cette fonction doivent être égales aux deux termes respectifs du second membre; ainsi l'intégrale finie de l'équation (A) est comportée par le système des trois équations

$$\begin{aligned} z(Dk' - E) &= \psi(Ex - Dy, y - k'x), \\ A\psi'(Ex - Dy, y - k'x) &= \phi(x, y - kx), \\ \psi''(Ex - Dy, y - k'x) &= F - \phi'(x, y - kx), \end{aligned}$$

dans lesquelles ψ est une fonction arbitraire de deux quantités, & où ψ' & ψ'' sont les coefficients de du & dv dans la différentielle de $\psi(u, v)$. De ces trois équations, la seconde est destinée à donner la forme de la fonction ϕ , d'après celle de la fonction ψ , & les deux autres équations sont celles de la courbe à double courbure, qui est le lieu de la proposée.

Si dans les équations (D), (E) on substitue pour dx, dy , leurs valeurs tirées des deux suivantes,

$$dy - k dx = da, \quad dy - k' dx = da',$$

Cccc ij

en opérant ensuite comme nous avons fait, on trouve que l'intégrale complète de la proposée est le système des deux équations

$$\begin{aligned} z &= \pi(y - kx, y - k'x), \\ (kD - E)\pi' + (k'D - E)\pi'' \Big\} &= 0, \\ + \frac{B^2 - 4AC}{A} \pi'^2 - F & \end{aligned}$$

dans lesquelles π est une fonction arbitraire de deux quantités, où π' & π'' sont les coefficients de du , dv dans la différentielle de $\pi(u, v)$, & où π'' est la moitié du coefficient de $du dv$ dans la différentielle seconde de la même fonction.

Comme l'équation d'une surface courbe quelconque peut toujours être mise sous la forme

$$z = \pi(y - kx, y - k'x),$$

il s'ensuit qu'il n'y a aucune surface courbe sur laquelle on ne puisse tracer une des courbes à double courbure qui satisfont à la proposée; & lorsque la fonction π est telle que la seconde équation est naturellement satisfaite, l'équation de la surface est elle-même un cas de l'intégrale complète, parce qu'alors la surface est toute composée de courbes qui satisfont à la proposée.

Ce que nous venons de dire sur cet exemple doit aussi s'appliquer aux autres cas que nous avons traités dans le Mémoire précédent. Par un semblable raisonnement, on trouve que pour l'équation $r - t - \frac{z^2}{x} = 0$, de l'article XV du Mémoire, l'intégrale première complète est l'équation aux différences ordinaires

$$dz + dy\phi(x, y - x) - \frac{dx + dy}{x} \phi'(x, y - x) = 0,$$

où ϕ est une fonction arbitraire de deux quantités, & où ϕ'

est le coefficient de du dans la différentielle de $\phi(u, v)$. Enfin l'intégrale finie est le système des deux équations

$$z = \psi(x + y, x - y),$$

$$\psi' + \psi'' = 2x\psi''',$$

dans lesquelles ψ est une fonction arbitraire de deux quantités, où ψ' , ψ'' sont les coefficients de du , dv dans la différentielle de $\phi(u, v)$, & où ψ''' est la moitié du coefficient de $du dv$ dans la différentielle seconde de la même fonction.

CONCLUSION GÉNÉRALE.

IL résulte de ce supplément :

1.^o que les équations aux différences ordinaires, pour lesquelles les conditions d'intégrabilité ne sont pas satisfaites, ne contiennent rien d'absurde, ni d'impossible, & qu'elles sont susceptibles d'une véritable intégration en quantités finies.

2.^o Que les intégrales de ces équations sont complétées, par des fonctions arbitraires de quantités variables, fonctions que l'on n'avoit encore employées que pour les intégrales des équations aux différences partielles.

3.^o Que les conditions d'intégrabilité ont seulement pour objet d'indiquer le nombre des équations dont l'intégrale finie doit être composée, toute élimination d'indéterminées étant supposée faite.

4.^o Que les intégrales du plus grand nombre des équations aux différences partielles ne sont pas susceptibles d'être exprimées par une seule équation, même en supposant que l'élimination de toutes les indéterminées soit faite; c'est-à-dire, par exemple, que dans le cas de trois variables, le plus grand nombre des équations aux différences partielles appartient à des courbes à double courbure, & non pas à des surfaces courbes, ce que toutes

les méthodes ordinaires d'intégration supposent tacitement; & alors le nombre des quantités qui entrent dans les fonctions arbitraires est plus grand que celui des variables principales diminué d'une unité.

5.^o Qu'il y a certaines équations aux différences partielles, dont les intégrales intermédiaires sont de véritables équations aux différences ordinaires.

6.^o Enfin, que la Géométrie peut encore faire de très-grands progrès, parce qu'on a le moyen de mettre en analyse des manières nouvelles d'engendrer les courbes, & parce qu'on a la faculté d'entendre un grand nombre de propriétés de l'étendue, qui sont exprimées par les relations qu'ont entr'elles des équations jusqu'ici regardées comme impossibles.

A D D I T I O N.

DANS le supplément qui précède, j'ai construit plusieurs équations aux différences ordinaires élevées; mais de toutes les équations linéaires, qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité, & que j'ai intégrées, je n'en ai construit aucune; je vais montrer, par un exemple, ce que ces sortes d'équations signifient dans l'espace.

Si l'on suppose qu'un œil, réduit à un point unique, soit placé d'une manière quelconque, par rapport à une surface courbe, j'appelle *ligne du contour apparent* de cette surface, la courbe composée des points extrêmes de cette surface, que l'œil peut apercevoir; cette ligne est le contact de la surface courbe avec une surface conique qui lui seroit circonscrite, & dont le sommet seroit au point de l'œil; d'après cela, je suppose qu'il s'agisse de trouver la ligne du contour apparent d'une surface quelconque de révolution autour de l'axe des z , vue par un œil situé dans le point dont les coordonnées sont a, b, c , indépendamment de la courbe génératrice de la surface.

L'équation de la surface de révolution est

$$z = \phi(x^2 + y^2),$$

& son équation aux différences partielles est

$$py - qx = 0.$$

L'équation de la surface conique à base quelconque, & dont le sommet est au point de l'œil, est

$$\frac{z-c}{x-a} = \psi\left(\frac{y-b}{x-a}\right),$$

& son équation aux différences partielles est

$$p(x-a) + q(y-b) = z-c.$$

Or, il est évident que pour la courbe demandée, non-seulement les x, y, z de la surface de révolution & de la surface conique, sont respectivement les mêmes, mais encore que les quantités p, q , sont les mêmes dans les deux surfaces, puisque tout le long de la courbe, ces deux surfaces ont le même plan tangent. Donc dans les deux équations

$$py - qx = 0, p(x-a) + q(y-b) = z-c,$$

les cinq quantités x, y, z, p, q ont les mêmes valeurs; donc si l'on prend dans ces deux équations les valeurs de p & de q , & qu'on les substitue dans $dz = p dx + q dy$, qui a également lieu pour les deux surfaces, on aura

$$[x(x-a) + y(y-b)] dz = (z-c)(x dx + y dy),$$

équation aux différences ordinaires linéaires, qui ne satisfait pas à la condition d'intégrabilité, & qui, considérée seule, exprime le contour apparent d'une surface quelconque de révolution autour de l'axe des z , vue par un œil placé dans le point dont les coordonnées sont a, b, c . L'intégrale de cette équation est le système des deux suivantes

$$z = \varphi(x^2 + y^2),$$

$$2[x(x-a) + y(y-b)]\varphi' = \varphi - c,$$

dans lesquelles φ est une fonction arbitraire.

On voit donc que toute équation aux différences ordinaires à trois variables, linéaire, du premier ordre, & qui ne satisfait pas à la condition d'intégrabilité, appartient à la courbe de contact de deux surfaces courbes générales, c'est-à-dire, de deux surfaces données chacune par une équation aux différences partielles linéaires.

FAUTES à corriger dans ce Mémoire.

<i>Pages.</i>	<i>Lignes.</i>	<i>Au lieu de,</i>	<i>Lisez,</i>
502.	27.....	faisant la,.....	faisant sur la,
504.	12.....	le mot qu'elle exprime,	ce mot, qu'elle exprime,
507.	22.....	sommes,.....	sommets,
517.	dernière,	le.....	la
522.	25.....	$d\left(\frac{\psi}{d\psi}\right)$,.....	$\left(\frac{d\psi}{d\psi}\right)$,
528.	7.....	THÉORÈME III, ..	THÉORÈME II,
529.	16.....	N,.....	M,
533.	{	18 & 26, u^2	$\frac{u^2}{2}$,
		21.....	0,.....
		27.....	y ,.....
		28.....	z ,.....
545.	19.....	dx^2	dx^3 .

SUITE

SUITE DE L'ESSAI

Pour connoître la Population du Royaume, & le nombre de ses habitans, en adaptant aux Villes, Bourgs & Villages, portés sur chacune des Cartes de M. de Cassini, l'année commune des Naissances, & en la multipliant par 26.

Par M.^{re} DU SÉJOUR, le Marquis DE CONDORCET
& DE LA PLACE.

Population de la Carte de la France, n.° 133.

ISLE-DE-RÉ.

« CETTE Isle contient la ville de Ré, & sept villages.

L'année commune des naissances de la ville de Ré,

est de..... 149.

Celle des 7 villages, est de..... 528.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
5 $\frac{1}{2}$.	1.	7.	3874.	13728.	17,602.	2496.

Cette île n'a qu'environ 5 lieues $\frac{1}{2}$ carrées de superficie habitable ; le reste est occupé par des rochers & des bancs, couverts le plus souvent par la mer.

378 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

LILLE.

Population de la Carte de la France, n.° 41.

« CETTE Carte contient les villes de Lille, de Douai, de Saint-Amand & de Condé, & 187 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Lille, est de 2462.
 Dans celle de Douai.....de..... 665.
 Dans celle de Saint-Amand.....de..... 296.
 Dans celle de Condé.....de..... 155.
 Et dans les 187 bourgs ou villages, de..... 7749.

OMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
107.	4.	187.	93028.	201474.	294502.	1883.

Cette Carte ne contient pour la France que 107 lieues ; le surplus dépend de la Flandre Autrichienne.

ISLE
D'OLERON.

*Population de l'île d'Oleron, portée sur les Cartes,
 n.°s 133 & 134.*

« CETTE île contient la ville d'Oleron, & 5 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville d'Oleron, est de 95.
 Et dans les 5 bourgs ou villages, de..... 484.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
12.	1.	5.	2470.	12584.	15054.	1094.

Cette île ne contient que 12 lieues carrées habitées ; il y en a environ 3 de sables, qui ne sont susceptibles d'aucune culture.

*Population de la Carte de la France, n.° 52.*CLERMONT-
FERRAND.

« CETTE Carte contient les villes de Clermont, de Riom, de Thiers, d'Ambert, de Billom & de Maringues, « & 228 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Clermont,	
est de.....	789.
Dans celle de Riom.....de.....	526.
Dans celle de Thiers.....de.....	508.
Dans celle d'Ambert.....de.....	228.
Dans celle de Billom.....de.....	143.
Dans celle de Maringues.....de.....	124.

2318.

Et dans les 228 bourgs ou villages, de..... 9534.

TOTAL..... 11852.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	6.	228.	60268.	247884.	308152.	791.

*Population de la Carte de la France, n.° 5.*SAINT-
OMER.

« CETTE Carte contient les villes d'Hesdin, de Lens, de Lilliers, de Saint-Omer, de Saint-Pol, de Saint-Venant, d'Armentières, de Béthune & de Cassel, & « 435 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville d'Hesdin,	
est de.....	117.
Dans celle de Lens.....de.....	76.
Dans celle de Lilliers.....de.....	115.

Dddd ij

580

Dans celle de Saint-Omer.....de.....	647.
Dans celle de Saint-Pol.....de.....	107.
Dans celle de Saint-Venant.....de.....	59.
Dans celle d'Armentières.....de.....	229.
Dans celle de Béthune.....de.....	162.
Dans celle de Cassel.....de.....	130.

1642.

Et dans les 435 bourgs ou villages, de..... 9020.

TOTAL..... 10662.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
246.	9.	435.	42692.	234520.	277212.	953.

Cette Carte ne contient, pour la France, que 246 lieues; le surplus dépend de la Flandre Autrichienne.

DUNKERQUE.

Population de la Carte de la France, n.° 6.

« CETTE Carte contient les villes de Dunkerque,
» Bergues, Bourgbourg, Gravelines, Ardres & Calais,
& 103 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Dunkerque,

est de.....	1032.
Dans celle de Bergues.....de.....	231.
Dans celle de Bourgbourg.....de.....	126.
Dans celle de Gravelines.....de.....	101.
Dans celle d'Ardres.....de.....	50.
Dans celle de Calais.....de.....	225.

1765.

Et dans les 103 bourgs ou villages, de..... 3024.

TOTAL..... 4789.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS delacampagne par lieue.
83.	6.	103.	45890.	78624.	124514.	947.

Cette Carte ne contient, pour la France, que 83 lieues; le reste est couvert par la mer, & occupé par le pays étranger.

Population de la Carte de la France, n.° 86.

MÂCON.

« CETTE Carte contient les villes de Mâcon, de Roanne, de Semur & de Villefranche, & 313 bourgs « ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Mâcon,	
est de.....	956.
Dans celle de Roanne.....de.....	272.
Dans celle de Semur en Brionnois,..de.....	45.
Dans celle de Villefranche.....de.....	184.

1457.

Et dans les 313 bourgs ou villages, de..... 8086.

TOTAL..... 9543.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS delacampagne par lieue.
250.	4.	313.	37882.	210236.	248118.	841.

E U. *Population de la Carte de la France, n.° 23.*

« CETTE Carte contient les villes d'Eu, du Tréport & de Saint-Vallery, & 156 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville d'Eu,
est de..... 109.

Dans celle du Tréport.....de..... 34.

Dans celle de Saint-Vallery.....de..... 103.

246.

Et dans les 156 bourgs ou villages, de..... 2209.

TOTAL..... 2455.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS. des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de lacampagne par lieue.
82.	3.	156.	6396.	57434.	63830.	778.
Cette Carte ne contient que 82 lieues cultivées ; le reste est couvert par la mer & par les sables de l'embouchure de la Somme.						

BOURG
EN BRESSE.

Population de la Carte de la France, n.° 117.

« CETTE Carte contient la ville de Bourg, & 273 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Bourg,
est de..... 286.

Et dans les 273 bourgs ou villages, de..... 6483.

TOTAL..... 6769.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
245.	1.	273.	7436.	168558.	175994.	688.

Cette Carte ne contient, pour la France, que 245 lieues; le surplus dépend de la Savoie.

Population de la Carte de la France, n.° 53.

ISSOIRE.

« CETTE Carte contient les villes d'Issoire & de Brioude, & 235 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville d'Issoire,

est de..... 181.

Dans celle de Brioude..... de..... 171.

352.

Et dans les 235 bourgs ou villages, de..... 5842.

TOTAL..... 6194.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	2.	235.	9152.	151892.	161044.	607.

Population de la Carte de la France, n.° 85.

« CETTE Carte contient les villes de Chalon-sur-Saône, Clugny & Montcenis, & 252 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Chalon,

est de.....	934.
Dans celle de Clugny.....de.....	149.
Dans celle de Montcenis.....de.....	50.
Et dans les 252 bourgs ou villages, de.....	5593.

TOTAL..... 6726.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	3.	252.	29458.	145496.	174954.	582.

Population de la Carte de la France, n.° 12.

« CETTE Carte contient les villes de Montluçon, Gueret & Evaux, & 219 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Montluçon,

est de.....	190.
Dans celle de Gueret.....de.....	121.
Dans celle d'Évaux.....de.....	71.

382.

Et dans les 219 bourgs ou villages, de..... 5436.

TOTAL..... 5818.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
850.	3.	219.	9932.	141336.	151238.	565.

Population de la Carte de la France, n.° 114. DIJON.

« CETTE Carte contient les villes de Dijon & de Gray
& 273 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Dijon,
est de..... 621.

Dans celle de Gray.....de..... 170.

791.

Et dans les 273 bourgs ou villages, de..... 5434.

TOTAL..... 6225.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	2.	273.	20566.	141284.	161850.	565.

Population de la Carte de la France, n.° 8. ORLÉANS.

« CETTE Carte contient les villes d'Orléans, de
Montargis & de Pithiviers, & 212 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville d'Orléans,
est de..... 1194.

Dans celle de Montargis.....de..... 197.

Dans celle de Pithiviers.....de..... 91.

1482.

Et dans les 212 bourgs ou villages, de..... 5208.

TOTAL..... 6690.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	3.	212.	38572.	135408.	173980.	541.

SENS.

Population de la Carte de la France , n.º 46.

« CETTE Carte contient les villes de Sens , de Provins ,
» de Nogent-sur-Seine & de Montereau , & 290 bourgs
ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Sens ,
est de..... 340.
Dans celle de Provins..... de..... 157.
Dans celle de Montereau..... de..... 118.
Dans celle de Nogent..... de..... 112.

727.

Et dans les 290 bourgs ou villages, de..... 4825.

TOTAL..... 5552.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	4.	290.	18902.	125450.	144352.	502.

Population de la Carte de la France, n.° 22.

BOULOGNE.

« CETTE Carte contient les villes de Boulogne & de Montreuil, & 69 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Boulogne,	
est de.....	295.
Dans celle de Montreuil.....	125.
	<hr/> 420.
Et dans les 69 bourgs ou villages, de.....	882.
TOTAL.....	<hr/> 1302.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
46.	2.	69.	10920.	22932.	33852.	498.

*Population de la Carte de la France, n.° 21.*AMBLETEUSE
ou PAS
DE CALAIS.

« CETTE Carte ne contient aucune ville, mais seulement 18 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans ces 18 bourgs ou villages, est de.....	225.
--	------

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
12.	0.	18.	0.	5850.	5850.	488.

Cette Carte ne contient que 12 lieues de superficie ; le reste est couvert par la mer.

AUTUN.

Population de la Carte de la France, n.º 84

« CETTE Carte contient les villes d'Autun, de Beaune,
» de Saulieu, d'Arnay-le-Duc & de Châteauchinon, &
207 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville d'Autun,

est de.....	283.
Dans celle de Beaune.....de.....	351.
Dans celle de Saulieu.....de.....	108.
Dans celle d'Arnay-le-Duc.....de.....	86.
Dans celle de Châteauchinon.....de.....	85.

913.

Et dans les 207 bourgs ou villages, de..... 4629.

TOTAL..... 5542.

NOMBRE des LIEUX de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	5.	207.	23738.	120354.	144092.	481.

BOURGES.

Population de la Carte de la France, n.º 10.

« CETTE Carte contient les villes de Bourges &
d'Issoudun, & 170 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Bourges,

est de.....	951.
Dans celle d'Issoudun.....de.....	464.

1415.

Et dans les 170 bourgs ou villages, de..... 4588.

TOTAL..... 6003.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	2.	170.	36790.	119288.	156078.	477.

Population de la Carte de la France, n.° 49.

NEVERS.

« CETTE Carte contient les villes de Nevers & de la Charité, & 208 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Nevers,

est de..... 475.
Dans celle de la Charité..... de..... 182.

Et dans les 208 bourgs ou villages, de..... 657.
4566.

TOTAL..... 5223.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	2.	208.	17082.	118716.	135798.	475.

Population de la Carte de la France, n.° 11.

LA CHÂTRE.

« CETTE Carte contient les villes de la Châtre & de Saint-Amand, & 170 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de la Châtre,

est de..... 171.
Dans celle de Saint-Amand..... de..... 224.

Et dans les 170 bourgs ou villages, de..... 395.
4176.

TOTAL..... 4571.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	2.	170.	10270.	108576.	118846.	434.

MOULINS.

Population de la Carte de la France, n.° 50.

« CETTE Carte contient les villes de Moulins, de
» Bourbon-Lancy & de Saint-Pierre-le-Moutier, & 142
bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Moulins,
est de..... 636.
Dans celle de Bourbon-Lancy....de..... 102.
Dans celle de Saint-Pierre-le-Moutier, de..... 114.

852.
Et dans les 142 bourgs ou villages, de..... 4039.

TOTAL..... 4891.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	3.	142.	19500.	105014.	124514.	420.

AUBUSSON.

Population de la Carte de la France, n.° 13.

« CETTE Carte contient la ville d'Aubusson, & 157
bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville d'Aubusson,
est de..... 180.
Et dans les 157 bourgs ou villages, de..... 3845.

TOTAL..... 4025.

NOMBRE des LIEUX de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	1.	157.	4680.	99970.	104650.	400.

Population de la Carte de la France, n.° 83.

AVALON.

« CETTE Carte contient les villes d'Avalon, de Montbart, de Noyers & de Semur en Auxois, & 239 « bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville d'Avalon, est de.....	144.
Dans celle de Montbart.....de.....	79.
Dans celle de Noyers.....de.....	75.
Dans celle de Semur en Auxois,...de.....	132.

430.

Et dans les 239 bourgs ou villages, de..... 3710.

TOTAL..... 4140.

NOMBRE des LIEUX de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	4.	239.	11180.	96460.	107640.	386.

Population de la Carte de la France, n.° 58.

NARBONNE.

« CETTE Carte contient les villes de Narbonne, d'Agde & de Béziers, & 75 bourgs ou villages. »

592 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

L'année commune des naissances dans la ville de Narbonne,

est de..... 293.
 Dans celle de Béziers..... de..... 495.
 Dans celle d'Agde..... de..... 239.

Et dans les 75 bourgs ou villages, de..... 1027.
 1259.

TOTAL..... 2286.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
105.	3.	75.	26702.	32734.	59436.	311.

Cette Carte ne contient que 105 lieues de superficie ; le reste est couvert par la mer.

MONTPELLIER.

Population de la Carte de la France, n.º 92.

« CETTE Carte contient les villes de Montpellier & d'Arles, & 107 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Montpellier,

est de..... 1104.
 Dans celle d'Arles..... de..... 615.

Et dans les 107 bourgs ou villages, de..... 1719.
 2066.

TOTAL..... 3785.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
183.	2.	107.	44694.	53716.	98410.	293.

Cette Carte ne contient que 183 lieues de superficie ; le reste est couvert par la mer.



MÉMOIRE

I. *TAB^{le} des décès en Religion dans le Royaume,
 de 1783 inclusivement.*

ANNÉE.	T S		EXCÉDANT des MORTS. sur les Naissances.	EXCÉDANT des NAISSANCES sur les Morts.
	ION.	TOTAL DES MORTS.		
1770...4.		709,786.	240,742.
1771...3.		770,101.	143,113.
1772...3.		864,656.	40,924.
1773...5.		840,639.	59,799.
1774...5.		774,988.	164,620.
1775...3.		817,480.	117,000.
1776...3.		740,699.	198,375.
1777...3.		751,711.	246,480.
1778...3.		744,160.	188,640.
1779...3.		966,467.	...9800..	
1780...7.		914,017.	75,289.
1781...3.		881,138.	89,268.
1782...1.		948,502.	27,201.
1783...4.		952,205.	...4264..	
Résultat des 14 années.		11,696,549.	14,064.	1,591,451.
Ann. coms.		834,037.	À déduire sur les résultats de la co- lonne de l'excédant des Naissances sur les Morts.....	14,064.
			Reste.....	1,577,387.
			Donc l'année com- mune, sur 14, est de.....	112,670.

II. P O Pénéralités , pendant l'année 1783.

NUMÉR. qui constatent l'ordre des Généralités & Provinces.	D É N O P a i s s a n c e s a v e c l e s D é c è s .		O B S E R V A T I O N S .
	DES GÉNÉRALITÉS distinguées en pays la ville de PARIS comme C	EXCÉDANT des Décès sur les Naissances.	
	PARIS (V	322.	<p>Ce Tableau présente des résultats d'autant plus affligeans, que, par comparaison avec ceux des quatre années antérieures, le nombre des Naissances y est diminué; que les décès y excèdent les Naissances, ce qui, depuis quatorze ans, n'étoit encore arrivé qu'en l'année 1779; qu'enfin les Mariages ne s'y trouvent pas dans la proportion nécessaire pour réparer, dans les années suivantes, la grande perte que la population a éprouvée.</p> <p>Les maladies épidémiques, qui avoient ravagé la généralité d'Amiens en 1781, & qui avoient paru cesser en 1782, s'y sont renouvelées en 1783.</p> <p>Les généralités d'Orléans, de Tours, de Poitiers, de Bourges, de la Rochelle, de Moulins, d'Alençon & de Rennes, qui, en 1782, avoient essuyé le même fléau, en ont encore été affligées en 1783.</p> <p>L'épidémie s'est étendue dans les généralités de Paris, de Châlons, de Rouen, d'Aix, de Dijon, de Metz & de Lille.</p> <p>Enfin les autres Généralités n'offrent pas des résultats capables d'indemniser de la mortalité que la plus grande partie du Royaume a éprouvée pendant le courant de l'année 1783.</p>
	GÉNÉRALITÉ		
1.	PARIS....	6,438.	
2.	ORLÉANS...	5,178.	
3.	TOURS....	8,747.	
4.	POITIERS...	346.	
5.	BOURGES...	1,695.	
6.	LIMOGES...	"	
7.	LA ROCHE...	1,527.	
8.	BORDEAU...	"	
9.	AUCH....	"	
10.	MONTAU...	"	
11.	GRENOBL...	"	
12.	LYON....	"	
13.	RIOM....	"	
14.	MOULINS...	1,897.	
15.	CHÂLONS...	159.	
16.	LE CLERM...	90.	
17.	SOISSON...	8.	
18.	AMIENS...	1,089.	
19.	ROUEN...	1,150.	
20.	CAEN....	"	
21.	ALENÇON...	3,140.	
	GÉNÉRALITÉ		
22.	RENNES...	11,121.	
23.	PERPIGNA...	"	
24.	MONTPEL...	"	
25.	AIX,....	2,839.	
26.	DIJON...	5,754.	
27.	BESANÇO...	"	
28.	STRASBO...	"	
29.	METZ....	1,380.	
30.	NANCY...	"	
31.	VALENCI...	"	
32.	LILLE...	1,017.	
33.	ÎLE DE C...	"	
RÉSULTAT du Royaume		53,897.	

M É M O I R E
S U R L A C O M B I N A I S O N
D U P R I N C I P E O X Y G I N E ,
Avec l'Esprit-de-vin , l'Huile , & différens Corps
combustibles.

Par M. L A V O I S I E R.

J'AI fait voir dans un Mémoire imprimé dans le recueil de l'Académie pour l'année 1781, page 492, que si on brûloit de l'esprit-de-vin dans un appareil propre à condenser la plus grande partie de l'eau produite par la combustion, on obtenoit environ dix-huit onces d'eau pour une livre ou seize onces d'esprit-de-vin. J'ai reconnu depuis que ce phénomène avoit constamment lieu dans la combustion d'un grand nombre de matières végétales & animales, & qu'on obtenoit également des huiles qui brûlent, un poids d'eau plus considérable que celui du combustible qui avoit été consommé.

L'appareil dont je me suis servi pour ce genre d'expériences, consiste dans une lampe construite sur les principes de celles de M.^r Meusnier, Argand, Lange & Quinquet; la mèche doit en être circulaire, elle doit avoir un canal intérieur qui donne un libre accès au courant d'air; la flamme doit être revêtue d'une cheminée de verre, dont on puisse à volonté rétrécir ou élargir l'ouverture inférieure; enfin, la mèche doit être mouchée courte, afin d'éviter la fumée, & que toute l'huile ou l'esprit-de-vin, élevé par la mèche, puisse brûler. A l'égard de la bougie, comme il auroit été très-difficile de lui fournir de l'air par un canal intérieur, & d'employer une mèche circulaire & creuse, j'ai été obligé de me borner à la cheminée extérieure de verre: mais pour que la combustion se

Mém. 1784.

Ffff

fit toujours à une même hauteur, & que la flamme de la bougie demeurât constamment à l'embouchure de la cheminée de verre, je l'ai renfermée dans un tuyau de fer-blanc, dont elle occupoit toujours le haut, par le moyen d'un ressort à boudin qui la pressoit par-dessous, à la manière des cierges à ressort qu'on emploie maintenant dans la plupart des églises.

Le tuyau de verre dans lequel brûle cette lampe ou bougie, s'adapte à une cheminée de fer-blanc, qui conduit la vapeur dans un serpentín où elle se condense comme on le voit, *figure 5.*

On n'obtient point, dans ces expériences, une quantité d'eau toujours constante; le même combustible en donne plus ou moins, suivant que l'expérience a été suivie avec plus ou moins de soin; mais, comme je l'ai déjà dit, à moins qu'on n'ait opéré très-négligemment, elle excède communément d'un huitième le poids de l'esprit-de-vin. L'augmentation est plus considérable avec l'huile; mais on n'obtient, avec la bougie, qu'un poids d'eau au plus égal à celui de la cire qui a été consommée. On verra dans la suite de ce Mémoire, que cette différence à l'égard de la bougie, tient à ce qu'on ne peut adapter à cette combustion le tuyau intérieur d'airage, & à ce qu'il se forme de la fumée qui se dissipe en pure perte: en effet, en opérant par une autre méthode dont je donnerai bientôt la description, on retire plus de dix-huit onces d'eau de la combustion d'une livre de cire.

Ces augmentations de poids s'expliquent d'une manière toute naturelle, en admettant, comme je l'ai annoncé ailleurs, que l'eau n'est point une substance simple, qu'elle est composée d'air vital & de gaz inflammable. On ne peut douter en effet que l'esprit-de-vin, les huiles, & presque tous les combustibles ne contiennent de l'air inflammable: on en a la preuve en faisant passer ces substances à travers un tube de verre rougi au feu; la matière charbonneuse se dépose dans l'intérieur du tube, & il en ressort de l'air

inflammable mêlé communément d'un peu d'acide charbonneux, & qui tient du charbon en dissolution.

Mais si l'esprit-de-vin & les huiles sont composés principalement d'air inflammable & de substance charbonneuse; si, d'un autre côté, il est démontré que, dans une combustion quelconque, l'air vital, ou plutôt sa base, que j'ai nommé *principe oxygène* se combine avec la substance qui brûle; enfin si principe oxygène, combiné avec l'air inflammable, forme de l'eau, si, combiné avec la substance charbonneuse, il forme de l'air fixe ou acide charbonneux, il est évident que, dans la combustion de l'esprit-de-vin & des huiles, il doit se former de l'eau & de l'acide charbonneux, & que le poids total des matières doit se trouver augmenté de toute la quantité d'air vital qui s'est combiné avec la substance qui a été brûlée. Cette théorie de la combustion est démontrée en partant des bases que j'ai cherché à établir dans mes précédens Mémoires; mais il me restoit à déterminer avec précision les quantités d'eau & d'acide charbonneux formées pendant la combustion des différentes substances, afin d'en conclure la quantité d'air inflammable & de principe charbonneux qu'elles contiennent: c'est l'objet que je me suis proposé à l'égard de quelques-unes, dans les expériences dont je vais rendre compte.

Une première condition de ce genre d'expériences étoit d'opérer la combustion dans des vaisseaux fermés, afin de ne rien perdre, & de pouvoir déterminer la quantité des substances employées & obtenues avant & après l'opération: mais la combustion de l'esprit-de-vin dans des vaisseaux fermés, sur-tout dans l'air vital, présentoit de grandes difficultés; en effet, à 66 degrés du thermomètre de M. de Réaumur, il prend l'état aériforme, & alors, quand il est mêlé avec l'air vital, au lieu de brûler paisiblement, il détonne avec fracas. Cette circonstance ne me permettoit pas d'opérer avec l'esprit-de-vin dans l'air vital, comme je l'avois fait pour le charbon, le phosphore &

quelques autres substances. Mais, avant de rendre compte des précautions particulières que j'ai prises pour cette combustion, il est nécessaire que je donne une idée de l'appareil dont j'ai coutume de me servir dans mes expériences pneumatiques au mercure : il seroit peut-être difficile de m'entendre sans cette connoissance préliminaire.

Après avoir essayé de différentes matières, je me suis déterminé à faire construire en marbre la cuve dont je me sers pour contenir le mercure.

J'ai donc fait tailler un bloc de marbre *BCDE*, figures 1, 2 & 3, de deux pieds de long sur un pied de large & neuf pouces d'épaisseur ; je l'ai fait creuser d'environ quatre pouces pour contenir du mercure ; & pour qu'on pût remplir commodément les jarres destinées aux expériences, j'y ai fait creuser une rigole *TV* de quatre autres pouces, figure 2. Enfin, comme cette rigole pouvoit être embarrassante dans quelques expériences, j'ai disposé les choses de manière qu'on pût la boucher & la condamner au moyen de petites planches qui entrent dans une rainure *xx*.

Avec cet appareil j'opère aussi en grand sur le mercure, qu'on a coutume de le faire sur l'eau, & les transvasions se font avec facilité.

Combustion de l'Esprit-de-vin,

C'est dans cet appareil, que nous avons fait dans l'air vital, M. de la Place & moi, toutes les combustions de charbon & de phosphore dont nous avons rendu compte dans le Mémoire que nous avons publié sur la chaleur en 1780. Mais à l'égard de l'esprit-de-vin, je me suis trouvé forcé, comme je l'ai dit, de prendre quelques précautions particulières.

Je me suis d'abord déterminé à n'opérer que dans de l'air atmosphérique, pour éviter le danger d'une détonation ; mais comme je ne pouvois pas espérer alors de faire durer long-temps la combustion, à cause de la grande quantité d'air vital que l'esprit-de-vin consomme en brûlant, j'ai disposé mon appareil de manière à pouvoir

rendre de l'air vital à mesure qu'il s'en consommoit. Cet appareil est représenté, *figure 4.*

On voit en *A* une cloche de cristal de 15 à 18 pintes de capacité; on conçoit qu'elle doit être très-forte, afin de soutenir le poids de mercure qui doit s'y élever.

Sous cette cloche, qui est remplie d'air commun, on place une lampe *R* à esprit-de-vin, dont le poids est très-exactement déterminé. On a dû placer sur la mèche un petit atome de phosphore, dont on expliquera l'usage dans un moment. Cette cloche se pose sur le bain de mercure contenu dans la cuve *BCDE*. Enfin, on élève le mercure en suçant avec un siphon jusqu'à la hauteur *HI*.

L'intérieur de cette cloche communique par un siphon de verre *IKLM*, avec la cloche *S* qui est remplie d'air vital, & qui repose sur une cuve d'eau. On peut ouvrir & fermer la communication entre les deux cloches, par le moyen d'un robinet *M*.

Avant de commencer l'expérience, on marque exactement sur les deux cloches la hauteur de l'eau & celle du mercure; on mesure la hauteur de ces deux fluides au-dessus de leur niveau, afin de connoître l'état de compression ou de dilatation de l'air sur lequel on opère; après quoi on allume la lampe *R* avec un fer rouge recourbé qu'on passe sous le mercure: le phosphore s'allume d'abord, & il communique l'inflammation à la mèche.

Peu de temps après que la lampe a été allumée, on s'aperçoit que la flamme diminue de vivacité; alors, pour prolonger la combustion, on ouvre le robinet *M*; aussitôt une portion d'air vital passe de la cloche *S* dans la cloche *A*; en même-temps, l'eau monte dans la cloche *S*, & le mercure descend dans la cloche *A*, jusqu'à ce que la hauteur des deux fluides soit, dans chaque cloche, en raison inverse de leur pesanteur spécifique. Il y a alors équilibre, tout demeure en repos, & on referme le robinet *M*. L'air de la cloche *A* étant devenu beaucoup plus propre à la combustion, au moyen de l'air vital qui y a été introduit, la lampe *R* y brûle mieux qu'elle n'avoit même brûlé dans le

premier instant; le volume d'air diminue de nouveau, le mercure monte; & lorsqu'on voit que la flamme est languissante, on redonne de nouvel air vital. On peut ainsi rendre deux ou trois fois de l'activité à la flamme, par une introduction d'air vital; mais, peu à peu, la quantité d'air fixe qui résulte de la combustion, s'accumule, & on arrive bientôt au terme où la combustion ne peut plus avoir lieu.

Cette expérience ne réussit pas toujours, & elle est souvent contrariée par de petits accidens; un des plus fréquens est la fracture de la cloche: la chaleur de la flamme en échauffe quelquefois tellement la voûte, qu'elle casse; aussi, d'un assez grand nombre que j'ai faites, n'y en a-t-il eu qu'une seule dont je sois pleinement satisfait.

La combustion faite, on laisse refroidir; on mesure exactement le volume des airs restant, en tenant compte de leur état de dilatation & de compression. On détermine ensuite la quantité d'air fixe ou acide charbonneux aéri-forme qui a été produite, en introduisant sous la cloche de l'alkali caustique en liqueur. Enfin, l'opération finie, on repèse la lampe, pour connoître la quantité d'esprit-de-vin qui a été consommée.

Le poids de l'esprit-de-vin que je suis parvenu à brûler dans cette expérience, a été de 1 ^{grain} 21,50.

La quantité d'air vital consommé par la combustion, a été de 220,28 ^{pouces}, pesant, à raison d'un demi-grain le pouce cube. 1. 38,32.

TOTAL du poids des matières
avant la combustion. 2. 59,82.

La combustion finie, il s'est trouvé dans la cloche, air fixe ou acide charbonneux, 95,28 ^{pouces}, pesant, à raison de 0,695 ^{grains} le pouce cube. 1 ^{grain} 23,28.

De plus, il s'est trouvé une quantité d'eau assez considérable, partie répandue

en gouttelettes sur les parois intérieures de la cloche, partie rassemblée & nageant sur la surface du mercure. On conçoit qu'il auroit été impossible de recueillir cette eau, de manière à en déterminer le poids avec exactitude; mais il m'a été aisé de le conclure par le calcul. On ne peut douter en effet que le poids des matières qui ont servi à la combustion, ne soit le même avant & après l'opération. En supposant qu'il y eût quelque différence, elle ne pourroit être due qu'à la dissipation de la matière de la chaleur & de la lumière, qui seule s'échappe à travers les pores des vaisseaux: or, j'ai démontré ailleurs, que ces deux matières n'avoient qu'une pesanteur absolument insensible; je puis donc conclure pour le poids de l'eau... ^{grs.} 1. ^{grains} 36,54.

TOTAL du poids des matières
après la combustion..... 2. 59,82.

Mais 1 ^{grs.} 23,28 ^{grains} d'acide charbonneux
contiennent, air vital..... " 68,60.

La quantité totale consommée dans
l'expérience, étoit de..... 1. 38,32.

Il y a donc eu un excédant employé à
faire de l'eau, & qui est de..... " 41,72.

A quoi ajoutant la quantité de gaz
inflammable nécessaire pour former de
l'eau, à raison de 15 parties pour 85
d'air vital, & qui est de..... " 7,36.

On aura, pour la quantité d'eau formée, 2. 49,08.

600 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

La quantité existante après l'expé-
 rience, étoit de..... 1. ^{gros.} 36, ^{grains.} 54

Il en existoit donc toute formée dans
 l'esprit-de-vin..... " 59,46.

D'après cela, on pourra récapituler ainsi le produit des
 substances après la combustion.

	^{gros.}	^{grains.}
Air vital employé à faire de l'acide charbonneux...	"	68,60
Air vital employé à faire de l'eau.....	"	41,72
Charbon contenu dans l'acide charbonneux.....	"	26,68
Gaz inflammable contenu dans l'eau qui s'est formée...	"	7,36
Eau qui existoit dans l'esprit-de-vin avant la combustion..	"	59,46

TOTAL du poids des matières après la combustion.. 2. 59,82

Si on retranche de ces quantités l'air vital qui n'a été
 introduit, dans l'expérience, que comme un moyen d'ana-
 lyse, il restera pour la composition de 1 gros 21 grains $\frac{1}{2}$
 d'esprit-de-vin, les quantités qui suivent:

	^{gros.}	^{grains.}
Charbon.....	"	26,68
Gaz inflammable.....	"	7,36
Eau toute formée.....	"	59,46

TOTAL..... 1. 21,50

D'où l'on conclura,

Composition d'une livre d'Esprit-de-vin.

	onces,	^{gros.}	^{grains.}
Charbon.....	4.	4.	37 $\frac{1}{2}$
Gaz inflammable.....	1.	2.	5 $\frac{1}{2}$
Eau toute formée.....	10.	1.	29

TOTAL..... 1 livre " "

Composition

Composition d'un quintal d'Esprit-de-vin.

	livres.	onces.	gros.	grains.
Charbon.....	28.	8.	4.	6.
Gaz inflammable....	7.	13.	7.	46.
Eau toute formée....	63.	9.	4.	20.

TOTAL.... 100. " " "

Enfin, en réunissant ensemble la quantité d'eau existant dans l'esprit-de-vin, avec celle qui s'est formée pendant la combustion, par la combinaison du gaz inflammable & de l'air vital, on aura pour la quantité résultante de la combustion d'une livre d'esprit-de-vin. 1^{livre} 2^{onces} 4^{gros} 42^{grains}.

Et pour celle résultante de la combustion d'un quintal. . . 116. 1. 2. 24.

Ces résultats s'accordent assez bien avec les premiers aperçus que j'ai donnés sur le même objet, dans mon Mémoire sur la décomposition de l'eau, imprimé en 1781.

Ce phénomène singulier, qu'une substance très-volatile dont tous les principes sont susceptibles de se dissiper pendant la combustion, fournisse néanmoins un résidu, ou plutôt un résultat plus pesant qu'elle-même, avoit échappé jusqu'ici à tous les physiciens: il étoit absolument inexplicable avant qu'on fût que l'air vital se fixoit dans les corps pendant l'acte de la combustion, circonstance dont je crois pouvoir m'attribuer la découverte.

Quoique j'aie lieu de croire ces résultats assez exacts, je dois avertir de deux causes d'incertitude que comporte nécessairement ce genre d'expériences. Premièrement, je n'ai pu déterminer la quantité d'esprit-de-vin brûlé, qu'en pesant la lampe avant & après la combustion; mais il est possible qu'indépendamment de la portion qui s'est brûlée, une autre se soit vaporisée par la chaleur, & que j'aie moins brûlé d'esprit-de-vin, que ne l'indiquoit

Mém. 1784.

Gggg

la différence du poids. Je fais que cette quantité ainsi évaporée, ne peut pas être très-considérable, puisqu'autrement il se seroit fait une détonation dans l'intérieur des vaisseaux ; mais elle peut être suffisante cependant pour troubler sensiblement l'exactitude des résultats ci-dessus.

Secondement, il est impossible de rassembler l'eau qui se forme pendant cette expérience ; une partie tapisse les parois de la cloche, une autre nage sur le mercure, & on est obligé de conclure ce poids, de celui des matériaux employés : quoique cette méthode paroisse sûre, elle n'est pas cependant aussi satisfaisante que si on pouvoit peser l'eau directement & exactement.

Je ne prétends pas non plus que ce soit une manière rigoureuse d'analyser l'esprit-de-vin ; indépendamment de l'eau, du charbon & du gaz inflammable qui entrent essentiellement dans la combinaison, il est probable qu'il contient encore, en très-petite quantité, quelques autres principes qui échappent à ce genre d'analyse. Par exemple, l'eau qu'on obtient par cette combustion sous une cloche, est légèrement acide, elle rougit le papier bleu, & cette circonstance indique, ou qu'il existe une petite quantité d'acide dans l'esprit-de-vin, ou qu'il s'en forme pendant la combustion.

Combustion de l'Huile d'Olive.

La combustion de l'huile d'olive ne renferme pas autant de causes d'incertitude que celle de l'esprit-de-vin, parce que l'huile d'olive n'étant pas susceptible de se volatiliser aisément, on peut connoître avec une exactitude rigoureuse la quantité brûlée, par la différence du poids déterminé avant & après la combustion. J'ai donc quelque lieu de penser que les résultats que je vais exposer ne laissent rien à desirer du côté de l'exactitude. J'aurois été cependant plus satisfait encore si j'eusse pu répéter l'expérience plus en grand ; mais il auroit fallu employer des appareils

extrêmement compliqués, & je doute que je fusse parvenu à des résultats beaucoup plus rigoureux.

L'appareil dont je me suis servi pour la combustion de l'huile, est encore celui représenté, *figure 4*, mais quelques précautions que j'aie prises, la quantité d'huile que je suis parvenu à brûler n'a pas été bien considérable, je n'ai pu la porter qu'à 0 ^{grains} 19,25,

La quantité d'air vital consommé, s'est trouvée de 124 pouces, pesant, à raison d'un demi-grain le pouce cube 0 62,

	^{gros}	^{grains}
Ce qui donne pour le poids total des matières employées avant la combustion	1	9,25

La quantité d'acide charbonneux aériforme que j'ai obtenu, étoit de 79 pouces $\frac{1}{2}$, ce qui revient, en poids, à 0 ^{grains} 54,25,

A l'égard de l'eau qui s'est formée, elle n'a pu être ni rassemblée ni pesée, & j'en ai exposé ailleurs la raison; elle est ici la même que pour l'esprit-de-vin: je l'ai donc conclue par le calcul, & toujours en partant de la supposition, que le poids des matières est le même avant & après l'opération, ce que je regarde comme évident; j'ai eu 0 27,00

	^{gros}	^{grains}
TOTAL après la combustion . . .	1	9,25

D'après ces données, & en supposant qu'un quintal d'acide charbonneux soit composé de 72 parties d'air vital & de 28 de charbon, on pourra faire le calcul suivant:

G g g g ij

Quantité d'air vital employé à faire de l'acide char-	1 ^{gros.}	grains.
bonneux.....	"	39,06
Quantité employée à faire de l'eau.....	"	22,94
Quantité de gaz inflammable nécessaire pour former		
27 grains d'eau.....	"	4,05
Quantité de charbon contenu dans 54 grains $\frac{1}{2}$ d'air		
fixe ou acide carbonneux.....	"	15,20
<hr/>		
TOTAL.....	I.	9,25

19 grains $\frac{1}{4}$ d'huile d'olive sont donc composés de

Charbon.....	grains.
	15,20
Gaz inflammable.....	4,05
<hr/>	
TOTAL.....	19,25

D'où l'on conclura,

Composition d'une livre d'Huile d'olive.

	livres.	onces.	gros.	grains.
Charbon.....	"	12.	5.	5.
Gaz inflammable...	"	3.	2.	67.

TOTAL... I. " " "

Composition d'un quintal d'Huile d'olive.

	livres.	onces.	gros.	grains.
Charbon.....	78.	15.	2.	68.
Gaz inflammable...	21.	"	5.	4.

TOTAL... 100. " " "

Enfin, on voit qu'en brûlant une livre d'huile d'olive avec toutes les précautions convenables, on peut en obtenir 1^{livre} 6^{onces} 3^{gros} 38^{grains} d'eau; & d'un quintal, 140^{livres} 4^{onces} 1^{gros} 17^{grains}.

Il faut, pour arriver à ce résultat, c'est-à-dire, pour obtenir cette quantité d'eau, qu'on ait fourni à la flamme toute la quantité d'air vital nécessaire pour que la combustion soit complète; circonstance qui se rencontre dans les lampes de M.^{rs} Meusnier, Argand, Lange & Quinquet: autrement, c'est-à-dire, si la quantité d'air est insuffisante, il y a bien décomposition de l'huile, c'est-à-dire, séparation de la matière charbonneuse & du gaz inflammable; mais à défaut d'une suffisante quantité d'air vital, il n'y a pas recomposition complète d'eau & d'acide charbonneux, & il s'échappe une portion de charbon & de gaz inflammable libre. C'est cet effet qu'on exprime quand on dit qu'une lampe fume.

Combustion de la Cire.

Cette même méthode appliquée à la bougie, m'a donné également la quantité d'eau qui se forme pendant sa combustion. Je me suis servi, dans cette expérience, d'une simple cloche de cristal remplie d'air vital, & placée sur la cuve de mercure: mais, comme les bougies ordinaires coulent beaucoup dans l'air vital, parce qu'il y a dans cet air beaucoup moins de distance entre la flamme & la cire, qu'il n'y en a dans l'air ordinaire, j'ai été obligé d'employer un lampion de cire.

Dans une première expérience, la cloche
contenoit, air vital..... ^{pouces} 183,51

Il en est resté, après la combustion & l'absorption par l'alkali caustique..... 50,41

Donc quantité d'air vital réellement
employée..... 133,10

Cette quantité d'air vital réduite en poids, à raison d'un
demi-grain par pouce cube, devoit peser.... ^{grains} 66,55

La quantité de cire consommée s'est trouvée de 21,90

TOTAL des matières consommées..... 88,45

606 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

La quantité d'air fixe ou acide charbonneux
 qui s'est formé, étoit de 90,046^{pouces}; & à raison
 de 06,95^{grains} le pouce cube, elle devoit peser. . . . 62,58^{grains}

Donc, déficit dû à l'eau qui s'étoit formée,
 & qui en effet nageoit sur le mercure. . . . 25,87

Mais 25,87^{grains} d'eau sont composés de

Principe oxygine.	21,99 ^{grains}
Gaz inflammable aqueux.	3,88

TOTAL. 25,87

Ainsi, des 66,55^{grains} d'air vital qui ont
 servi à cette expérience, il en a été employé
 à former de l'eau. 21,99^{grains}

Et à former de l'air vital. 44,56

TOTAL égal. 66,55

Ce qui donne pour la composition de la cire

Substance charbonneuse.	18,02 ^{grains}
Gaz inflammable.	3,88

TOTAL. 21,90

Composition d'une livre de Cire.

	livres.	onces.	grs.	grains.
Substance charbonneuse.	"	13.	1.	23.
Gaz inflammable.	"	2.	6.	49.

TOTAL. 1. " " "

Composition d'un quintal de Cire

	livres.	onces.	grs.	grains.
Substance charbonneuse.	82.	4.	3.	68.
Gas inflammable.	17.	11.	4.	4.

TOTAL. 100. " " "

J'ai répété une seconde fois cette expérience avec le même soin, & j'ai obtenu les résultats qui suivent :

Quantité d'air vital contenu dans la cloche ^{pouces}
avant la combustion..... 194,80

Quantité restante après la combustion, mais
avant l'addition de l'alkali caustique.... 150,30

Diminution opérée par la combustion.... 44,50

Quantité d'air restante après l'absorption par
l'alkali caustique..... 53,51

Donc, quantité d'air vital consommé dans
l'expérience..... 141,29

Cette dernière quantité d'air vital, à raison
d'un demi-grain le pouce cube, devroit peser. ^{grains} 70,64

Cire consommée..... 21,75

TOTAL des substances consommées.. 92,39

Il ne s'est produit que ^{pouces} 96,438 d'air fixe
ou acide charbonneux, qui, à raison de

^{grains} 0,695 le pouce cube, devoient peser.... 67,08

Donc, déficit ou eau formée..... 25,31

Mais ^{grains} 25,31 d'eau sont composés de..

Principe oxygène..... ^{grains} 21,51

Principe inflammable de l'eau.... 3,80

TOTAL..... 25,31

D'où il résulte que sur la quantité d'air vital
employé dans l'expérience, & qui étoit de. ^{grains} 70,64

Il en a été employé à former de l'eau... 21,51

Et par conséquent à former de l'acide
charbonneux..... 49,13

608 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

La cire, d'après ces données est composée de

Matière charbonneuse.....	^{grains} 17,95
Principe inflammable de l'eau....	3,80

TOTAL..... 21,75

D'où l'on conclura

Composition d'une livre de Cire.

	livres.	onces.	grs.	grains
Substance charbonneuse.....	"	13.	1.	46.
Principe inflammable de l'eau....	"	2.	6.	26.

TOTAL..... 1. " " "

Composition d'un quintal de Cire.

Substance charbonneuse.....	82.	8.	3.	64.
Principe inflammable de l'eau....	17.	7.	4.	8.

TOTAL..... 100. " " "

En prenant un milieu entre le résultat de ces deux expériences, on trouve qu'une livre de cire formeroit, en brûlant, une quantité d'eau de 1^{livre} 2^{onces} 6^{grs} 5^{grains}.

Et qu'un quintal de cire en formeroit..... 117. 3. 7. "

Je dois avertir que dans toutes ces expériences, le volume des airs doit être corrigé de la variation du baromètre & du thermomètre, & ramené à une pression de 28 pouces, & à une température de 10 degrés du thermomètre de Réaumur. Je suis entré ailleurs dans le détail des calculs qu'exige cette correction.



ESSAI

Fig. 1.

C

B

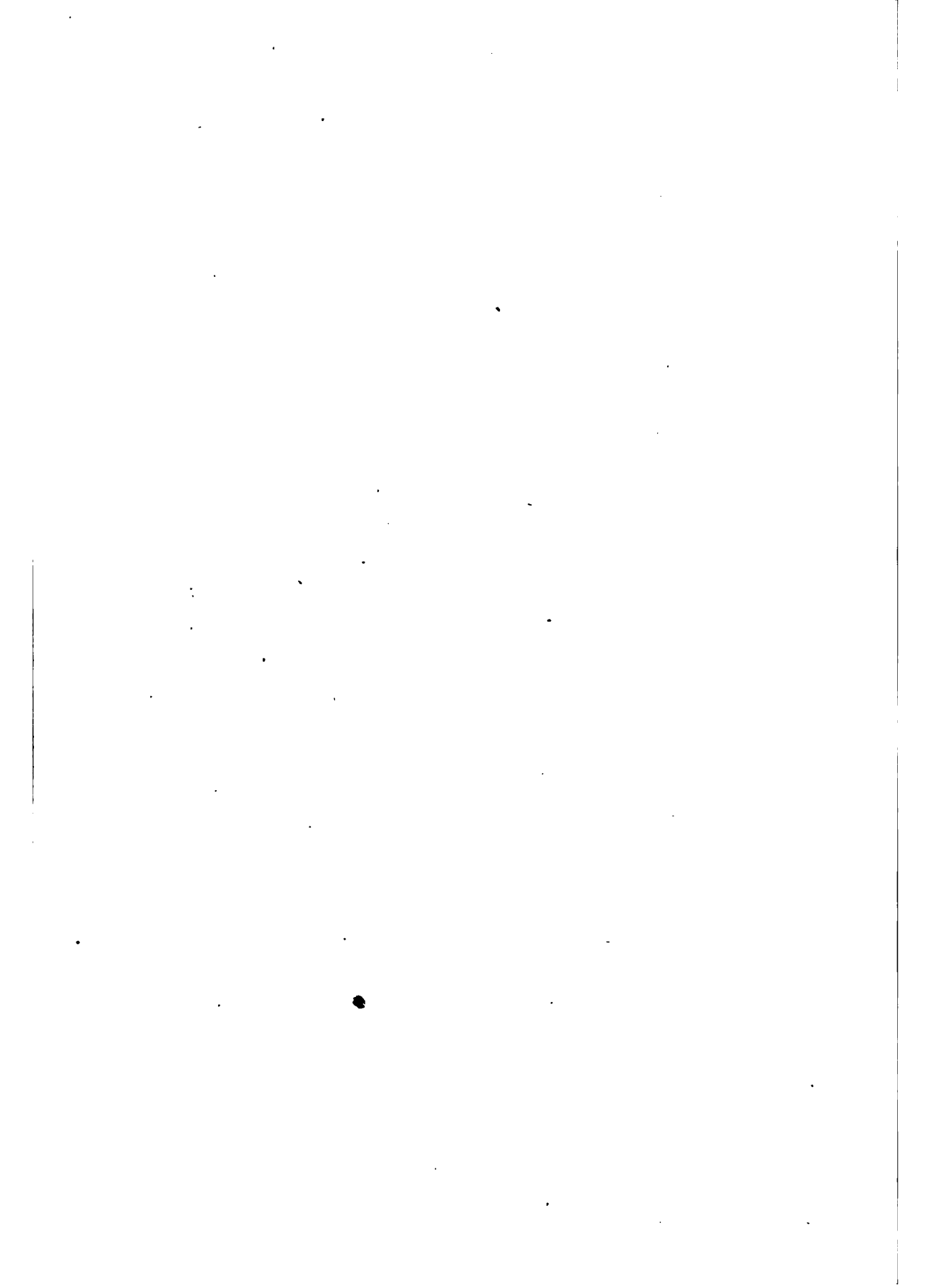
D

Fig. 2

C

Echelle de deux Pieds

J. de G. sculp.



ESSAI DE COMPARAISON

ENTRE

LES MOUVEMENTS DES ANIMAUX

ET CEUX DES PLANTES.

Et description d'une espèce de Sainfoin, dont les feuilles sont dans un mouvement continu.

Par M. BROUSSONET.

L'ÉTUDE de la zootomie peut seule, en nous mettant à portée d'établir une comparaison entre les mêmes organes dans les différentes espèces d'animaux, nous éclairer sur les fonctions auxquelles les parties analogues sont destinées dans l'homme. Les anatomistes se sont adonnés à la dissection des animaux, dans un temps où n'ayant point encore perfectionné celle de l'homme, la physiologie ne pouvoit retirer aucun avantage de ces connoissances; dès que l'inspection des cadavres a été permise, & que celle des animaux a pu dès-lors devenir utile, on a paru en négliger l'étude. Les recherches anatomiques ont été faites d'abord sur des êtres dont l'organisation se rapprochoit le plus de celle de l'homme, tels que les quadrupèdes; on n'a examiné que long-temps après quelques espèces qui s'en éloignent un peu plus. On avoit cru que l'inspection des parties, dans les animaux dont la forme a le plus de rapport avec celle de l'homme, faciliteroit la découverte de l'usage de ces mêmes parties; mais cette comparaison n'est pas aussi avantageuse à l'objet que se propose le physiologiste, que celle qui naît du rapprochement des êtres les plus éloignés, & dans lesquels on a de la peine à reconnoître, au premier abord, les traces de l'analogie. Plus les objets diffèrent entr'eux, plus les résultats qui naissent de la

Lû
le 31 août
1785.

Mém. 1784.

H h h h

comparaison qu'on en fait, sont lumineux. On ne sera pas sans doute surpris qu'on ait négligé de faire le rapprochement des espèces appartenantes à des règnes différens, puisqu'il n'avoit pas même été fait entre les animaux des divers ordres, dont les différences sont bien moins essentielles. Les physiologistes n'ont pas retiré des travaux de Grew, de Malpighi, de M. Duhamel, &c. tous les avantages qu'ils auroient peut-être pu en obtenir pour expliquer plusieurs phénomènes de l'économie animale. On s'est contenté de saisir çà & là un petit nombre de faits isolés; mais les fonctions les plus importantes, celles qui ont une analogie très-marquée avec ces mêmes fonctions dans les animaux, n'ont été bien connues, dans les plantes, que de nos jours. Les naturalistes du dernier siècle savoient à peine qu'on pût retrouver dans les végétaux des traces de la respiration, de la génération & de la circulation. On a cru pouvoir rendre raison de quelques-uns de ces phénomènes communs aux deux règnes, en les examinant dans des êtres qui, par leur forme, paroissent également appartenir au végétal & à l'animal; mais, outre que ces êtres sont très-peu connus par les anatomistes, ils appartiennent d'ailleurs exclusivement à un seul règne, & n'ont de commun avec le règne voisin, que la forme, presque toujours accidentelle. La Nature a varié les formes à l'infini, elles caractérisent les espèces, c'est ce qui paroît lui avoir coûté le moins; leur différence ne consistant que dans des parties plus ou moins allongées, plus ou moins grosses, placées plus ou moins près de telle ou telle autre partie, le nombre a pu en être beaucoup & facilement augmenté. Son économie ne s'est manifestée que dans les fonctions qu'elle a toujours établies sur les mêmes principes, ne leur assignant aucune différence dans les espèces, mais seulement dans les grandes classes dont elles sont en quelque sorte l'apanage..

Les diverses parties des plantes jouissent de la faculté de se mouvoir, mais les mouvemens qu'elles exécutent

sont d'une nature bien différente de ceux des animaux; les plus sensibles, ceux qui sont produits le plus rapidement dans les plantes, sont presque toujours déterminés par quelque cause irritante. L'irritabilité, qui n'est que la sensibilité manifestée par le mouvement, est une loi générale à laquelle la nature a soumis tous les êtres vivans, c'est elle qui veille continuellement à leur conservation; plus puissante dans les animaux que dans les plantes, elle peut être souvent confondue dans celles-ci avec des phénomènes qui dépendent d'une cause bien différente. L'organe qui est soumis, dans le végétal, à l'action de l'aiguillon, est le seul qui se meuve: jamais l'irritation de plusieurs parties ne produit, comme dans les animaux, cette prompte combinaison de sensations, d'après laquelle on voit se remuer certains organes, quoiqu'ils ne soient pas directement affectés, & qu'ils pussent d'ailleurs être passifs.

Plus l'organisation est parfaite dans les différentes parties des animaux, plus les signes d'irritabilité y sont sensibles. Les parties qui se rapprochent le plus de celles des végétaux, & dont par conséquent l'organisation est la plus imparfaite, sont les moins irritables. La même loi se retrouve sur les plantes, mais avec des résultats opposés; les signes d'irritabilité y sont plus sensibles à mesure que les parties se rapprochent davantage de celles des animaux, ils sont nuls dans celles qui en sont les plus éloignées. Cette assertion est sur-tout prouvée par ce qu'on observe dans les organes destinés, dans les végétaux, à perpétuer l'espèce; ces parties sont, suivant toutes les apparences, les seules irritables; les feuilles, l'écorce, les tiges & les racines ne donnant aucun signe d'irritabilité.

La faculté de se reproduire, dans les plantes comme dans les animaux, est une fonction propre à l'espèce, & sans laquelle l'individu peut subsister; mais la nature paroît y avoir attaché dans les plantes beaucoup plus d'importance que dans la plupart des animaux. Tout, dans l'individu végétal, paroît concourir presque uniquement à ce but; c'est pour

le remplir que la végétation a lieu, que les différentes parties se développent; c'est ici que sont prodiguées la variété, la richesse des couleurs, que l'organisation est perfectionnée. Dès que le vœu de la nature est rempli, que les semences ont acquis dans leur capsule le degré de maturité qui leur est nécessaire, les sucS nourriciers cessent de couler dans les vaisseaux, l'individu se dessèche & périt. Les plantes se rapprochent des animaux par les organes de la génération, non-seulement parce qu'ils sont en elles les seules parties irritables, mais encore parce qu'ils sont les seuls qui les fassent jouir en quelque sorte de la vertu de la locomotion. Je crois inutile de détailler ici les mouvemens subits des étamines, des pistils, &c. de plusieurs plantes, dès qu'on les irrite; ces phénomènes sont trop bien connus des physiciens.

Les mouvemens vitaux, dans les plantes, sont ceux qu'on peut observer le plus communément; ils sont lents, entièrement déterminés par des circonstances qui ne manquent jamais de se répéter, & sont répandus également sur toutes les parties. Dans les animaux au contraire, presque tous les mouvemens vitaux sont très-sensibles, tels sont le battement du cœur, celui des artères, la dilatation du thorax, &c. comme ils sont absolument nécessaires à la conservation des individus, ils se reproduisent toujours, dans ceux de la même espèce, d'une manière semblable & dans la même direction, ce qui a également lieu dans les plantes. Les plantes grimpantes, le houblon, par exemple, suit constamment, en s'entortillant autour d'une perche, la direction du midi au couchant.

En interrompant ces sortes de mouvemens dans les végétaux, ceux-ci périssent bientôt; si on détache, par exemple, une plante grimpante dont la direction étoit sur une branche de droite à gauche, & qu'on la place dans une direction contraire, elle se dessèche dans peu, sur-tout si elle n'a pas assez de vigueur pour reprendre sa situation naturelle. On donne de la même manière la mort à un

animal , lorsqu'on arrête quelqu'un de ses mouvemens vitaux.

La loi par laquelle les plantes sont forcées à se mouvoir de telle ou telle manière, est très-puissante; lorsque deux plantes grimpantes, dont l'une est plus foible que l'autre, viennent à se rencontrer, deux chèvrefeuilles par exemple, ils s'entrelacent mutuellement, comme pour augmenter en quelque sorte leur force; l'un se dirige à droite, l'autre à gauche, celui-ci est toujours le plus foible, il est forcé de prendre une direction contraire à celle qu'il auroit suivie s'il se fût trouvé hors de la portée de l'autre : mais si par quelque accident ces deux chèvrefeuilles viennent ensuite à se séparer, ils reprennent l'un & l'autre leur direction naturelle, c'est-à-dire, de droite à gauche.

Les mouvemens essentiellement vitaux qui ont, dans les plantes, le plus grand rapport avec ceux des animaux, sont le cours de la sève, le passage de l'air dans les trachées, les différentes positions que prennent les fleurs de quelques plantes à certaines heures du jour, &c. mais en observant la manière dont tous ces mouvemens s'exécutent dans les plantes, nous verrons qu'ils offrent un plus grand nombre de modifications que les mouvemens analogues qui ont lieu dans les animaux. La température de l'atmosphère, son agitation, la lumière, &c. influent beaucoup sur les mouvemens des plantes, en accélérant ou retardant le cours de leurs fluides; & comme elles ne peuvent jamais changer de place, ces variations produisent en elles des changemens plus sensibles & plus uniformes que dans les animaux.

La rareté des fluides dans les vaisseaux des plantes, occasionne quelquefois des mouvemens particuliers; ainsi dès que les semences de la balsamine, de l'alleluia, du sablier, &c. sont parvenues à un certain degré de maturité, les suc cessent de s'y porter, les parties qui composent les capsules se dessèchent, & jouissant alors de toute leur élasticité, elles se séparent subitement & jettent à une certaine distance les graines qu'elles renfermoient. Cette

action peut être considérée comme vitale puisqu'elle tend à la conservation de l'espèce; mais elle est modifiée, comme on voit, par une cause externe, puisqu'elle est accélérée ou retardée suivant le plus ou moins grand degré de sécheresse ou d'humidité de l'atmosphère.

L'abondance des fluides détermine aussi, dans les plantes comme dans les animaux, plusieurs mouvemens vitaux. L'action prompte des étamines de la pariétaire, l'inflexion des péduncules des fleurs, des pistils, paroissent devoir être attribuées à une cause semblable: ces sortes de mouvemens qui s'observent sur-tout dans les organes destinés à la reproduction de l'individu, n'ayant lieu que dans des circonstances qui les rendent absolument nécessaires, paroissent être en quelque sorte l'effet d'une combinaison particulière; ils ne sont cependant que mécaniques, puisqu'ils sont toujours reproduits de la même manière & dans les mêmes circonstances. C'est ainsi que la rose de Jéricho, & les fruits secs de plusieurs espèces de *Mesembryanthemum* ne s'épanouissent que lorsque leurs vaisseaux sont remplis d'eau.

Le dégagement subit des fluides produit une espèce de mouvement; c'est à cette cause qu'il faut rapporter un grand nombre de phénomènes qu'on observe dans les feuilles de plusieurs plantes, & qui ne doivent pas être attribués à l'irritabilité. Les glandules qu'on voit au milieu de chaque feuille du *donax*, sont à peine piquées par quelque insecte, que celle-ci se replie sur elle-même & saisit aussi-tôt l'animal: la piqure paroît déterminer un dégagement de fluide qui retenoit la feuille ouverte en remplissant ses vaisseaux. Cette explication est d'autant plus probable, que dans les premiers temps de la végétation de cette plante, lorsque les glandules ne sont presque pas développées, & que probablement les sucs ne coulent pas en abondance dans les vaisseaux, les feuilles sont repliées sur elles-mêmes de la même manière qu'elles le deviennent après qu'elles ont été piquées par un insecte, lorsque la plante est plus avancée. On observe un phénomène analogue à celui-ci,

sur les feuilles des deux espèces de *rossolis* *. Le mécanisme est ici très-facile à apercevoir; les feuilles sont d'abord repliées sur elles-mêmes, les sucs ne sont point encore portés jusque dans les petits poils dont elles sont recouvertes, mais après leur développement, la présence du fluide est démontrée par une goutte qu'on voit à l'extrémité de chaque poil; c'est en absorbant ce fluide, que l'insecte dégorge les vaisseaux de la feuille qui se replie sur elle-même & reprend son premier état: la promptitude de l'action est proportionnée à la quantité de poils touchés par l'insecte. Ce mouvement pourroit être comparé en quelque sorte à celui qui a lieu dans l'extrémité d'un animal, laquelle retenue dans un état de flexion par une tumeur dans l'articulation, reprend tout-à-coup son ancienne position au moment où l'on donne issue à l'humeur qui faisoit obstacle. Quelques botanistes ont donné une explication très-ingénieuse du mouvement des sensitives; ils l'attribuent à des molécules qui s'amassent dans les vaisseaux de la plante, & qui se dégagent au moment de l'attouchement: mais la cause est ici moins facile à saisir.

Les phénomènes qui dépendent de l'abondance des fluides, sont sur-tout apparens dans les plantes qui croissent dans les endroits humides; le *Rossolis*, le *Dionæa*, sont de cet ordre; & l'on fait, d'après les expériences de M.^{rs} Dufay & Duhamel, que les sensitives sont sur-tout sensibles, lorsque le soleil est caché par des nuages, & que l'air est humide & chaud.

L'influence des causes externes modifie quelquefois les mouvemens vitaux dans les plantes, de manière qu'on seroit tenté de les attribuer à la volonté, comme ceux qui dépendent entièrement de cette faculté dans les animaux. Si l'on met une perche en terre auprès d'une plante grimpante, elle la saisit toujours * pour s'y entortiller, dans quelque endroit qu'on la place. La même chose a lieu pour les vrilles de la vigne qui s'attachent toujours à un bâton qu'on leur présente, quelque part qu'il soit placé, pourvu

* M. Roth.

* M. Mustel.

qu'elles puissent y atteindre ; mais ces mouvemens sont entièrement vitaux, la plante grimparte & les vrilles se portent successivement dans toutes les directions, & ne sauroient par conséquent manquer de rencontrer les corps qui sont à leur portée. Ces mouvemens ont lieu tant que les parties prennent de l'accroissement ; dès qu'elles cessent de pousser, si elles n'ont atteint aucun corps pour s'y fixer, elles se recourbent sur elles-mêmes. Une racine pousse sur la paroi d'un fossé ; si elle suivoit la ligne horizontale, elle seroit bientôt à découvert & périroit ; mais elle se recourbe avant d'avoir atteint le fossé, & comme si elle étoit dirigée par une sorte d'instinct, elle pousse en en-bas, passe au-dessous du fossé, remonte du côté opposé, & parvenue à la même hauteur où elle étoit d'abord, elle continue de pousser horizontalement. Ceci a également lieu lorsque la racine rencontre quelque corps solide. Si on met à découvert une racine & qu'on place tout auprès, en évitant pourtant le contact, une éponge pleine d'eau, la racine se rapproche de l'éponge, & se dirige dans tous les points où on la place successivement : cette observation démontre, sur-tout, jusqu'à quel point les mouvemens vitaux dans les plantes peuvent être modifiés par des causes externes, & combien ils diffèrent essentiellement de ceux que la volonté détermine dans les animaux.

Les mouvemens produits par la présence des fluides dans les vaisseaux, sont plus ou moins sensibles dans les feuilles des différentes espèces de plantes. Quelques-unes paroissent ne jouir d'aucune sorte de mouvement, d'autres ont des feuilles susceptibles de se mouvoir en différens sens ; leurs mouvemens sont ordinairement modifiés par différentes causes, mais aucune ne paroît jouir d'un mouvement aussi sensible & aussi continu qu'une espèce de fainfoin. Cette plante singulière a été découverte au Bengale, dans des lieux humides & argileux aux environs de Dacca, par Milady Monson, que son zèle pour l'histoire naturelle avoit déterminé à entreprendre un voyage dans les Indes ;
zèle

zèle d'autant plus louable, que les personnes de son sexe ont rarement la force & plus rarement encore le courage de le diriger vers un pareil objet. La mort l'a surprise au milieu de ses courses botaniques. Linné avoit cru devoir consacrer à sa mémoire un genre de plante sous le nom de *Monsonia*. M. le chevalier Banks ayant bien voulu me communiquer les manuscrits de Milady Monson, j'en ai extrait les observations qui ont rapport aux mouvemens de cette plante, & tels qu'elle les avoit observés au Bengale; je les comparerai avec ceux que j'ai eu occasion d'examiner sur les individus qu'on cultive dans les serres en Europe; mais je crois nécessaire auparavant de donner la description de cette plante, parce que Linné le fils est le seul auteur qui en ait parlé dans son *Supplementum plantarum*; mais il n'a pas vu les fleurs, & la description est dès-lors incomplète. Je joins encore à ce Mémoire un dessin, parce que je ne connois aucune figure de cette plante.

Les Indiens la nomment *Burum chandali*. Linné a cru devoir la rapporter au genre d'*hedyсарum* (sainfoin), & la désigner sous le nom spécifique de *gyrans* (tournant); je lui conserverai la dénomination de sainfoin oscillant, ou de plante oscillante, que M. Daubenton lui a donnée dans le cabinet du Roi. Ce nom exprime beaucoup mieux que celui de *gyrans*, les mouvemens de ses folioles.

La racine est ordinairement annuelle, quelquefois bisannuelle, & dans nos serres elle dure souvent plus de deux ans; elle est également branchue & fibreuse. Les branches partent d'une tige qui s'élève très-peu; elles sont communément au nombre de six ou sept; elles viennent à la hauteur de trois ou quatre pieds; elles sont ligneuses, lisses, cylindriques, de la grosseur du petit doigt, supportant des rameaux placés alternativement, déliés, plians & recouverts d'un épiderme lisse & vert: les feuilles sont disposées alternativement sur les branches & les rameaux, elles sont presque toujours composées de trois folioles, rarement & seulement vers le bas des tiges simples, elles sont soutenues

par un pétiole d'un ou deux pouces de long, légèrement velu & garni à la base de deux stipules alongées, pointues & roussâtres. La foliole intermédiaire, plus longue que le pétiole, est ordinairement de trois ou quatre pouces sur un de large; elle est lancéolée, oblongue, unie sur les bords, très-lisse, d'un vert pâle, glauque dans le milieu, & légèrement veinée. Les deux folioles latérales qu'on pourroit en quelque sorte regarder comme des appendices de l'intermédiaire, sont supportées par des pétioles courts, fixés sur le pétiole commun; elles sont lancéolées & étroites: on voit à leur base de petites stipules relevées, subulées, caduques & vertes.

Les fleurs forment des épis redressés, alongés, qui partent des aisselles, ou qui terminent les branches; elles sont papilionacées, petites, d'un jaune foncé, situées deux à deux & embrassées par des bractées ovales, aiguës, caduques, & qui se recouvrent en partie les unes les autres. Le calice est à quatre dents; presque labié, d'abord vert; mais à mesure qu'il approche de la maturité, il devient rougeâtre & quadrangulaire. La corolle est composée de cinq pétales, l'étendard (*a*) est arrondi, échancré, convergent sur les côtés, les (*b*) ailes sont plus courtes que la carène; celle-ci (*c*) est presque ovale, comprimée, de la longueur de l'étendard, & formée par deux pétales réunis. Les étamines (*d*) au nombre de dix, sont séparées en deux corps: neuf sont réunies entre elles par leurs filamens; la dixième est isolée; chacune supporte une anthère alongée & assez grosse. Le germe est linéaire, comprimé, surmonté d'un style simple, subulé, tourné en en-haut, & terminé par un stigmate obtus.

Le fruit est un légume (*e*) d'environ deux pouces, légèrement recourbé, comprimé, formant un étranglement entre chaque semence; celles-ci (*f*) sont petites, réniformes, comprimées, très-lisses, grisâtres & marquées d'une tache.

Le sainfoin oscillant est en fleur au Bengale au mois de septembre; les légumes ont déjà acquis toute leur ma-

turité en novembre, & ils laissent pour lors échapper les graines qu'ils renferment. Il fleurit rarement en Europe, & sa culture demande beaucoup de soin; il doit être renfermé dans une serre chaude, & n'en sortir presque jamais. La première fois qu'on l'a vu en Europe, c'est en 1777, en Angleterre, dans le jardin de Lord Bute, à Luton-Park, il y fleurit en mars.

Aucune partie de cette plante ne donne des signes d'irritabilité quand on la pique. Dans la journée, la foliole du milieu est étendue horizontalement, & est immobile; dans la nuit elle se recourbe & vient s'appliquer sur les branches. Les folioles latérales sont toujours en mouvement, portées alternativement, vers le haut & vers le bas; toute l'action du mouvement est dans le pétiole qui paroît se contourner: ces folioles décrivent un arc de cercle. Aux Indes, deux minutes suffisent pour faire exécuter aux folioles tout leur mouvement; je ne les ai jamais vues se remuer aussi promptement que cela dans nos serres. Le mouvement qui les porte en en-bas est plus prompt que celui qui les fait aller en en-haut; le premier est même quelquefois exécuté par interruptions, ou du moins il n'est point égal. Le mouvement en en-haut est au contraire toujours uniforme. Le plus souvent chaque foliole se meut dans un sens opposé; c'est-à-dire, que l'une est tournée en en-bas, quand l'autre regarde en en-haut: quelquefois une des folioles est stable, tandis que l'autre se remue; ce mouvement est si naturel, que si l'on vient à l'interrompre, en fixant une des folioles, il recommence dès que l'obstacle est levé.

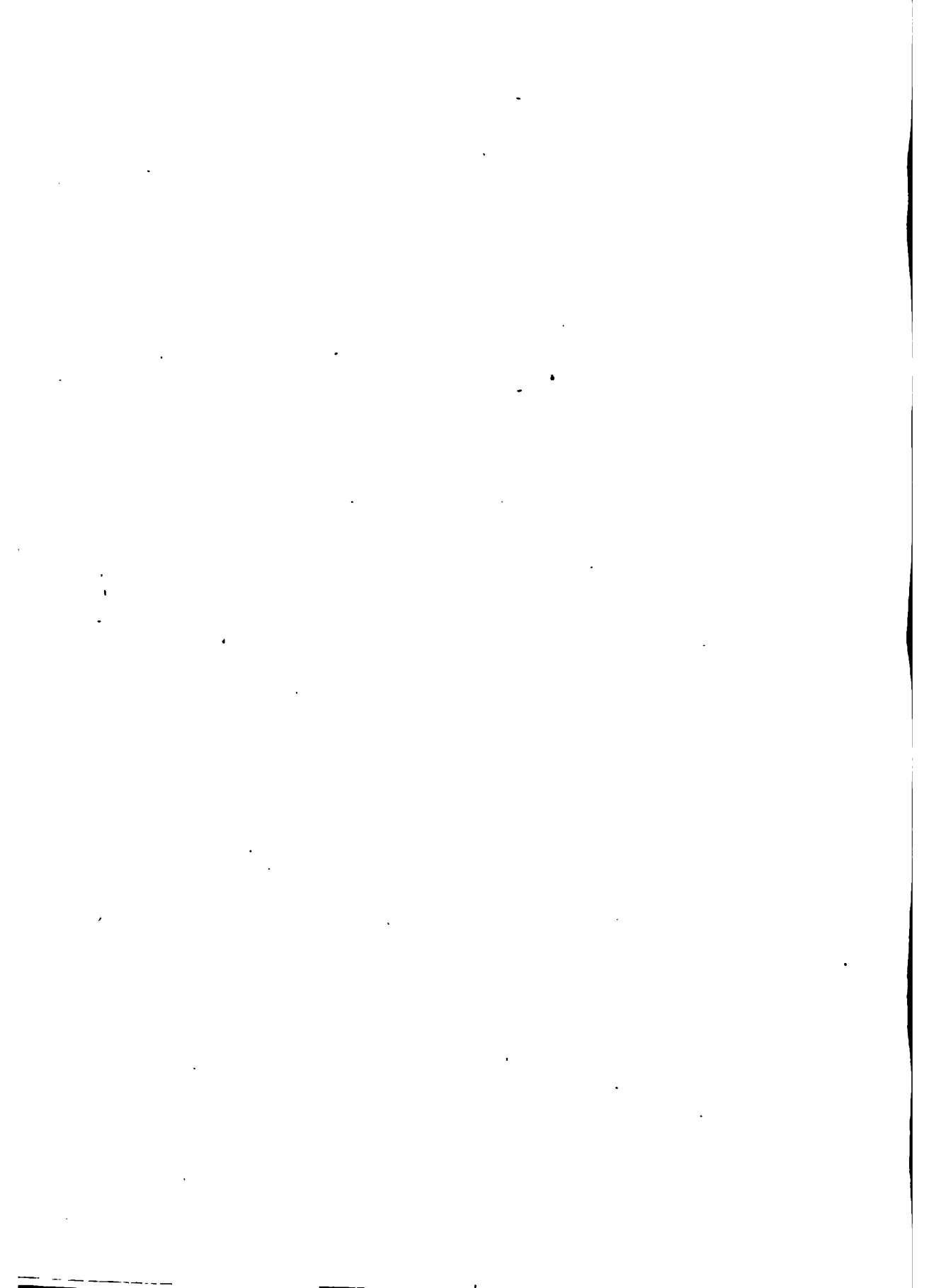
Le mouvement n'a plus lieu, dès que les grandes folioles sont agitées par le vent. Dans les animaux, la transpiration est sur-tout accélérée par le cours du sang, par l'action des muscles, &c. Dans les plantes, où la circulation des fluides est très-lente, la perspiration paroît être augmentée par des causes externes, l'agitation de l'air en est une des principales, les feuilles qui sont les organes destinés à cette fonction, sont ordinairement soutenues par des pétioles minces & qui leur

permettent de se mouvoir en tous sens, si cette structure manque, les organes des végétaux sont construits différemment; la chaleur du soleil, l'humidité ou une grande abondance de fluides dans des vaisseaux construits d'une manière particulière déterminent la perspiration de plusieurs plantes. Le *Dionœa*, le *Rosolis*, &c. comme nous l'avons déjà remarqué, croissent dans des lieux humides, où les fluides abondent, plusieurs sensitives viennent dans des endroits où l'air est très-peu agité; ou bien celles dont la perspiration ne peut s'opérer de toutes ces manières, ont un petit nombre de feuilles ordinairement succulentes, & recouvertes d'un épiderme très-mince. Quand le soleil est très-chaud, les folioles du sainfoin oscillant sont aussi immobiles; mais, lorsque le temps est chaud & humide, ou qu'il pleut, elles se meuvent très-bien.

Ce mouvement paroît absolument nécessaire à cette plante; car, dès qu'elle a poussé les premières feuilles, il commence à avoir lieu, & il se continue même pendant la nuit, mais il s'affoiblit avec le temps; dans nos serres il a lieu, sur-tout dans la première année; à la seconde il est très-peu sensible; dans son pays natal, toutes les feuilles sont en mouvement, jamais je ne les ai vues se remuer toutes dans nos serres. Dans le moment que la plante est le plus chargée de fleurs, que la fécondation des germes a lieu, les folioles sont beaucoup plus agitées. Dans les plantes comme dans les animaux, le temps de la reproduction des individus est toujours celui où tous les organes sont dans leur plus grande perfection. Dès que le temps de la génération est passé, les folioles cessent de se mouvoir; les sensitives ne sont presque plus sensibles après ce temps, les pétales de plusieurs plantes ne se referment plus périodiquement.

Ce mouvement d'oscillation est tellement naturel à la plante oscillante, qu'il a non-seulement lieu pendant deux ou trois jours sur les folioles d'une branche qu'on a coupée, & qui a été mise dans l'eau, mais qu'il est même continué pendant quelque temps sur les feuilles des rameaux





qu'on a séparés de la plante, & qu'on n'a point mis dans l'eau. Ne peut-on pas, dans ce dernier cas, le comparer en quelque sorte aux battemens du cœur des animaux, après que cet organe a été arraché? Les feuilles semblent tenir lieu de cœur dans les végétaux, elles augmentent par leurs mouvemens le cours des fluides, comme ce viscère, par ses contractions détermine la circulation du sang. Dès que les feuilles se séparent d'une plante, les progrès de la végétation sont arrêtés, & les végétaux ressemblent à ces animaux, dont le sommeil périodique est caractérisé par une diminution dans les battemens du cœur.

Les Indiens, qui sont de tous les peuples ceux qui s'adonnent le plus à la connoissance des plantes, n'ont point manqué de remarquer le mouvement singulier des feuilles de celle-ci, & ce phénomène étoit trop extraordinaire pour qu'il ne devînt pas, chez une nation superstitieuse, l'objet d'un culte particulier. Ils cueillent à un certain jour de l'année, qu'ils nomment *lunichur*, deux folioles latérales dans l'instant qu'elles sont le plus rapprochées, ils les pilent ensemble avec la langue d'une espèce de chouette, & l'amant plein de foi croit, avec cette préparation, se rendre favorable l'objet de son amour. Je ne crains point de rapporter ce trait d'après Milady Monson, persuadé que rien de ce qui a rapport à l'histoire d'une plante aussi curieuse que celle-ci ne doit être omis.

Le mouvement, comme nous venons de le voir, est un attribut moins essentiel aux végétaux qu'aux animaux, plusieurs plantes ont des parties qui en donnent à peine quelques signes, plusieurs en ont aussi qui sont entièrement cataleptiques, ce qui s'observe plus rarement dans les animaux, excepté dans ceux qui sont rapprochés par leur forme du règne végétal; cette singularité est sur-tout remarquable dans une espèce de *dracocephalum* de Virginie, dont les péduncules des fleurs conservent toutes les positions qu'on leur donne. Cette plante me paroît devoir être mise en opposition avec celle dont je viens de parler. Son histoire est consignée dans les Mémoires de l'Académie, année 1712.



MESSIEURS DE LA SOCIÉTÉ

*Royale des Sciences établie à Montpellier , ont
envoyé à l'Académie le Mémoire suivant , pour
entretenir l'union intime qui doit être entre
elles , comme ne faisant qu'un seul Corps , aux
termes des Statuts accordés par le Roi , au mois
de Février 1706.*

OBSERVATIONS

SUR LA CRISTALLISATION.

DE L'HUILE DE VITRIOL.

Par M. CHAPTAL.

LE 3 du mois de Janvier 1786, les ouvriers de ma
fabrique d'Acides minéraux, en retirant des galères
l'huile de vitriol rectifiée, en trouvèrent une cornue qui
n'avoit pas le degré de concentration suffisant, & en rem-
plirent une dame-jeanne qu'ils déposèrent, selon la coutume,
dans un coin du hangar : le surlendemain, ils voulurent
prendre cette huile pour lui faire subir une seconde recti-
fication; mais quel fut leur étonnement, lorsqu'ils trou-
vèrent dans la bouteille une masse solide qui en occupoit
le milieu, & d'où partoient des cristaux qui alloient se
terminer contre les parois du vase! Ils se hâtèrent de
confier ce prodige à M. Berard, Directeur de ma fabrique,
qui m'instruisit du phénomène le lendemain. Je crus

d'abord, qu'on avoit laissé dans le hangar quelque bouteille remplie d'eau, & que les bulles d'air qu'on observe souvent dans la glace, disposées sur la même ligne du centre à la circonférence de la bouteille, en avoient imposé à M. Berard, & que c'étoient-là les cristaux de l'huile de vitriol dont il me parloit; je lui fis part de mes doutes, il s'obstina à me dire que c'étoit une véritable cristallisation d'huile de vitriol.

Mes doutes ne me parurent pas suffisamment éclaircis, mais des occupations réitérées, ne me permirent d'aller à la fabrique que le 18 : on avoit conservé cette bouteille, & l'ouverture en étoit simplement recouverte par un bouchon de terre cuite.

Je ne fus pas peu étonné, lorsque j'aperçus une masse ou groupe de cristaux, qui pesoit au moins 60 livres, puisque mes bouteilles sont ordinairement de cette contenance. Il y avoit dans le fond une couche de 2 pouces d'huile de vitriol, provenant d'un commencement de fonte ou *deliquium* de ces cristaux.

Je m'empressai de casser la dame-jeanne, pour avoir le plaisir de manier ces cristaux, & d'en déterminer la figure. Le thermomètre étoit en ce moment à $+7$, l'ongtueux de la surface de ces cristaux étoit celui de l'huile de vitriol. Leur température étoit plus chaude au tact que celle de tous les corps voisins; tels que les bois, les pierres, les verres, &c. la couleur étoit d'un jaune rembruni, la cassure lisse, unie & vitreuse.

Je détachai de ce groupe plusieurs cristaux bien formés; &, dans tous, la forme m'a paru un prisme hexaèdre aplati, terminé par une pyramide hexaèdre. Un examen plus approfondi du cristal m'a présenté les formes suivantes :

L'épaisseur du prisme est à peine le quart de la largeur, La pyramide d'un prisme de 8 pouces 7 lignes avoit 11 lignes de longueur.

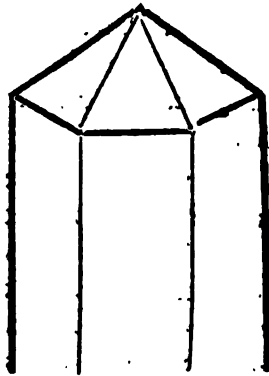
Les deux grands côtés du prisme aplati forment deux

parallélogrammes, les quatre petits s'unissent à angle aigu, & forment un angle obtus à leur réunion aux grands côtés du prisme.

Les petits côtés du prisme se terminent du côté de la pyramide par une ligne inclinée aux grands côtés du prisme, & qui forme avec eux un angle obtus; par ce moyen, la pyramide résulte de l'assemblage de six triangles isocèles.

Je n'ai pas trouvé de cristal à deux pyramides; ils étoient tous implantés dans une masse commune qui occupoit le milieu de la bouteille.

J'ai essayé de représenter, dans cette figure, la forme de ces cristaux. Les côtés de la pyramide & du prisme ont à peu-près leurs largeur & dimensions respectives.



À mesure que je maniois les cristaux à l'air libre & à une chaleur de 7 degrés au-dessus de 0, il découloit de la masse, de l'huile noirâtre qui noircissoit le bois, & attaquoit si fortement mes mains, qu'elles devinrent luisantes, calleuses, & que l'épiderme fut détruit.

Je remplis un vaisseau de verre à large ouverture, de 15 à 16 livres de ces cristaux bien figurés; je les ai montrés & laissé manier, pendant mon cours, à trois ou quatre cents auditeurs, & je les ai conservés jusqu'au 30 Janvier, alors le *deliquium* a été complet.

L'huile

L'huile de vitriol provenue de la fonte de ces cristaux, est d'un jaune-noirâtre, marquant de 63 à 64 degrés à mon pèse-liqueur qui donne 66 dans la bonne huile du commerce.

J'ai rectifié avec soin une grande partie de l'huile provenue de ces cristaux tombés en *deliquium*; j'ai adapté pour cet effet à ma cornue un récipient bien luté, & l'appareil des gaz; mais je n'ai retiré que de la très-belle huile de vitriol, & un flegme très-acide: 2 livres 9 onces de ce *deliquium* m'ont fourni 1 livre 10 onces d'huile très-concentrée, & 15 onces d'esprit de vitriol à 23 degrés.

L'état du thermomètre, depuis la production du phénomène jusqu'à la fonte des cristaux, a été comme il suit:

Les 2, 3, 4, 5 de Janvier, il descendit sous 0 de 2, & même de 3 degrés le 5 au matin; depuis ce jour, il s'est constamment tenu au-dessus de 0, & a été jusqu'au 12: son terme moyen a été entre 5 & 8.

Ce phénomène me parut nouveau & intéressant. Je desirois un froid assez vif pour pouvoir répéter l'expérience, & je commençois à désespérer, lorsque, le 9 Mars, l'air se refroidit au point de me faire espérer de reproduire ce phénomène. Dans la nuit du 9 au 10, le thermomètre descendit à — 1; le lendemain, le thermomètre marquant — 3, je disposai, à 8 heures du matin, des appareils convenables sur une terrasse exposée au levant.

Je me servis de capsules de verre pour mes expériences, & mis dans ces vases.

1.° De l'huile de ma fabrique, concentrée, blanche comme l'eau, & donnant 66 $\frac{1}{2}$ au pèse-liqueur.

2.° De l'huile de vitriol provenant du *deliquium* des premiers cristaux, & concentrée au 65^{me} degré.

3.° Le flegme provenu de ces concentrations, & marquant 23 degrés,

Mém. 1784.

Kkkk

4.^o De l'huile rapprochée par la concentration jusqu'à 64.^{me} degré.

5.^o L'huile provenant du *deliquium* des cristaux, qui avoit été exposée à l'air pendant trente-sept jours, & ne marquant plus que 60. degrés.

Ces huiles, plus ou moins fortes, restèrent exposées à l'air tout le jour & toute la nuit du 10 au 11.

Le 11, à 8 heures du matin, le thermomètre marquant — 2, je trouvai, 1.^o que l'huile de l'expérience, n.^o 1, n'avoit éprouvé aucun changement du moins en apparence.

2.^o Que celle de l'expérience, n.^o 2, présentoit, au fond de la liqueur, sur les parois du vase, une couche de petits cristaux de la grosseur d'une tête d'épingle, dont la forme très-bien caractérisée paroissoit celle d'un rhombe allongé.

3.^o Le flegme marquant 23. degrés, ne présentoit aucun changement.

4.^o L'huile marquant 64. degrés, présentoit à sa surface trente à quarante cristaux figurés en rhombes allongés, ayant à peu-près 4. lignes de long sur 3 de large, & une d'épaisseur.

J'ai décanté la liqueur que furnageoient les cristaux, & en ai trouvé une couche de semblables au fond du vase. L'huile décantée, mise dans un grand vase de verre (le thermomètre montant toujours par la chaleur du soleil qui donnoit déjà sur les murs voisins), a été convertie presque toute en cristaux dans l'espace d'un quart d'heure. L'huile qui furnageoit, coulée sur des plaques de verre, s'y figeoit dans la minute, & formoit une suite de cristaux implantés les uns dans les autres; un carreau de vitre enduit de cette huile, s'en est recouvert, au point que j'ai retiré 2 onces 7 gros d'huile de vitriol de la fonte de cette espèce d'incrustation.

5.^o L'huile provenant du *deliquium* des cristaux, & affoiblie au 60.^{me} degré par son exposition à l'air, n'a donné

aucun signe de cristallisation, quoique j'en eusse rempli des tubes de verre minces, pour que le froid la frappât mieux.

Au plaisir de répéter mon expérience, j'ai joint la satisfaction de rendre témoins de tous ces phénomènes plusieurs de mes confrères à l'Académie, tels que M.^{rs} Mourgues, Peyre, Joyeuse, Bertholon, Brun, &c. Deux d'entr'eux, M.^{rs} Peyre & Joyeuse, associés-chimistes, ont eu le plaisir de voir se former & croître, à vue d'œil, des cristaux de l'huile décantée de dessus la première couche cristalline, & mise dans une grande capsule. Plusieurs cristaux ont acquis, sous nos yeux, en quelques minutes, une longueur d'un pouce; & nous avons vu que le rhombe qui paroît d'abord, n'est qu'un segment de prisme, & qu'il s'allonge par l'addition & l'application de nouveaux cristaux.

Dans le nombre infini de cristaux qui se sont formés, il y en a avec pyramide, & d'autres sans pyramide.

Il me paroît résulter de cette expérience, 1.^o que l'huile très-concentrée ne cristallise point; 2.^o que l'huile concentrée entre le 63 & le 65 $\frac{1}{2}$ à un aréomètre marquant 66 dans celle du commerce, cristallise facilement; 3.^o que le degré de froid convenable est depuis — 1 jusqu'à — 3,

Ce fait me paroît nouveau, & je vais le rapprocher de deux connus qui paroissent avoir de l'analogie avec lui.

1.^o Meyer rapporte (*Essais de chimie, chap. XVIII*) que lorsqu'on rectifie une huile de vitriol bien fumante, telle que celle de Nordhaus, il passe des vapeurs qui se condensent, dans le récipient bien luté, en une liqueur que le froid coagule en une matière saline: ce sel fume violemment quand on ouvre le récipient. Le chimiste d'Osnabruck a cru que c'étoit une combinaison de son *causticum* avec l'huile de vitriol; & on m'a rapporté que M. de Fourcroy qui a vérifié l'expérience, attribuoit ce phénomène à une combinaison particulière de gaz sulfureux & d'huile de vitriol.

Ce phénomène, très-intéressant par lui-même, & sur-tout

par la manière dont ce dernier chimiste l'envisage, ne me paroît avoir aucun rapport avec les observations que j'ai rapportées ci-dessus; 1.^o les cristaux dont j'ai parlé, ne se volatilisent point, ils se fondent au feu & se réduisent en huile; 2.^o exposés à l'air, il ne s'en dégage ni fumée ni odeur.

Nous devons à M. le duc d'Ayen de superbes expériences sur la congélation de l'huile de vitriol: ce célèbre amateur des sciences profita du froid extraordinaire qu'on éprouva à Paris, à la fin de Janvier 1776, pour exposer à une fenêtre, dans des soucoupes de porcelaine, de l'acide vitriolique à divers degrés de concentration. La nuit du 27 au 28, l'acide concentré se gela après 7 ou 8 heures d'exposition; l'acide affoibli par l'eau, ne donna aucun signe de congélation, même après 30 heures.

M. de Morveau a répété l'expérience le 15 Février 1782; & après avoir obtenu de la glace par un froid artificiel de 16 au-dessous de 0, il se convainquit que l'huile pouvoit se geler à un froid moindre; & les portions d'huile qui avoient résisté à l'impression d'un froid aussi violent, se figèrent à quelques degrés au-dessus de 0: il observa même des stries à la surface de la glace, ce qui me paroît annoncer un délinéament de cristallisation; mais, d'un côté, le rapprochement ou trop forte concentration de la liqueur, & de l'autre, le froid violent qu'on lui appliqua, précipitèrent confusément les parties intégrantes de l'huile, & ne lui permirent pas un arrangement symétrique.

Le manque d'eau de cristallisation doit nécessairement s'opposer à la formation des cristaux; & pour que le phénomène eût lieu, il falloit de l'huile de vitriol qui n'eût été portée, par la rectification naturelle, qu'au 63.^{me} ou 65.^{me} degré, & je ne crois pas qu'on obtienne cet effet en affaiblissant à ce degré l'huile déjà concentrée; car l'huile de vitriol préalablement concentrée, & ensuite affaiblie par l'eau, ne me paroît pas exactement de la même nature que celle qui est portée au même degré par une concentration

naturelle. 1.^o Il y a un principe colorant & autres matières qu'on dégage par la rectification, & qu'on ne redonne point par l'addition de l'eau; 2.^o l'huile dont on a arrêté la concentration au 64.^{me} degré, ne dissout pas l'indigo; au point de porter la partie colorante sur les étoffes; tandis que l'huile bien concentrée & affoiblie par l'eau au même degré, fait du très-beau bleu: ces expériences ont été faites & répétées très en grand dans la fabrique de flanelles de M.^{rs} Isnél & Luchaire à Montpellier. 3.^o Les cristaux de l'huile au 65.^{me} degré, tombés en *deliquium*, & exposés à la même température, n'ont plus cristallisé, quoique le *deliquium* ne marquât que 64. Ce fait me paroît prouver que l'eau & l'humidité de l'air, qui se combinent avec l'acide, y développent & entretiennent une chaleur permanente qui ne le rend pas *impressionable* au même degré de froid.

Le 11 au soir & le 12, deux onces de ces cristaux enfermés dans une cornue que j'ai bouchée bien exactement avec un bouchon de liège, & exposés à une température de $+4$ degrés, ne sont pas tombés en *deliquium*, tandis que les cristaux qui s'étoient formés dans la grande capsule, & que j'ai laissés dans le vase, exposés à une température de $+1$, sont presque tous tombés en *deliquium*, au point d'être déjà totalement déformés; ce qui me fait présumer qu'on pourra garder les cristaux dans un laboratoire, en mettant le flacon qui les contient, dans un endroit frais: on pourroit essayer de plonger le flacon dans l'eau, l'éther ou autre liqueur froide.

Le phénomène que je viens de décrire est sans contredit une véritable cristallisation; mais il paroît se rapprocher des congélations, en ce que, dans la première expérience de ma fabrique, tout le liquide s'étoit figé en cristaux, & qu'il n'y avoit pas une goutte de ce que nous appelons *eau-mère*. Mais il me paroît qu'un sel quelconque, qui ne sera tenu en fusion ou dissolution que par sa seule eau de cristallisation, doit produire des effets semblables, si on lui applique un froid suffisant pour pénétrer toute la masse.

Ce fait me paroît prouver encore que la loi de la cristallisation si bien présentée par M.^{re} Linné, de l'Isle, Sage, Daubenton, Haüy, est plus générale qu'on ne l'a cru, & qu'elle s'étend jusqu'à ces matières que nous étions autorisés à regarder comme des êtres simples, avant les belles expériences de M. Lavoisier.

EXTRAIT
DES OBSERVATIONS
ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES,
Faites à l'Observatoire royal,
en l'année 1785.

M. le Comte DE CASSINI, Directeur.

M.^{rs} DE VILLENEUVE & RUELLÉ, Élèves.

Nota SA MAJESTÉ ayant voulu qu'à commencer du 1.^{er} Janvier 1785, on suivit, à son Observatoire royal, un cours complet & continué d'observations astronomiques & physiques, a créé trois places d'observateurs, qui, sous les yeux du directeur de l'Observatoire, doivent faire toutes les observations qui peuvent avoir lieu, tant le jour que la nuit, depuis le commencement jusqu'à la fin de chaque année. L'extrait de ces observations & de leurs résultats est imprimé particulièrement tous les ans, & distribué aux principaux Savans de l'Europe: mais l'Académie ayant désiré qu'il fit partie de ses Mémoires, on le trouvera à l'avenir à la fin de chaque volume.

A V E R T I S S E M E N T.

LES nouveaux instrumens que Sa Majesté a commandés pour son Observatoire royal, ont été commencés cette année, & doivent être achevés dans le courant de 1786. Le sieur Lenoir est chargé de la construction d'un Cercle entier de trois pieds de diamètre; le sieur Megnié a entrepris celle du Quart-de-cercle mural de sept pieds & demi de rayon. Ce grand instrument est exécuté à l'Observatoire même, dans un vaste atelier disposé à cet effet, où seront établis à demeure les outils & toutes les principales machines nécessaires à la construction des grands instrumens d'Astronomie: une spacieuse fonderie a été bâtie & distribuée de la manière la plus commode pour faire des essais sur la fonte en cuivre des différentes parties de l'instrument. Ce sera donc à l'avenir dans le même lieu que seront faits & les instrumens & les observations; l'artiste & le savant réunis se prêteront un secours réciproque, dont les arts & les sciences ne peuvent tirer qu'un très-grand avantage.

Sa Majesté, en confiant la construction des nouveaux instrumens de son Observatoire, à des artistes François, a eu principalement en vue de ranimer l'industrie nationale, & de mettre les artistes de la capitale dans le cas de disputer à une nation rivale la prééminence qu'elle a depuis quelque temps obtenue dans les arts par les chef-d'œuvres qui sont sortis de chez elle. L'on sait ce que peuvent opérer en France les regards du Souverain; on doit donc juger favorablement des heureux effets que va produire la protection marquée que Sa Majesté daigne accorder dans cette occasion aux Artistes François.

En attendant que la construction de ces nouveaux instrumens soit achevée, nous avons fait usage de ceux que nous possédions précédemment; la plupart appartiennent à l'Académie, qui, autant que ses facultés le lui ont permis, s'est toujours empressée à seconder nos travaux, & à suppléer au dénuement où nous nous sommes trouvés pendant long-temps par l'état de vétusté & d'imperfection où étoient réduits les anciens instrumens de l'Observatoire. Un fouds annuel que Sa Majesté vient d'affecter à l'entretien & à l'augmentation de nos instrumens, nous met aujourd'hui dans une
situation

situation bien différente. Nous avons déjà fait l'acquisition d'un superbe télescope de cinq pieds de foyer, de la construction du sieur Dollond, & dont le pouvoir amplifiant, à l'imitation de ceux de M. Herschel, va jusqu'à trois mille fois. Plusieurs autres instrumens de toute espèce, & propres à diverses observations, ont été acquis ou commandés & commencent déjà à former une collection précieuse qui assure à l'avenir la richesse, la gloire & l'utilité de l'Observatoire royal dont l'établissement semble renaitre sous une nouvelle forme. La suite nombreuse d'observations dont nous offrons ici les résultats, va faire connoître l'usage que nous avons fait des nouveaux secours que nous avons obtenus : il est nécessaire d'entrer dans quelques explications pour l'intelligence des tableaux dans lesquels nous avons tâché de présenter en raccourci tous les principaux résultats de nos opérations.

Les hauteurs du baromètre, que l'on trouvera parmi les observations météorologiques, ont été déterminées depuis le mois de Juillet, avec un excellent instrument de la construction du sieur Megnié ; par le moyen d'une petite cuvette que l'on plonge à chaque observation dans le mercure, & qui se remplit également, on obtient toujours un niveau constant : ce baromètre mesure jusqu'aux centièmes de ligne les variations de la hauteur du mercure ; à c'est M. Lavoisier, membre de l'Académie, que nous sommes redevables de cet instrument.

Le thermomètre à mercure, avec lequel nous avons observé la température de l'air, a été construit par le sieur Mossy, d'après les ordres de l'Académie ; la division a été faite sur glace par le sieur Richer, avec le plus grand soin, on y distingue les degrés & dixièmes de degrés.

Un autre thermomètre placé au fond des caves où il reste perpétuellement, a été également construit par ordre de l'Académie, sous l'inspection & la direction de M. Lavoisier : sa construction ingénieuse & particulière a pour objet de déterminer si la température des caves de l'Observatoire est constante, si on peut la prendre pour un terme fixe ; & au cas qu'elle ait quelques variations, d'en rechercher les loix, d'en mesurer l'étendue au centième de degrés près.

La déclinaison de l'aiguille aimantée a été observée avec une aiguille d'acier fondu, de neuf pouces de longueur : nous nous

proposons de faire exécuter incessamment un nouvel instrument pour cette sorte d'observation.

La variation diurne a été déterminée avec une aiguille suspendue à des fils de soie, selon la méthode de M. Coulomb.

Quant aux observations astronomiques, tous les lieux des planètes ont été déterminés par des observations faites dans le méridien, comme étant les plus exactes : les passages ont été pris avec une lunette méridienne achromatique de trois pieds & demi, exécutée par le sieur Charité, artiste François, sur le modèle d'un pareil instrument anglais, de la construction du sieur Ramsden ; & les hauteurs ont été observées avec un quart-de-cercle de six pieds de rayon, construit en 1743, par le sieur Langlois, ce qui à la vérité nécessitoit toujours le concours de deux observateurs ; mais si cette méthode est plus embarrassante, & ne permet pas de faire un aussi grand nombre d'observations qu'avec les instrumens muraux, elle a peut-être l'avantage, en séparant les deux parties de l'observation, d'y employer l'espèce d'instrument qui est la plus propre à chacune. En effet, je ne balancerois jamais, pour l'observation des passages, à donner la préférence à la lunette méridienne sur le meilleur mural, à cause des inégalités du plan de ce dernier instrument, impossibles à éviter, très-difficiles à reconnoître, plus encore à déterminer, sans parler des changemens accidentels dont ce plan est susceptible ; & pour les hauteurs, la difficulté de vérifier un mural, lui donne certainement de l'infériorité vis-à-vis des quarts-de-cercle mobiles, qu'on peut retourner, renverser, & vérifier avec la plus grande facilité & aussi fréquemment qu'on le juge à propos.

Les éclipses des satellites de Jupiter, des étoiles par la Lune, & autres phénomènes instantanés de ce genre, ont été observés avec de très-bonnes lunettes achromatiques à trois verres, de trois pieds & demi de foyer & de quarante-deux lignes d'ouverture, de la construction du sieur Dollond.

Les tables auxquelles nous avons comparé les résultats de nos observations, sont celles que M. de la Lande a rassemblées à la suite de son *Astronomie*, édition de 1771 ; les signes + & - que nous avons employés pour l'erreur des tables, indiquent qu'il faut ajouter ou retrancher de la position actuelle déduite des tables, pour avoir celle qui a été observée.

HISTOIRE PHYSIQUE

de l'année 1785.

SI l'on ne considère les observations météorologiques, que sous un certain point de vue, si l'on n'envisage pour ainsi dire qu'en masse & sans réflexion cette multiplicité de causes accidentelles, momentanées & locales, qui paroissent influencer sans cesse sur la constitution de l'atmosphère, & occasionner les changemens continuels de la température; on peut être tenté de croire que le hasard a plus de part que toute autre chose aux phénomènes météorologiques, qu'il est impossible d'y reconnoître des règles certaines, & qu'en conséquence il n'y a qu'une simple curiosité, sans aucune utilité, à les observer. Mais le philosophe instruit, qui examine & approfondit tout avant de prononcer, est bien éloigné de penser ainsi. Plus il a observé la Nature, plus il a pénétré ses secrets, & plus il est persuadé que dans le vaste plan de cet univers il n'est point d'effet sans cause, point d'événement dû au hasard, point de mouvement sans loix. Les comètes observées pendant nombre de siècles, & prises pour des météores fortuits, ont enfin été reconnues pour des planètes, & rangées au nombre des corps réguliers de notre système. Il y a à peine une vingtaine d'années que l'on fait les observations météorologiques avec l'assiduité & l'exactitude nécessaires; les instrumens qu'on y emploie se perfectionnent tous les jours. Ne pouvons-nous donc pas espérer qu'en redoublant d'attention, en multipliant les observations des phénomènes météorologiques, nous parviendrons quelque jour à découvrir certaines loix, certaines périodes dont la connoissance ne sera pas moins utile à la société, que glorieuse & importante pour la physique.

Les observations de l'état & des variations de l'atmosphère pendant le cours de cette année, ont été faites journellement à l'Observatoire, & répétées à différentes heures du jour & de la nuit. On va rapporter ci-après les résultats généraux, qui seront

636 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
 suivis d'un tableau particulier pour chaque mois, des circon-
 stances les plus remarquables de la température.

<i>Hauteur du Baromètre.</i>	<i>La plus grande.</i> <small>pouc. lign.</small> 28. 5, 2. 11 Avril.	<i>La plus petite.</i> <small>pouces.</small> 27, 0. 29 Mars.	<i>Variation annuelle.</i> <small>pouc. lign.</small> 1. 5 2.	Jours de pluie..... 107. Jours de neige.... 16. Jours de gelée.... 49.
<i>Hauteur du Thermomètre.</i> Exposé à l'air libre..... Placé au fond des caves.....	+ 24 ^d , 2. 26 Juill.	— 8 ^d , 7. 1 Mars.	3 2 ^d , 9.	Quantité d'eau tombée dans l'année. 15 ^{pouc.} 5 ^{lign.} 0.
	9 ^d $\frac{11}{100}$ 27 Déc.	9 ^d $\frac{11}{100}$ 1 Janv.	$\frac{11}{100}$	Déclinaison de l'aiguille aimantée, le 1. ^{er} Janv. 21 ^d 33'. — le 30 Mai 22 ^d 0'.
Variation diurne de l'aiguille aimantée...	15' 4" en Mai.	4' 7" en Janv.	13' 7.	

TABLEAU MÉTÉOROLOGIQUE.

1785.	BAROMÈTRE.	THERMOMÈTRE.	VENTS dominans.	CYRCONSTANCES & Remarques.
JANVIER.	Plus grande hauteur 28 ^{pouc.} 3 ^{lign.} 8 le 23. Plus petite hauteur 27 ^{pouc.} 1 ^{lign.} 0 le 2. Huit jours de pluie, 9 ^{pouc.} 2 d'eau. Un jour de neige.	Plus grande hauteur + 9 ^d , 1 le 5. Plus petite hauteur — 24, 5 le 24. Huit jours de gelée.	S. S. O. E. S. E. S. E.	Il y a eu pendant ce mois, quinze jours de brume & ce brouillard; il a été épais particulière- ment les 12, 13, 20, 21, 23 & 25. Très-mauvais temps les 5, 6 & 9. Le vent a été très- grand les quatre derniers jours du mois, de l'O. au S.
FÉVRIER.	Plus grande hauteur 28 ^{pouc.} 5 ^{lign.} 0 le 12. Plus petite hauteur 27 ^{pouc.} 0 ^{lign.} 8 le 22. Trois jours de pluie, 1 ^{pouc.} 1 ^{lign.} 9. Dix jours de neige.	Plus grande hauteur + 5 ^d , 5 le 7. Plus petite hauteur — 7 ^d , 5 le 28. Quatorze jours de gelée.	N. N. O. S. S. E. N. N. E.	Il n'y a eu que quatre jours de brume. Les vents ont été très-forts pendant ce mois, par- ticulièrement les 27 & 28.

TABLEAU MÉTÉOROLOGIQUE.

1785.	BAROMÈTRE.	THERMOMÈTRE.	VENTS dominans.	CIRCONSTANCES & Remarques.
MARS.	Plus grande hauteur $28^{\text{pouces}} 3^{\text{lignes}} 13$ le 17. Plus petite hauteur $27^{\text{pouces}} 0^{\text{lignes}} 0$ le 29. Trois jours de neige. Un jour de grêle.	Plus grande hauteur $+ 7^{\text{d}} 8$ le 21. Plus petite hauteur $- 8^{\text{d}} 7$ le 1. Treize jours de gelée.	N. N. E. N.	Il y a eu pendant ce mois dix jours de brume & brouillard. Plusieurs jours de fort beau temps. Une aurore boréale foible le 22.
AVRIL.	Plus grande hauteur $28^{\text{pouces}} 5^{\text{lignes}} 2$ le 11. Plus petite hauteur $27^{\text{pouces}} 4^{\text{lignes}} 0$ le 2. Cinq jours de pluie, $6^{\text{lignes}} 2$ d'eau. Un jour de neige.	Plus grande hauteur $+ 17^{\text{d}} 4$ le 18. Plus petite hauteur $- 0^{\text{d}} 7$ le 3. Un jour de gelée.	N. E. N. E. N. N. E.	Il y a eu pendant ce mois sept jours de brume. Généralement très-beau temps, surtout vers la fin du mois.
MAI.	Plus grande hauteur $28^{\text{pouces}} 4^{\text{lignes}} 5$ le 13. Plus petite hauteur $27^{\text{pouces}} 8^{\text{lignes}} 0$ le 18. Cinq jours de pluie, 3^{lignes} d'eau.	Plus grande hauteur $+ 21^{\text{d}} 0$ le 24. Plus petite hauteur $- 5^{\text{d}} 8$ le 22.	N. N. E. O. S. O. O. N. O.	Il y a eu cinq jours de brume, particulièrement le 5 de ce mois. Aurore boréale le 23. Grande sécheresse pendant tout le mois. Il n'a commencé que le 27 à tomber quelques gouttes d'eau : les jours suivans la pluie a été forte.
JUIN.	Plus grande hauteur $28^{\text{pouces}} 3^{\text{lignes}} 8$ le 10. Plus petite hauteur $27^{\text{pouces}} 9^{\text{lignes}} 1$ le 5. Neuf jours de pluie, $22^{\text{lignes}} 8$ d'eau. Un jour de grêle.	Plus grande hauteur $+ 22^{\text{d}} 2$ le 27. Plus petite hauteur $+ 4^{\text{d}} 8$ le 24.	O. S. O. N. N. E. N. E.	Il a tonné les 8 & 28.

TABLEAU MÉTÉOROLOGIQUE.

1785.	BAROMÈTRE.	THERMOMÈTRE.	VENTS dominans.	CIRCONSTANCES & Remarques.
JUILLET.	Plus grande hauteur 28 ^{poec.} 3 ^{lig.} 4 le 9. Plus petite hauteur 27 ^{poec.} 0 ^{lig.} 4 le 29. <hr/> Quinze jours de pluie, 2 ^{poec.} 4 ^{lig.} 5 d'eau.	Plus grande hauteur + 24 ^{d.} 2 le 26. Plus petite hauteur + 10 ^{d.} 2 le 24. <hr/>	N. O. O. S. O. S. O.	Il y a eu quelques coups de tonnerre le 20.
AOÛT.	Plus grande hauteur 28 ^{poec.} 3 ^{lig.} 7 le 27. Plus petite hauteur 27 ^{poec.} 7 ^{lig.} 6 le 3. <hr/> Douze jours de pluie, 2 ^{poec.} 0 ^{lig.} 6 d'eau.	Plus grande hauteur + 20 ^{d.} 3 le 2. Plus petite hauteur + 6 ^{d.} 3 le 27. <hr/>	S. S. O. O. S. E.	Le vent a été toujours très - fort pendant ce mois, principalement les 4 & 13. Tonnerre les 2, 3, 4 & 5. Léger brouillard le 23.
SEPT.	Plus grande hauteur 28 ^{poec.} 4 ^{lig.} 7 le 29. Plus petite hauteur 27 ^{poec.} 3 ^{lig.} 7 le 25. <hr/> Quinze jours de pluie, 1 ^{poec.} 10 ^{lig.} d'eau.	Plus grande hauteur + 19 ^{d.} 5 le 19. Plus petite hauteur + 7 ^{d.} 6 le 29. <hr/>	S. O. S. S. O. S. O.	Le vent a été commu- nément très-fort & des plus violens les 6 & 25. Tonnerre le 23. Sept jours de brume & brouillard.
OCTOBRE.	Plus grande hauteur 28 ^{poec.} 4 ^{lig.} 9 le 14. Plus petite hauteur 27 ^{poec.} 8 ^{lig.} 3 le 8. <hr/> Quatorze jours de pluie, 1 ^{poec.} 10 ^{lig.} 4 d'eau.	Plus grande hauteur + 15 ^{d.} 5 le 12. Plus petite hauteur + 0 ^{d.} 3 le 27. <hr/>	S. S. O. S.	Il y a eu quinze jours de brouillard. Vents violens les 12 & 28.

DES SCIENCES. 639
TABLEAU MÉTÉOROLOGIQUE.

1785.	BAROMÈTRE.	THERMOMÈTRE.	VENTS dominans.	CIRCONSTANCES & Remarques.
NOVEMB.	Plus grande hauteur 28 ^{point} 4 ^{ligne} , 6 le 17. Plus petite hauteur 27 ^{point} 1 ^{ligne} , 5 le 30. <hr/> Douze jours de pluie, 2 ^{point} 1 ^{ligne} , 5 d'eau.	Plus grande hauteur + 12 ^{degrés} , 5 le 5. Plus petite hauteur — 1 ^{degrés} , 9 le 18. <hr/> Deux jours de gelée.	S. O. S. O.	Il y a eu quatorze jours de brouillard. Vents violens les 1, 19, 26 & 28.
DÉCEMB.	Plus grande hauteur 28 ^{point} 3 ^{ligne} , 5 le 18. Plus petite hauteur 27 ^{point} 0 ^{ligne} , 7 le 1. <hr/> Six jours de pluie, 0 ^{point} 6 ^{ligne} , 9 d'eau, 4 jours de neige.	Plus grande hauteur + 8 ^{degrés} , 9 le 19. Plus petite hauteur — 7 ^{degrés} , 8 le 31. <hr/> Onze jours de gelée.	S. O. E. S. E. N. E.	Il y a eu dix jours de brouillard. Vent violent les 2, 8 & 29.



HISTOIRE CÉLESTE

De l'année 1785.

L'ASTRONOMIE n'attend sa perfection que du temps, elle est l'élève des siècles. Le génie, par des découvertes heureuses, peut bien à la vérité hâter quelquefois la marche lente de ses progrès; mais il a beau faire, s'il n'a derrière lui une longue suite d'observations sur laquelle il puisse s'appuyer & construire, ses efforts seront inutiles, il ne bâtira que des systèmes.

Chaque année n'ajoute communément que peu de chose aux lumières de l'Astronomie; mais ce peu de chose, en s'accumulant, devient au bout d'un ou plusieurs siècles, la base & le fondement de quelque grande & belle théorie. Il est des temps plus heureux que d'autres, où la rencontre de certaines circonstances, l'apparition de quelque phénomène particulier, augmentent tout-à-coup nos connoissances, découvrent ou confirment quelque vérité nouvelle ou soupçonnée. Notre siècle sans doute a été l'un des plus favorisés de ce côté: deux passages de Vénus sur le Soleil, dans l'espace de neuf années, ont enfin fixé la parallaxe du Soleil, l'un des élémens les plus importans de l'Astronomie; mais s'il reste encore quelque doute sur cette détermination intéressante, ce ne sera qu'en 1874, c'est-à-dire, au bout de cent cinq ans que le retour du même phénomène pourra en procurer la vérification. Une nouvelle planète vient, en 1781, d'être ajoutée à notre système; quatre années d'observations nous ont fourni une ébauche de sa théorie: la révolution de ce nouvel astre paroît être de quatre-vingt-trois ans; ce ne sera donc que dans quatre ou cinq siècles, qu'après l'avoir observé assiduellement plusieurs fois dans les mêmes points de son orbite, l'on pourra parvenir à une exacte connoissance de ses mouvemens. Plus de quarante comètes ont été aperçues & observées depuis quatre-vingt-cinq ans, & leur retour ne doit avoir lieu au plus tôt que dans le siècle prochain. En attendant, presque chaque année nous

en

en fait découvrir quelques nouvelles au retour desquelles nos successeurs devront également veiller, pour parvenir à déterminer la durée de leur révolution. Si cette connoissance précieuse est réservée aux siècles futurs, au moins est-il vrai qu'ils nous en feront redevables, puisque ce sont nos observations comparées aux leurs qui serviront de base; ainsi l'on pourroit en quelque sorte comparer les travaux des Astronomes, à ceux de ces respectables pères de famille, qui travaillent & n'amassent que pour la jouissance de leurs enfans & pour enrichir leur postérité.

On voit donc combien peut devenir intéressante, précieuse même un jour, pour les progrès de l'Astronomie, la collection suivie d'observations astronomiques que nous commençons à rassembler. Dans le cours de cette année, par exemple, nous avons déterminé près de cent quatre-vingts lieux de planète, & fixé l'erreur de la théorie dans les divers points de leurs orbites, où l'on avoit peu coutume de les suivre auparavant. Cette vérification répétée pendant plusieurs années, à chaque révolution & dans les mêmes points, ne peut manquer de nous conduire à une connoissance complète des mouvemens célestes, de leurs inégalités, & des équations par lesquelles on peut les représenter. Dès-lors on conviendra que l'Astronomie nous sera redevable de quelque chose, & beaucoup plus, peut-être, que si nous eussions fait une découverte même brillante, mais souvent peu utile aux progrès de la science. C'est cette persuasion qui ne cesse d'animer le zèle de nos coopérateurs (1), & leur donne la force, le courage & la patience, en s'adonnant entièrement à la pratique de l'Astronomie, de s'exposer aux fatigues de l'observation & des veilles, & de surmonter l'ennui & les difficultés des calculs astronomiques, dont les tableaux suivans vont offrir les résultats.

(1) M.^{rs} de Villeneuve & Ruelle, Élèves.

642 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
L E S O L E I L.

IL n'y a eu cette année aucune éclipse de Soleil visible à Paris: celle du 9 Février n'a eu lieu que pour l'Afrique & l'Asie; elle a dû être centrale & totale au Congo: celle du 4 Août a dû être centrale & annulaire dans l'Amérique septentrionale.

Il a paru de temps en temps quelques taches sur le disque du Soleil, mais elles ont été peu considérables.

Au mois de Mars, on a observé

La hauteur du bord supérieur du Soleil, le 21... $41^{\circ} 57' 50''$, 2.
D'où l'on conclut $\left\{ \begin{array}{l} \text{la déclinaison vraie du centre. } 0. 31. 0, \text{ bor.} \\ \text{l'heure de l'équinoxe, le 19 à } 16^h 34. 49. \end{array} \right.$

Au mois de Juin, on a déterminé

La hauteur solsticiale du centre du Soleil..... $64. 37. 47$.

D'où l'on conclut

L'obliquité de l'écliptique apparente..... $23. 27. 59$.

Au mois de Septembre, on a observé

La hauteur du bord supérieur du Soleil, le 22... $41^{\circ} 31' 36''$, 8.
D'où l'on conclut $\left\{ \begin{array}{l} \text{la déclinaison vraie du centre. } 0. 4. 26 \text{ bor.} \\ \text{l'heure de l'équinoxe, le 22 à } 4^h 33. 8. \end{array} \right.$

On a déterminé, par observation, le passage du centre du Soleil dans le parallèle de plusieurs Étoiles, ainsi qu'on le voit dans le Tableau suivant.

				Différ. d'asc. dr.
Passage du Soleil dans le parallèle de.....	α de l'Hydre	le 27 Févr.	à $21^h 10' 30''$	$157^{\circ} 29' 41''$, 0.
	ι d'Orion	4 Mars	$5. 53. 30$	$95. 24. 22$, 0.
	β de l'Éridan	5 Mars	$19. 30. 26$	" " "
	σ d'Orion	7 Avril	$5. 58. 56$	$150. 39. 14$, 0.
	δ du Lion	16 Avril	$2. 49. 33$	$130. 21. 32$, 0.
	Arcturus	20 Mai	$21. 57. 40$	" " "
	π du Serpent	16 Juin	$12. 33. 59$	" " "
	γ d'Hercule	24 Juillet	$10. 30. 7$	$118. 25. 29$, 0.
	Sirius	6 Nov.	$17. 41. 55$	" " "
	β de la Baleine	16 Nov.	$22. 7. 3$	$135. 2. 38$, 6.
	γ du Lièvre	5 Déc.	$7. 16. 3$	$191. 5. 50$, 5.

DES SCIENCES.
V É N U S.

643

Cette Planète a achevé, dans le courant de cette année, deux révolutions moins quatre signes treize degrés trois quarts autour du Soleil, & s'est trouvée

DANS SON NŒUD		E N	Dant la plus grande digr.		STATIONNAIRE.		ÉCLIPSÉE
Descend.	Ascendant.	CONJ. Inférieure.	Occident.	Orientale.			par la LUNE.
2 Juin.	23 Sept.	29 Mai.	2 Août.	28 Mars.	8 Mai.	19 Juin.	12 Avril.

On a déterminé, par observation, quarante-deux lieux de cette Planète, qui, comparés aux Tables, ont donné les résultats suivans :

1785.	T E M P S		ÉTOILE	Position supposée de l'ÉTOILE.		Lieu observé de V É N U S.		Erreur des Tables.	
	V R A I.		comparée.						
	H.	M.	S.	Ascens. droite.	Déclinaison.	Longitude.	Latitude.	En long.	En latit.
				D.	M.	S.	D.	M.	S.
Janv. 12	2.	34.	22,0	ε Baleine.	37. 18. 1,0	12. 47. 31,0A.	330. 43. 5,0	0. 32. 30A.	+0. 24 +0. 6
Mars 1	2.	44.	48,0	σ du Lion.	142. 25. 39,0	10. 51. 41,0B.	26. 34. 5,0	1. 25. 13B.	1. 4 0. 22
2	2.	45.	7,0	α Écreviffe.	131. 41. 11,0	12. 40. 43,0	27. 39. 13,0	1. 30. 12	0. 49 0. 25
3	2.	45.	24,3	Idem.	131. 41. 11,0	12. 40. 43,0	28. 44. 11,0	1. 35. 15	0. 33 0. 28
Avril 5	2.	52.	10,0	ζ du Lion.	151. 11. 4,0	24. 28. 47,0	61. 2. 42,0	4. 10. 6	0. 33 0. 27
7	2.	51.	45,0	ε du Lion.	143. 24. 48,0	24. 25. 13,0	62. 41. 3,0	4. 17. 32	0. 59 0. 35
9	2.	51.	8,5	Idem.	143. 24. 48,0	24. 25. 13,0	64. 15. 18,0	4. 24. 23	0. 42 0. 38
10	2.	50.	45,0	Idem.	143. 24. 48,0	24. 25. 13,0	65. 1. 4,0	4. 27. 30	0. 30 0. 34
11	2.	48.	48,0	μ du Lion.	145. 8. 18,0	24. 25. 13,0	66. 30. 25,0	4. 33. 29	0. 45 0. 29
15	2.	47.	49,4	Idem.	145. 8. 18,0	24. 25. 13,0	68. 36. 28,0	4. 41. 44	0. 38 0. 54
17	2.	46.	8,0	Idem.	145. 8. 18,0	24. 25. 13,0	69. 54. 59,0	4. 46. 10	0. 28 0. 54
25	2.	35.	28,5	α Cour.	231. 24. 32,0	27. 26. 43,0	74. 15. 49,0	4. 55. 5	0. 12 0. 35
29	2.	27.	18,6	Idem.	231. 24. 32,0	27. 26. 43,0	75. 48. 45,0	4. 53. 32	-0. 9 0. 41
Mai 1	2.	22.	21,5	ε Bouvier.	218. 54. 49,2	27. 59. 8,0	76. 24. 22,0	4. 50. 41	0. 8 0. 39
4	2.	13.	47,3	Idem.	218. 54. 49,2	27. 59. 8,0	77. 2. 40,0	4. 43. 46	0. 19 0. 38

M m m m ij

1785.	TEMPS		ÉTOILE comparée.	Position supposée de l'ÉTOILE.		Lieu observé de VÉNUS.		Erreur de T.	
	VRAI.			Ascens. droite.	Déclinaison.	Longitude.	Latitude.	En long.	En lat.
	H.	M. S.	D.						
Mai	5	2. 10. 38,5	α Cour.	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5 B.	77. 11. 34,0	4. 40. 42 B.	+0. 1	+2.
	6	2. 7. 17,3	Idem.	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5	77. 17. 53,0	4. 37. 5	-0. 3	0.
	8	2. 0. 4,0	Idem.	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5	77. 24. 5,0	4. 28. 41	+0. 3	0.
	9	1. 56. 9,0	Idem.	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5	77. 23. 24,0	4. 23. 37	-0. 15	0.
	10	1. 52. 7,2	Idem.	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5	77. 20. 39,0	4. 18. 15	0. 5	0.
	11	1. 47. 53,6	Idem.	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5	77. 15. 35,0	4. 12. 28	0. 16	0.
	12	1. 43. 29,5	Idem.	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5	77. 7. 55,0	4. 5. 53	0. 4	0.
	14	1. 34. 4,4	Idem.	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5	76. 45. 19,5	3. 51. 23	0. 26	0.
	15	1. 29. 6,8	Idem.	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5	76. 30. 27,0	3. 43. 42 B.	0. 34	0.
Juin	9	12. 49. 35,9	γ d'Herc.	243. 7. 27,0	19. 39. 55,0	63. 1. 31,0	1. 40. 50 A.	0. 23	+0.
	10	12. 44. 1,3	Idem.	243. 7. 27,0	19. 39. 55,0	62. 38. 18,0	1. 53. 13	0. 28	0.
	11	12. 33. 35,0	Idem.	243. 7. 27,0	19. 39. 55,0	62. 17. 13,0	2. 4. 10	0. 34	0.
	12	12. 33. 19,6	Idem.	243. 7. 27,0	19. 39. 55,0	61. 58. 59,0	2. 14. 47	0. 6	+0.
	23	11. 45. 27,2	α d'Herc.	256. 13. 13,5	14. 39. 5,0	61. 7. 13,0	2. 42. 25	0. 8	-0.
Juill.	24	10. 49. 0,9	γ d'Hercule	243. 7. 27,0	19. 39. 55,0	77. 52. 36,0	4. 6. 26	+0. 57	0.
	25	10. 48. 32,0	Idem.	243. 7. 27,0	19. 39. 55,0	78. 41. 54,0	4. 3. 59,5	0. 28	0.
Août	6	10. 47. 13,5	Arcturus.	211. 29. 19,2	20. 18. 18,0	89. 26. 37,0	3. 25. 37 A.	-1. 40	0.
	11	10. 48. 47,2	Idem.	211. 29. 19,2	20. 18. 18,0	94. 16. 19,7	3. 6. 38	+1. 51	+4.
	12	10. 49. 14,0	Idem.	211. 29. 19,2	20. 18. 18,0	95. 15. 35,0	3. 2. 11	1. 48	+0.
	16	10. 51. 19,1	Idem.	211. 29. 19,2	20. 18. 18,0	99. 14. 53,0	2. 45. 11,0	1. 18	-0.
	19	10. 53. 15,0	ε Pégase.	318. 2. 36,0	18. 53. 51,0	102. 17. 43,0	2. 32. 11	0. 41	+0.
	26	10. 58. 48,6	Idem.	318. 2. 36,0	18. 53. 51,0	109. 37. 47,0	2. 0. 33	0. 49	-0.
	29	11. 1. 29,0	Idem.	318. 2. 36,0	18. 53. 51,0	112. 50. 45,0	1. 46. 55	1. 7	-0.
Oct.	23	11. 52. 24,3	α Baleinë.	43. 47. 5,1	3. 14. 43,0	176. 27. 38,0	1. 28. 46 B.	0. 56	+4.
Nov.	15	12. 5. 26,8	Rigel.	76. 4. 31,9	8. 27. 27,0	204. 39. 32,0	1. 45. 44	0. 46	+0.
	28	12. 11. 59,8	γ Éridan.	57. 1. 28,6	14. 7. 36,6	220. 47. 57,0	1. 36. 30	1. 7	-0.
Déc.	7	12. 17. 9,8	Syrus.	98. 55. 42,5	16. 25. 32,7 A.	232. 1. 20,0	1. 23. 54	0. 41	+0.

Cette Planète a parcouru , dans le courant de cette année, un arc de 212^d 5' autour du Soleil , & s'est trouvée

E N QUADRATURE.	DANS SON NŒUD ascendant.	STATIONNAIRE.	EN OPPOSITION.
14 Août.	24 Octobre.	21 Octobre.	27 Novembre.

On a déterminé , par observation , vingt-deux lieux de cette Planète , qui , comparés aux Tables , ont donné les résultats suivans :

785.	TEMPS	ÉTOILE	Position supposée de l'ÉTOILE.		Lieu observé de MARS.		Erreur des Tables.	
	V R A I.	comparée.	Ascens. droite.	Déclinaison.	Longitude.	Latitude.	En long.	En latit.
	H. M. S.		D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	M. S.
oût 10	17. 47. 32,0	ε Pégaſe.	318. 2. 35,5	18. 53. 51,4B.	50. 5. 36,0	1. 49. 17 A.	-1. 53	-0. 24
11	17. 46. 4,7	γ Dauphin.	309. 11. 20,8	1. 21. 58,7	50. 41. 5,0	1. 48. 53	1. 11	0. 17
16	17. 38. 49,0	α Flèche.	292. 38. 4,0	17. 32. 10,4	53. 32. 19,0	1. 45. 45	1. 36	0. 23
19	17. 34. 23,5	Idem.	292. 38. 4,0	17. 32. 10,4	55. 12. 9,0	1. 43. 44	2. 5	0. 23
26	17. 23. 51,3	ε Pégaſe.	318. 2. 35,5	18. 53. 51,4	58. 55. 23,0	1. 38. 18	2. 19	0. 25
27	17. 22. 18,7	Idem.	318. 2. 35,5	18. 53. 51,4	59. 26. 18,0	1. 37. 23	2. 12	0. 26
ſe. 23	15. 0. 6,8	α Bélier.	28. 47. 28,5	22. 26. 49,6	75. 14. 54,0	0. 2. 41	3. 27	0. 44
25	14. 51. 48,8	Idem.	28. 47. 28,5	22. 26. 49,6	75. 6. 35,0	0. 2. 42 B.	3. 43	+0. 43
26	14. 47. 35,1	Idem.	28. 47. 28,5	22. 26. 49,6	75. 1. 39,0	0. 5. 30	3. 13	0. 44
ov. 7	13. 50. 36,8	Idem.	28. 47. 28,5	22. 26. 49,6	72. 48. 52,0	0. 40. 42	4. 33	0. 47
15	13. 7. 18,4	Alcyon.	53. 42. 20,4	23. 26. 0,0	70. 21. 6,0	1. 5. 5	4. 33	0. 44
16	13. 1. 38,9	Idem.	53. 42. 20,4	23. 26. 0,0	70. 0. 13,0	1. 8. 10	4. 18	0. 47
17	12. 55. 56,4	Idem.	53. 42. 20,4	23. 26. 0,0	69. 39. 2,0	1. 11. 2	4. 43	0. 38
21	12. 32. 47,7	Idem.	53. 42. 20,4	23. 26. 0,0	68. 10. 50,0	1. 22. 42	4. 10	0. 43
28	11. 51. 15,4	Idem.	53. 42. 20,4	23. 26. 0,0	65. 31. 15,0	1. 41. 21	4. 12	0. 34
ſe. 7	10. 58. 43,2	δ Gémeaux	106. 59. 21,0	22. 21. 31,0	62. 21. 12,0	2. 0. 54	4. 15	0. 32
9	10. 47. 18,7	α Bélier.	28. 47. 29,6	22. 26. 54,7	61. 44. 21,0	2. 4. 41	4. 9	0. 45
10	10. 41. 39,0	Idem.	28. 47. 29,6	22. 26. 54,7	61. 26. 51,0	2. 6. 25	4. 4	0. 48
11	10. 35. 59,0	ζ Taureau.	81. 13. 27,3	20. 59. 48,0	61. 9. 47,0	2. 7. 49	4. 15	0. 35
12	10. 30. 29,4	α Bélier.	28. 47. 29,6	22. 26. 54,7	60. 53. 48,0	2. 9. 34	3. 58	0. 49
13	10. 23. 58,5	Idem.	28. 47. 29	22. 29. 54,7	60. 38. 23,0	2. 10. 56	3. 53	0. 43

646 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Les circonstances favorables dans lesquelles les observations précédentes ont été faites, procurent les résultats suivans :

Quadrature de Mars , le 14 Août, à....	0 ^h 14' 6", 0 t. vr.
Longitude géoc. de Mars en quadrature..	1 ^r 21 ^d 58. 55,0.
Passage de Mars par son nœud ascendant , le 24 Octobre, à.....	14 ^h 54. 31,0 t. vr.
Lieu du nœud ascendant de Mars.....	1. 17 ^d 48. 0,0.
Opposition de Mars , le 27 Novembre, à..	6 ^h 24. 28,7 t. vr.
Longitude en opposition.....	2. 5 ^d 59. 22,0.
Latitude en opposition.....	1. 38. 5,0. bor.

J U P I T E R.

Cette Planète a parcouru , dans le courant de cette année , un arc de $33^{\text{d}} 3' \frac{1}{3}$ autour du Soleil , & s'est trouvée

E N conjonction.	EN QUADRATURE.		E N opposition.	STATIONNAIRE.	
10 Mars.	4 Juillet.	26 Déc.	1 Octobre.	3 Août.	29 Nov.

On a déterminé , par observation , quarante-huit lieux de cette Planète , qui , comparés aux Tables , ont donné les résultats suivans :

1785.	TEMPS		ÉTOILE comparée.	Position supposée de l'ÉTOILE.		Lieu observé de JUPITER.		Erreur des Tables.	
	V R A I.			Ascens. droite.	Déclinaison.	Longitude.	Latitude.	En long. En lat.	
	H. M. S.	"	D. M. S.					D. M. S.	D. M. S.
Avril 28	21. 42. 19,2		♑ Vierge.	187. 42. 45,0	0. 16. 13,0 A.	2. 19. 3,1	1. 6. 52 A.	4. 34	20. 10
Mai 1	21. 33. 15,2		♑ Vierge.	182. 14. 24,0	0. 31. 30,0 B.	2. 58. 9,0	1. 6. 59	4. 42	0. 10
3	21. 27. 7,8		Idem.	182. 14. 24,0	0. 31. 30,0	3. 23. 6,0	1. 7. 11	5. 12	0. 10
7	21. 14. 45,6		♊ Vierge.	200. 57. 9,0	0. 30. 19,0	4. 13. 6,0	1. 7. 46	5. 13	0. 10
9	21. 8. 2,2		Idem.	200. 57. 9,0	0. 30. 19,0	4. 38. 3,0	1. 8. 15	4. 49	10. 10
10	21. 5. 23,2		Idem.	200. 57. 9,0	0. 30. 19,0	4. 50. 4,0	1. 8. 22	4. 58	0. 10

1785.	TEMPS		ÉTOILE comparée.	Position supposée de l'ÉTOILE.		Lieu observé de JUPITER.		Erreur des Tables.	
	V R A I.			Ascens. droite.	Déclinaison.	Longitude.	Latitude.	En long.	En latit.
	H. M. S.		D. M. S.						
Mai	11	21. 2. 12,5	ζ Vierge.	200. 57. 9,0	0. 30. 17,0 B.	5. 2. 0,0	1. 8. 23 A.	-5. 7	-0. 10
	12	20. 59. 3,6	Idem.	200. 57. 9,0	0. 30. 17,0	5. 14. 16,0	1. 8. 34	4. 51	-0. 8
	13	20. 54. 52,5	Idem.	200. 57. 9,0	0. 30. 17,0	5. 26. 25,0	1. 9. 3	4. 38	+0. 11
	14	20. 52. 37,0	Idem.	200. 57. 9,0	0. 30. 17,0	5. 37. 33,0	1. 8. 51	5. 21	-0. 10
	20	20. 33. 3,6	Idem.	200. 57. 9,0	0. 30. 17,0	6. 46. 40,0	1. 9. 48	5. 24	-0. 15
	21	20. 29. 47,5	Idem.	200. 57. 9,0	0. 30. 17,0	6. 58. 0,0	1. 10. 13	5. 18	-0. 1
	22	20. 26. 27,2	Idem.	200. 57. 9,0	0. 30. 17,0	7. 9. 15,0	1. 10. 32	5. 10	+0. 10
	23	20. 23. 6,7	Idem.	200. 57. 9,0	0. 30. 17,0	7. 20. 21,0	1. 10. 34	5. 5	+0. 11
Juin	12	19. 13. 31,2	γ Ophiucus.	264. 17. 48,4	2. 48. 10,0	10. 38. 9,0	1. 14. 43	5. 24	-0. 2
	13	19. 9. 54,7	Idem.	264. 17. 48,4	2. 41. 10,0	10. 46. 40,0	1. 14. 59	5. 53	0. 0
	25	18. 25. 54,8	Idem.	264. 17. 48,4	2. 41. 10,0	12. 19. 23,5	1. 17. 42	6. 43	0. 13
Août	3	15. 58. 2,8	β Ophiucus	263. 13. 45,7	4. 40. 15,5	14. 36. 53,0	1. 28. 42	6. 29	0. 1
	4	15. 54. 10,9	Idem.	263. 13. 45,7	4. 40. 15,5	14. 36. 37,0	1. 28. 54	6. 37	0. 7
	5	15. 50. 19,5	Idem.	263. 13. 45,7	4. 40. 15,5	14. 36. 24,0	1. 29. 16	6. 35	0. 1
	19	14. 56. 10,9	θ Serpent.	281. 23. 55,1	3. 56. 28,0	14. 9. 49,0	1. 32. 48	6. 38	+0. 15
	20	14. 52. 23,0	Idem.	281. 23. 55,1	3. 56. 28,0	14. 6. 38,0	1. 32. 57	5. 45	+0. 23
	23	14. 40. 35,2	Idem.	281. 23. 55,1	3. 56. 28,0	13. 55. 33,0	1. 33. 40	6. 33	+0. 24
	28	14. 21. 3,4	Idem.	281. 23. 55,1	3. 56. 28,0	13. 34. 0,0	1. 34. 59	6. 13	-0. 14
Sept.	1	14. 5. 15,4	Idem.	281. 23. 55,1	3. 56. 28,0	13. 12. 56,0	1. 35. 44	6. 38	0. 21
	13	13. 17. 28,4	δ l'Aigle.	288. 40. 40.	2. 42. 13,3	11. 56. 39,0	1. 37. 42	6. 41	0. 22
Oct.	1	12. 4. 48,2	γ Baleine.	38. 3. 51,0	2. 19. 53,0	9. 38. 5,0	1. 38. 46	6. 37	0. 30
	11	11. 22. 52,8	Idem.	38. 3. 51,0	2. 19. 53,0	8. 18. 8,0	1. 38. 15	6. 45	0. 30
	12	11. 18. 43,4	Idem.	38. 3. 51,0	2. 19. 53,0	8. 10. 32,0	1. 38. 12	6. 42	0. 27
	13	11. 14. 33,8	Idem.	38. 3. 51,0	2. 19. 53,0	8. 2. 42,0	1. 38. 0	6. 42	0. 34
	16	11. 1. 59,2	Idem.	38. 3. 51,0	2. 19. 53,0	7. 40. 29,0	1. 37. 39	6. 29	0. 35
	25	10. 24. 5,1	α Lien X.	27. 44. 54,0	1. 43. 41,5	6. 37. 34,0	1. 36. 6	6. 51	0. 46
	26	10. 19. 51,5	Idem.	27. 44. 54,0	1. 43. 41,5	6. 31. 26,0	1. 36. 0	6. 42	0. 42
	27	10. 15. 35,2	Idem.	27. 44. 54,0	1. 43. 41,5	6. 24. 58,0	1. 35. 43	6. 52	0. 48
	28	10. 11. 22,8	Idem.	27. 44. 54,0	1. 43. 41,5	6. 18. 57,0	1. 35. 39	6. 48	0. 40
	29	10. 7. 19,7	Idem.	27. 44. 54,0	1. 43. 41,5	6. 13. 22,0	1. 35. 30	6. 33	0. 37
	30	10. 2. 53,5	Idem.	27. 44. 54,0	1. 43. 41,5	6. 7. 49,0	1. 35. 21	6. 17	0. 34
Nov.	15	8. 54. 30,6	δ d'Orion.	80. 16. 49,6	0. 28. 5,5	4. 59. 30,0	1. 31. 44	5. 46	0. 17
	16	8. 50. 15,2	Idem.	80. 16. 49,6	0. 28. 5,5	4. 56. 54,0	1. 31. 15	5. 42	0. 29
	17	8. 45. 55,0	Idem.	80. 16. 40,6	0. 28. 5,5	4. 54. 47,0	1. 31. 12	5. 23	0. 16
	28	7. 58. 32,3	Idem.	80. 16. 49,6	0. 28. 5,5	4. 40. 44,0	1. 28. 13	5. 10	0. 5

1785.	TEMPS V R A I.	ÉTOILE comparée.	Position supposée de l'ÉTOILE.		Lieu observé de JUPITER.		Erreur des Tables.	
			Ascens. droite.	Déclinaison.	Longitude.	Latitude.	En long.	En lat.
			D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	M. S.
Déc. 1	7. 45. 37,1	♂ d'Orion.	80. 16. 56,7	0. 28. 8,4A.	4. 41. 32,0	1. 27. 4A.	-4. 47	-0. 2
5	7. 38. 26,5	Idem.	80. 16. 56,7	0. 28. 8,4	4. 44. 38,0	1. 25. 42	5. 14	0. 3
7	7. 19. 52,6	Idem.	80. 16. 56,7	0. 28. 8,4	4. 47. 55,0	1. 25. 7	5. 4	0. 3
9	7. 11. 20,6	α Nœud X.	27. 45. 18,4	1. 43. 37,4B.	4. 51. 53,0	1. 24. 28	4. 59	0. 3
10	7. 7. 4,0	Idem.	27. 45. 18,4	1. 43. 37,4	4. 53. 56,0	1. 24. 15	5. 8	0. 2
12	6. 58. 33,7	♂ d'Orion.	80. 16. 56,7	0. 28. 8,4	4. 58. 58,0	1. 23. 43	5. 14	0. 2
13	6. 54. 20,2	Idem.	80. 16. 56,7	0. 28. 8,4	5. 2. 9,0	1. 23. 26	4. 52	0. 2

Les observations du mois d'Octobre, donnent encore le résultat suivant:

Opposition de Jupiter, 1.^{er} Octobre, à. 22^h 9' 44" temps vrai.

Longitude en opposition..... 0^h 9^d 34. 35.

Latitude en opposition..... 1. 38. 39,

S A T U R N E.

Cette Planète a parcouru, dans le courant de cette année, un arc de 12 degrés autour du Soleil, & s'est trouvée

EN conjonction.	EN QUADRATURE.		EN opposition.	STATIONNAIRE
15 Jany.	24 Avril.	21 Octobre.	24 Juillet.	13 Mai. 3 Oct.

On a déterminé, par observation, trente-trois lieux de cette Planète, qui, comparés aux Tables, ont donné les résultats suivants:

Les observations du mois de Juillet, donnent encore le résultat suivant :

Opposition de Saturne, le 24 Juillet à..	5 ^h 53' 32" <i>temps vrai.</i>
Longitude en opposition.....	10 ^o 2 ^d 4.23.
Latitude en opposition.....	0. 29. 50 <i>australe.</i>
<i>Mém. 1784.</i>	Nnnn

650 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
HERSCHEL.

Cette Planète, connue depuis peu, dont la révolution d'environ quatre-vingt-trois ans, n'a parcouru dans le courant de cette année, qu'un arc de $4^d 30' \frac{1}{2}$ autour du Soleil : elle s'est trouvée en opposition le 3. Janvier.

On a déterminé, par observation, onze lieux de cette Planète, qui, comparés aux Tables construites sur les élémens déterminés par M. de la Place, ont donné les résultats suivans :

1785.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée.	Position supposée de l'ÉTOILE.		Lieu observé de HERSCHEL.		Erreur du T.	
			Ascens. droite.	Déclinaison.	Longitude.	Latitude.	En longitude.	
	H. M. S.		D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	P. S.
Janv. 11	11. 25. 1,0	♌ Gémeaux	106. 49. 31,0	22. 21. 39,0 B.	104. 2. 48,0	0. 25. 38 B.	-0. 44	+0. 44
12	11. 20. 31,2	Idem.	106. 49. 31,0	22. 21. 39,0	104. 0. 10,0	0. 25. 36	0. 47	-0. 47
16	11. 2. 41,5	Idem.	106. 49. 31,0	22. 21. 39,0	103. 50. 18,0	0. 25. 39	0. 31	-0. 31
17	10. 58. 16,7	Idem.	106. 49. 31,0	22. 21. 39,0	103. 47. 55,0	0. 25. 40	0. 24	-0. 24
21	10. 40. 43,6	Idem.	106. 49. 31,0	22. 21. 39,0	103. 38. 4,0	0. 25. 45	0. 23	-0. 23
22	10. 36. 19,3	Idem.	106. 49. 31,0	22. 21. 39,0	103. 35. 24,0	0. 25. 36	0. 37	-0. 37
Déc. 5	14. 35. 37,0	Idem.	106. 50. 21,1	22. 21. 31,0	110. 18. 1,0	0. 28. 18	0. 26	-0. 26
7	14. 26. 35,6	Idem.	106. 50. 21,1	22. 21. 31,0	110. 14. 5,0	0. 28. 18	0. 12	-0. 12
9	14. 17. 36,6	♈ du Belier.	28. 47. 29,6	22. 26. 54,7	110. 9. 39,0	0. 28. 38	0. 32	-0. 32
11	14. 8. 25,9	♌ Gémeaux	106. 50. 21,1	22. 21. 31,0	110. 5. 22,0	0. 28. 12	0. 44	-0. 44
13	13. 59. 18,6	♈ du Bélier.	28. 47. 29,6	22. 26. 54,7	110. 1. 9,0	0. 28. 34	0. 28	-0. 28

Les observations du mois de Janvier, donnent encore le résultat suivant :

Opposition d'Herschel, le 3 Janvier, à $17^h 39' 47''.3$ temps vrai.

Longitude en opposition..... $3^f 14^d 22. 39,0$.

Latitude en opposition..... $0. 25. 34,0$ boréale.

On a supposé l'erreur moyenne des Tables, de 34 secondes soustractives en longitude, & de 4 secondes additives en latitude.

LA LUNE.

On a déterminé, par observation, dix-huit lieux de la Lune : on en eût sans doute obtenu un plus grand nombre, si les erreurs, dans les déclinaisons calculées, n'avoient souvent fait manquer les hauteurs méridiennes, & rendu par-là les observations incomplètes.

785.	TEMPS V R A I.	ÉTOILE comparée.	Position supposée de l'ÉTOILE.		Lieu observé de la LUNE.		Erreur des Tables.	
			Afcens. droite.	Déclinaison.	Longitude.	Latitude.	Enlong.	En latit.
			D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	M. S.
	H. M. S.							
nv. 21	10. 2. 48,4	β Taureau.	78. 11. 4,5	28. 24. 43,0B.	95. 55. 52,0	3. 44. 55A.	—1. 3	+0. 30
vr. 23	11. 51. 23,0	β pet. Chien	108. 52. 53,0	8. 42. 36,0B.	154. 0. 56,0	1. 10. 17B.	—0. 49	—0. 5
27	14. 32. 23,0	λ Vierge.	211. 53. 5,0	12. 22. 34,0A.	202. 49. 44,0	4. 38. 19A.	—0. 30	+0. 1
ai 23	11. 46. 20,5	Antaris.	244. 4. 29,6	25. 56. 23,0A.	241. 9. 16,0	4. 49. 20A.	—1. 5	—0. 13
26	14. 40. 7,2	π Scorpion.	236. 29. 14,2	25. 28. 59,7A.	282. 34. 20,0	2. 40. 15,5A.	+0. 5	—0. 5
27	15. 36. 29,6	ν Scorpion.	222. 53. 52,8	24. 25. 44,8A.	296. 45. 40,0	1. 31. 48A.	+0. 29	+0. 3
in 13	5. 14. 1,8	ε Serpent.	235. 2. 23,0	5. 7. 57,0B.	160. 27. 17,0	2. 21. 15A.	—0. 53	—0. 1
18	8. 51. 20,6	μ Sagittaire.	270. 14. 43,1	21. 5. 59,0A.	222. 23. 14,0	5. 8. 10,5A.	—0. 40	—0. 24
mill. 18	9. 3. 49,7	τ Sagittaire.	283. 23. 44,6	27. 57. 52,0A.	256. 25. 32,0	4. 21. 21A.	—0. 49	—0. 24
oût 10	17. 34. 28,0	β Verseau.	320. 4. 39,1	6. 30. 7,4A.	337. 57. 16,0	2. 18. 0B.	—0. 13	—0. 14
23	15. 10. 46,1	ζ del'Aigle.	283. 53. 52,0	13. 33. 41,9B.	24. 24. 24,0	5. 0. 46B.	—0. 25	+0. 0
26	17. 59. 25,0	β Cygnè.	290. 31. 34,7	27. 31. 24,0B.	88. 17. 14,0	4. 43. 0B.	—0. 37	—0. 16
sept. 19	13. 5. 58,0	ε Dauphin.	305. 44. 56,2	10. 35. 26,2B.	16. 59. 53,0	4. 41. 4B.	—1. 0	—0. 13
Nov. 15	11. 25. 46,7	α du Bélier.	28. 47. 40,6	22. 26. 53,2B.	47. 22. 19,0	4. 55. 54B.	+0. 20	+0. 33
17	13. 32. 3,5	β Pégase.	343. 21. 17,8	26. 55. 40,3B.	77. 57. 55,0	3. 42. 44B.	—0. 31	+0. 0
Déc. 9	6. 27. 23,5	α lien X.	27. 45. 18,0	1. 43. 37,0B.	355. 29. 0,0	4. 2. 35B.	—0. 23	—0. 14
12	9. 0. 56,7	ν du Bélier.	25. 27. 28,3	18. 14. 42,4B.	40. 13. 33,0	5. 6. 52B.	—0. 19	+0. 5
13	9. 58. 57,7	Alcyone.	53. 42. 26,0	23. 26. 0,0B.	55. 21. 10,0	4. 46. 56B.	—0. 10	—0. 9

652 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

On a calculé les mêmes lieux de la Lune avec les nouvelles Tables d'Euler, publiées par M. Jeaurat, & on l'a trouvé

Occultations d'Étoiles par la Lune.

MOIS & JOURS.	TABLES D'EULER.	
	Erreur.	
	En longit.	En latitude.
	M. S.	M. S.
Janvier 22	+ 0. 52	— 0. 10.
Février 23	+ 0. 27	+ 0. 22.
27	— 0. 40	+ 0. 13.
Mai 23	+ 1. 4	— 0. 17.
26	+ 0. 9	— 0. 6.
27	— 0. 35	— 0. 14.
Juin 13	— 1. 19	+ 0. 7.
18	— 0. 41	— 0. 22.
Juillet 18	— 0. 40	— 0. 8.
Août 20	— 0. 9	+ 0. 18.
23	+ 0. 20	+ 0. 5.
26	— 0. 16	— 0. 14.
Sept. 19	+ 0. 20	+ 0. 15.
Nov. 15	+ 1. 17	+ 0. 28.
17	+ 0. 55	— 0. 19.
Déc. 9	+ 0. 37	— 0. 30.
12	+ 0. 2	+ 0. 18.
13	+ 0. 11	— 0. 9.

ÉTOILES éclipsées.		JOURS.	TEMPS VRAI.			
			H.	M.	S.	
Pléiades	Tayeta	11 Avril	8.	55.	10,5	Immer.
	Dix-huit. ^e	11 Avril	9.	3.	28,0	Immer.
	Maïa	11 Avril	9.	7.	27,0	Immer.
	Alterope	11 Avril	9.	14.	16,7	Immer.
♄ d'Ophiucus		27 Avril	13.	2.	21,9	Immer.
Idem.		27 Avril	13.	37.	19,2	Émer.
♄ du Sagittaire.		22 Juin	12.	7.	29,6	Immer.
Idem.		22 Juin	13.	25.	27,2	Émer.
* du Taureau.		26 Août	11.	54.	31,6	Émer.
* du Sagittaire.		10 Oct.	7.	21.	21,6	Immer.
* du Capricorne.		11 Oct.	9.	7.	50,7	Immer.
* des Gémeaux.		22 Oct.	11.	44.	53,8	Émer.
* du Sagittaire.		5 Nov.	6.	10.	54,0	Immer.
19° des Poissons.		9 Déc.	8.	27.	20,2	Immer.
Pléiades	Celeno	13 Déc.	12.	12.	1,7	Immer.
	Maïa	13 Déc.	12.	35.	13,5	Immer.
	Idem.	13 Déc.	13.	43.	22,1	Émer.
	Seizième	13 Déc.	12.	52.	43,1	Immer.
	Dix-sept. ^e	13 Déc.	12.	53.	6,6	Immer.
	Taieta	13 Déc.	13.	23.	51,5	Émer.
	Electra	13 Déc.	13.	3.	6,8	Émer.

Eclipses des Satellites de Jupiter.

PREMIER SATELLITE.

MOIS & JOURS.	TEMPS VRAI.				CIRCONSTANCES.
	H.	M.	S.		
Janv. 7	6.	58.	20,0	Émerſion	près de l'horizon.
23	5.	13.	18,5	Émerſion	bandes aſſez term. un peu jour.
Août 7	14.	1.	34,9	Émerſion	temps très-favorable.
23	12.	20.	31,8	Immerſion	à travers un nuage léger.
Sept. 1	8.	45.	18,6	Immerſion	aſſez beau temps.
Oct. 1	11.	0.	53,7	Immerſion	un peu de vapeurs.
10	9.	37.	26,8	Émerſion	temps ſuperbe.
26	7.	58.	44,6	Émerſion	légères vapeurs.
Nov. 2	9.	53.	54,4	Émerſion	aſſez beau temps.
9	11.	49.	8,0	Émerſion	beau ciel.
11	6.	17.	48,7	Émerſion	quelques vapeurs.
16	13.	43.	44,0	Émerſion	beaucoup de vapeurs.
Déc. 4	6.	27.	31,0	Émerſion	un peu tard à cauſe des nuages

DEUXIÈME SATELLITE.

Août 23	15.	10.	38,5	Immerſion	aſſez beau temps.
Oct. 12	12.	19.	5,9	Émerſion	beau temps, mais grand vent.
Nov. 6	9.	32.	17,7	Émerſion	temps favorable.
13	12.	8.	57,0	Émerſion	brouillard épais.
Déc. 1	6.	36.	3,0	Émerſion	beaucoup de vapeurs.

TROISIÈME SATELLITE.

Août 11	10.	24.	33,0	Émerſion	vapeurs de temps en temps.
Oct. 29	6.	47.	47,9	Émerſion	légères vapeurs.
Nov. 5	8.	35.	24,8	Immerſion	aſſez beau temps.
5	10.	48.	18,4	Émerſion	<i>idem.</i>

QUATRIÈME SATELLITE.

Août 23	13.	1.	18,0	Immerſion	nuages légers.
---------	-----	----	------	-----------	----------------

Occultation de Vénus par la Lune.

Cette observation a été secondée par le temps le plus favorable.

<i>Temps vrai.</i>		
12 Avril 1785	0 ^h 1' 39",9	le bord obscur de la Lune, mord sur le bord éclairé de Vénus.
	0. 1. 59,9	immersion de la corne australe de Vénus.
	0. 3. 10,9	immersion de la corne boréale.
	0. 50. 26,9	émersion du bord éclairé de Vénus, de dessous le bord éclairé de la Lune.
	0. 50. 48,0	émersion de la corne boréale de Vénus.
	0. 52. 6,9	la corne australe de Vénus est détachée du bord éclairé de la Lune.

Comètes.

Il a paru cette année deux Comètes, qui ont été découvertes à l'Observatoire royal, par M. Méchain, Astronome de la Marine, & de l'Académie Royale des Sciences, l'une le 7 Janvier, l'autre le 11 Mars: nous ne les avons point observées, tant parce que nous avons préféré de suivre, sans interruption, le cours des autres Planètes, que parce que la position défavorable de ces Comètes auroit nécessité de transporter nos instrumens d'un bout à l'autre de l'Observatoire.

Voici les élémens de leurs orbites, tels que M. Méchain les a calculés.

	<i>Première Comète.</i>	<i>Seconde Comète.</i>
Lieu du nœud ascendant.....	8 ^r 24 ^d 12' 5"	2 ^r 4 ^d 44' $\frac{2}{3}$
Inclinaison de l'orbite.....	70. 14. 12	87. 7.
Lieu du périhélie.....	3. 19. 51. 56	9. 27. 34,5.
Passage au périhélie, temps moyen.	27 Janv. 7 ^h 58 4	8 Avril 11 ^h 29'
Logarithme de la distance périhélie.	0,0581975	9,631024.
Sens du mouvement.....	direct.	

La première de ces Comètes a été observée depuis le 7 Janvier jusqu'au 7 Février; elle n'a jamais été aperçue à la vue simple. La seconde n'étoit visible qu'avec le secours des lunettes, dans le commencement de son apparition, & n'avoit qu'une chevelure; mais le 31 Mars elle a paru avec une queue de 7 à 8 degrés, qui a augmenté jusqu'au 16 Avril, dernier jour où il fut possible de l'observer à Paris.

TABLE de la déclinaison de plusieurs Étoiles, déduite de leur hauteur méridienne, observée au quart-de-cercle mobile, en 1785.

M O I S & J O U R S.	ÉTOILES.	NOMBRE d'Observations.	H A U T E U R O B S E R V É E.			D É C L I N A I S O N M O Y E N N E le 1 ^{er} Janvier 1786.		
			D.	M.	S.	D.	M.	S.
Mars 7	α d'Orion	2	48.	31.	43,2	7.	21.	4 B.
Déc. 10	Idem.	2	48.	31.	49,4			
Oct. 13	α Persée	2	90.	14.	54,5	49.	5.	0 B.
Nov. 17	Idem.	4	90.	14.	49,7			
Avril 23	α Vierge	4	31.	9.	13,8	10.	2.	11 A.
Août 20	α Flèche	4	58.	42.	21,9			
Sept. 14	Idem.	2	58.	42.	27,8	17.	31.	58 B.
Avril 28	α Couronne	3	68.	37.	1,5			
Mai 19	α Balance	3	26.	3.	15,5	15.	8.	23 A.
Oct. 25	α Baleine	4	44.	25.	22,8			
Oct. 27	α Lien	4	42.	54.	31,2	3.	14.	24 B.
Nov. 8	Idem.	2	42.	54.	30,0			
Déc. 10	Idem.	2	42.	54.	30,5	1.	43.	30 B.
Oct. 23	α Bélier	9	63.	36.	55,9			
Nov. 12	Idem.	7	63.	36.	59,5	22.	26.	32 B.
Déc. 11	Idem.	4	63.	36.	62,1			

658 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE, &c.
années d'observations des hauteurs du Soleil dans le Solstice.
Le résultat que nous avons trouvé, n'étant pas le même
que celui qu'ont établi plusieurs Astronomes, nous avons
pensé qu'il seroit intéressant de rapporter ici les hauteurs
méridiennes des principales Étoiles, telles que notre instru-
ment nous les a données, ainsi que la déclinaison moyenne
qui en résulte, afin d'établir par-là une comparaison directe
entre notre instrument & ceux des autres Observatoires.

Nota. La troisième colonne renferme le nombre des observations entre
lesquelles on a pris un milieu, pour réduire au jour moyen entre
ceux où l'on a observé, la hauteur rapportée dans la quatrième colonne;
cette hauteur n'est corrigée que de l'erreur de la division & de la
lunette de l'instrument: pour en déduire la déclinaison moyenne,
comprise dans la cinquième colonne, on a employé les Tables des
réfractions rapportées dans l'Astronomie de M. de la Lande, les
Tables d'aberration & de nutation de la Connoissance des Temps,
année 1781, & l'on a supposé la hauteur de l'Équateur de $41^{\circ} 9' 46''$.

